

LAPPEENRANNAN TEKNILLINEN YLIOPISTO
Kauppakorkeakoulu
Rahoituksen maisteriohjelma

Mikko Heiskanen

**OPTIOHINNOITTELMALLIEN EMPIIRINEN VERTAILU OMX 25
HELSINKI -WARRANTTIMARKKINOILLA**

Työn ohjaaja/tarkastaja: Professori Eero Pätäri
2. tarkastaja: Tutkijatohtori Jyri Kinnunen

TIIVISTELMÄ

Tekijä:	Heiskanen, Mikko
Tutkielman nimi:	Optiohinnoittelumallien empiirinen vertailu OMX 25 Helsinki -warranttimarkkinoilla
Tiedekunta:	Kauppätieteiden tiedekunta
Pääaine:	Rahoitus / Rahoituksen maisteriohjelma
Vuosi:	2014
Pro gradu -tutkielma:	Lappeenrannan teknillinen yliopisto 70 sivua, 9 kuvaa, 15 taulukkoa ja 3 liitettä
Tarkastaja:	professori Eero Pätäri tutkijatohtori Jyri Kinnunen
Hakusanat:	volatiliteetti, GARCH, black-scholes, johdannaiset, warrantit, optio

Tämän tutkimuksen tarkoituksena on selvittää pystytäänkö OMX 25 Helsinki kohde-etuusindeksin warranttien hintoja ennustamaan käyttämällä erilaisia optiohinnoittelumalleja.

Tutkielman aineisto koostuu OMXH25-indeksiä seuraavien warranttien hinta-aikasarjatiedoista vuosilta 2009-2011. Tutkimuksessa käytettiin kolmea eri hinnoittelumallia warranttien hinnoitteluvirheiden tutkimiseen. Perinteistä Black-Scholes-hinnoittelumallia käytettiin siten, että warranttiaineistosta johdettu implisiittinen volatiliteetti regressoitiin maturiteetin ja toteutushinnan mukaan, jonka jälkeen regression perusteella valittiin kulloiseenkin tilanteeseen sopiva volatiliteettiestimaatti. Black-Scholes-mallin lisäksi tutkimuksessa käytettiin kahta GARCH-pohjaista optiohinnoittelumallia. Mallien estimoimia hintoja verrattiin markkinoiden warranttihintoihin.

Tulosten perusteella voitiin todeta, että mallit onnistuvat hinnoittelemaan warrantteja paremmin lyhyen ajan päähän mallien kalibroinnista. Tulokset vaihtelivat suuresti eri vuosien välillä eikä minkään käytetyn mallin nähty suoriutuvan systemaattisesti muita malleja paremmin.

ABSTRACT

Author: Heiskanen, Mikko
Title: An empirical comparison of option pricing models: evidence from the OMX 25 Helsinki
Faculty: LUT, School of Business
Major / Master's Programme: Finance / Master's Degree Programme in Finance
Year: 2014
Master's Thesis: Lappeenranta University of Technology
70 pages, 9 figures, 15 tables and 3 appendixes
Examiners: Professor Eero Pätäri
Post-doctoral Researcher Jyri Kinnunen
Keywords: volatility, GARCH, black-scholes, derivatives, covered warrants, options

The purpose of this study is to investigate whether it is possible to forecast the prices of covered warrants in Finnish markets by using different option pricing models.

The data consists of OMXH25 covered warrants. The data was collected from years 2009-2011. Three different option pricing models are used in the study including practitioner Black-Scholes -model and two GARCH-models. We compared prices estimated by option pricing models to actual market prices.

The empirical results indicate that option pricing models perform fairly well when price information close to model calibration time is used. Yearly variation in the pricing errors was wide and none of the models seemed to be systematically superior.

ALKUSANAT

Tämä tutkielma on tehty Lappeenrannan teknillisessä yliopistossa. Tutkimus warranttien parissa oli opettavaista ja haastavaa ennakko-odotusten mukaisesti. Kevään aikana palaset alkoivat löytää paikkansa ja tutkimus tuli valmiiksi alkuperäisten suunnitelmien mukaisesti.

Haluan kiittää professori Eero Pätäriä aiheen terävöittämisestä tutkimusprosessin alkuvaiheessa sekä motivaation ylläpitämisestä. Lisäksi haluan kiittää opiskelutovereitani hyödyllisistä neuvoista ja tuesta tutkimusprosessin aikana.

Lahdessa 21.5.2014

Mikko Heiskanen

SISÄLLYSLUETTELO

1	JOHDANTO	7
	1.1 Tutkimuksen tarkoitus	8
	1.2 Tutkimuksen rajaukset	9
	1.3 Tutkimuksen rakenne	10
2	TEOREETTINEN VIITEKEHYS	11
	2.1 Volatiliteetti	11
	2.1.1 Volatiliteettihymy ja volatiliteetin aikarakenne	12
	2.2 Volatiliteetin mallintaminen tilastollisesti	12
	2.2.1 ARCH ja GARCH -prosessi	13
	2.3 Optioiden hinnoittelumallit	15
	2.3.1 Black-Scholes-malli	17
	2.3.2 Duan NGARCH	19
	2.3.3 Heston-Nandi GARCH	20
	2.4 Aikaisemmat tutkimukset	21
	2.4.1 Optioiden hinnoittelu ulkomaisilla markkinoilla	22
	2.4.2 Optioiden hinnoittelu Suomen markkinoilla	26
3	TUTKIMUSAINEISTO JA -METODOLOGIA	28
	3.1 Aineisto	28
	3.2 Black-Scholes -malli	31
	3.3 GARCH-mallit	32
	3.3.1 GARCH-mallien parametrien estimointi	33
	3.4 Mallien vertailu	35
4	TULOKSET	36
	4.1 RMSE-hinnoitteluvirheet testiotoksessa	36
	4.1.1 Hinnoitteluvirheet koko periodilla	36
	4.1.2 Hinnoitteluvirheet vuosittain	38
	4.2 RMSE-hinnoitteluvirheet ennustusotoksessa	42
	4.2.1 Hinnoitteluvirheet koko ennustusotoksessa	43
	4.2.2 Hinnoitteluvirheet vuosittain	44
	4.2.3 Hinnoitteluvirheet kuukausittain	49
	4.3 Prosentuaaliset hinnoitteluvirheet ennustusotoksesta	54
	4.3.1 Hinnoitteluvirheet toteutushinnan mukaan	55
	4.3.2 Hinnoitteluvirheet kuukausittain	60
5	JOHTOPÄÄTÖKSET	65
	LÄHDELUETTELO	67

LIITTEET

LIITE 1: Tutkimuksessa käytetyt ohjelmistot ja menetelmät

LIITE 2: Regressioyhtälöiden tulokset

LIITE 3: Box-whisker kuvaajat maturiteetin mukaan

1 JOHDANTO

Johdannaiset näyttävät yhä suurempaa osaa yksityissijoittajien portfolioissa ja institutionaalisessa sijoittamisessa niiden vipuvaikutus- ja suojautumismahdollisuuksien ansiosta. Vaihdetuimpia johdannaisia ovat ylivoimaisesti optiosopimukset ja niiden arvopaperistetut versiot, warrantit. Optioiden suosio on ollut voimakkaasti kasvava Black, Scholes ja Mertonin vuonna 1973 julkaiseman optiohinnoittelumallin jälkeen ja aiheesta on tutkittu aktiivisesti eri markkinoilla useiden aiheesta tehtyjen tutkimusten pyrkiessä ennustamaan optioiden tulevaisuuden hintoja historiallisten tietojen perusteella. Saadun informaation turvin sijoittavat pyrkivät spekuloimaan optioilla ja suojautumaan kurssiriskeiltä. On sanomattakin selvää, että johdannaissopimusten hintojen ennustaminen on vaikeaa, sillä pelkästään johdannaisten kohde-etuuskien hintojen ennustamisen on huomattu olevan käytännössä mahdotonta. Hyvien tuottomahdollisuuksien myötä tutkimuksia johdannaismarkkinoille tehdään kuitenkin runsaasti.

Tulevaisuuden volatiliteetin ennustaminen on keskiössä optioista ja optiohinnoittelumalleista puhuttaessa, sillä optioiden hinnoittelumallit perustuvat juuri volatiliteettiin. Useissa tutkimuksissa on huomattu Black & Scholesin (1973) perinteisen optiohinnoittelumallin epäonnistuvan systemaattisesti hinnoittelemaan plus- ja miinusoptioita, sillä se olettaa volatiliteetin olevan vakio kaikilla saman kohde-etuuden optioilla. Markkinoiden mukaan volatiliteetti näyttää aiempien tutkimustulosten valossa [kts. esim. Rubinstein (1985); Dupire (1994)] olevan pienin tasaoptioilla ja kasvavan miinus- ja plusoptioihin päin mentäessä, mistä syystä ilmiötä yleisesti kutsutaan volatiliteettihymyksi. Samoissa tutkimuksissa myös option maturiteetin on huomattu vaikuttavan volatiliteetin tasoon. Sittemmin optiohinnoittelumalleja on pyritty kehittämään tarkemmiksi sisällyttäen niihin informaatiota volatiliteetin jakaumasta. Hinnoittelumallien kehittyessä tarkemmiksi myös niiden monimutkaisuus on kasvanut huomattavasti perinteiseen Black & Scholes -malliin verrattuna, minkä vuoksi useiden näennäisesti tehokkaiden hinnoittelumallien käyttö jää akateemisen

kirjallisuuden ulkopuolella vähäiseksi. Bollerslevin vuonna 1986 esittelemän GARCH-mallin myötä myös optiohinnoittelussa alettiin hyödyntää GARCH-prosessiin pohjautuvia hinnoittelumalleja, joista tärkeimpiä ovat Duanin 1995 sekä Hestonin ja Nandin vuonna 2000 esittelemät mallit. Näiden mallien on todettu tutkimuksissa pystyvän selittämään volatiliteettihymyä perinteistä Black-Scholes -mallia paremmin ja niiden pohjalta on kehitetty edelleen monimutkaisempia malleja.

Valtaosa optiohinnoittelun tutkimuskentässä tehdyistä tutkimuksista on tehty isojen markkinoiden, kuten USA:n, optioaineistoilla, sillä kyseiset markkinat tarjoavat laajimman aineiston optiohinnoista ja mahdollistavat näin laajojen otosten käytön. Pienemmille markkinoille tehdyt tutkimukset ovat varsin niukassa ja siitä syystä tämä tutkimus puolustaa paikkaansa tuoden uutta informaatiota optiohinnoittelusta Suomen markkinoilla. On tärkeää vertailla pätevätkö suurien markkinoiden tehdyt tutkimustulokset myös pienillä markkinoilla ja pystytäänkö näillä markkinoilla kehitettyjä ja testattuja malleja käyttämään luotettavasti optiohinnoittelussa. Suomen markkinat nähdään usein niin integroituneiksi USA:n ja muiden suurten länsimaisten markkinoiden kanssa, että lähtökohtaisesti myös vastaavien tutkimusten tulosten voi odottaa korreloivan keskenään.

1.1 Tutkimuksen tarkoitus

Tämän tutkimuksen tarkoitus on tutkia pystytäänkö johdannaisten hintoja mallintamaan luotettavasti Suomen markkinoilla käyttämällä erilaisia hinnoittelumalleja. Tutkimus on toteutettu OMX Helsinki 25- kohde-etuuden warranttien hintojen poikkileikkausaineistolla, joka sisältää warrantteja useilla toteutus-hinnoilla ja maturiteeteilla. Tutkimuksen metodologinen osuus on toteutettu käyttämällä perinteistä Black-Scholes hinnoittelumallia siten, että mallissa normaalisti staattisena arvona käytetyn volatiliteetin annetaan vaihdella warrantin toteutushinnan ja maturiteetin mukaan. Black-Scholes -mallin lisäksi tutkimukseen on valittu myös kaksi GARCH-pohjaista optiohinnoittelumallia. Aiempien tutkimusten valossa voitiin olettaa, että GARCH-malli suoriutuu en-

nustetarkkuudessa Black-Scholes mallia paremmin, joten Black-Scholes malli on otettu tutkimukseen mukaan vertailevaksi malliksi. Mallin käyttöä puoltavat sen suhteellisen yksinkertainen implementointi ja mallin edelleen laaja käyttö varsinkin akateemisen tutkimuksen ulkopuolella. Tutkimustulokset Black-Scholes -mallin heikosta ennustetarkkuudesta eivät myöskään ole täysin yksiselitteisiä [kts. esim. Christoffersen & Jacobs (2004a)], joten mallin empiirinen tarkastelu on perusteltua.

Johdannaismarkkinoiden ja varsinkin optioiden kohdalla voi pienemmillä markkinoilla muodostua ongelmalliseksi käytettävän datan saatavuus ja luotettavuus. Pidempien maturiteettien sekä kaukana toteutushinnastaan olevien optioiden kaupankäynti voi olla varsin ohutta, jolloin markkinoiden tarjoamat hinnat eivät välttämättä kuvasta luotettavasti markkinoiden hintanäkemystä mikä on otettava huomioon tuloksia analysoitaessa. On kuitenkin todennäköistä, että käytettävä aineisto tarjoaa riittävän laajuuden tutkimuksen tekemiseen.

Tutkimuskysymykset ovat seuraavat:

1. Voidaanko OMX Helsinki 25 -warranttien hintoja ennustaa tutkimuksessa mukana olevien hinnoittelumallien mukaan luotettavasti
2. Onko hinnoittelutehokkuudessa merkittäviä eroja käytettyjen mallien välillä maturiteetin ja toteutushinnan mukaan tarkasteltuna.

1.2 Tutkimuksen rajaukset

Tutkimuksen kohteena olevat Suomen markkinat ovat johdannaistutkimuksen kannalta haasteelliset niiden koon vuoksi, sillä johdannaisten kohdalla kaupankäynti on pientä ja tarvittavat warranttiaineistot eivät ole helposti saatavilla. Näiden syiden vuoksi tutkimus on toteutettu käyttämällä OMX Helsinki 25 -indeksi kohde-etuutenaan olevilla warranteilla, joista kerätyt aikasarjat tarjosivat tutkimuksen käyttöön riittävästi havaintoja luotettavien empiiristen tulosten saamiseksi. Suomen markkinoilla olevat warranttisopimukset ovat tyypiltään eurooppalaisia optioita, joten ennen juoksuajan päättymistä mahdollisesti to-

teutettavat amerikkalaistyyppiset optiot ja niihin liittyvät mallit ovat niin ikään jätetty tämän tutkimuksen tarkastelun ulkopuolelle.

Hinnoittelumallien vertailun tarkoituksena on tutkia mallien tulevaisuuden hintojen ennustuskykyä mahdollisimman monesta eri näkökulmasta ja pyrkiä lopulta asettamaan tutkitut mallit paremmuusjärjestykseen. Tämän vuoksi optiohinnoilla spekulointi ja optioiden käyttö suojautumiseen on jätetty tämän tutkimuksen ulkopuolelle.

1.3 Tutkimuksen rakenne

Loppuosa tutkimuksesta on jaettu osiin seuraavasti. Tutkimuksen toisessa osassa esitellään tutkimuksen teoreettinen viitekehys ja aikaisemmat tutkimusaiheen kannalta relevantit tutkimukset. Kolmannessa osassa käydään läpi tutkimusaineisto sekä esitellään käytettävät mallit ja tutkimusmenetelmät. Tutkimuksen neljännessä osassa esitellään saadut tutkimustulokset ja viidennessä osassa vedetään johtopäätökset saaduista tuloksista sekä arvioidaan jatkotutkimusaiheita.

2 TEOREETTINEN VIITEKEHYS

Tässä osassa esitellään tutkimuksen teoreettinen viitekehys. Aluksi käydään läpi johdannaishinnoitteluun vahvasti liittyvä käsite volatiliteetti ja sen erilaiset mallinnusmenetelmät. Tämän jälkeen esitellään tärkeimmät johdannaisten hinnoittelumallit ja lopuksi käydään läpi tarkemmin optiohinnoittelun näkökulmasta tehdyt aikaisemmat tutkimukset.

2.1 Volatiliteetti

Tuoton epävarmuutta mittaavan volatiliteetin avulla voidaan arvioida ja vertailla eri sijoitusmahdollisuuksien riskejä. Optiohinnoittelussa volatiliteetin estimointi ja käyttö ovat hyvin tärkeässä roolissa ja sen voidaankin nähdä olevan suurin yksittäinen tekijä, joka vaikuttaa option teoreettisen hinnan muodostumiseen. Optiot ovat johdannaissopimuksia ja nimensä mukaisesti niiden arvo on riippuvainen kohde-etuuden hintakehityksestä. Suuret kohde-etuuden hinnan heilahtelut peilaavat vahvasti siten myös sen johdannaismarkkinoihin.

Volatiliteetti eli tuoton keskihajonta kuvaa tarkasteltavan rahoitusinstrumentin tuoton vaihteluväliä ja antaa konkreettisen mittarin riskille instrumentin hinnan muutoksesta. Otoksen keskihajonta s voidaan yleisesti esittää seuraavasti

$$s = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}, \quad (1)$$

missä N on käytettyjen havaintojen lukumäärä, x_i on i :s havainto ja \bar{x} on kaikkien käytettyjen havaintojen keskiarvo.

Historiallisella volatiliteetilla tarkoitetaan rahoitusinstrumentin hintasarjasta johdettua vuosittaista keskihajontaa. Historiallisen volatiliteetin käytössä ongelmaksi muodostuu usein sen staattisuus ja nimensä mukainen mennyt perspektiivi. Historiallisen volatiliteetin laskemiseen käytetyn aikaperiodin valinta vaikuttaa myös merkittävästi lasketun volatiliteetin arvoon ja hankaloittaa osaltaan volatiliteetin arviointia ja sen käyttöä. Implisiittinen volatiliteetti (*implied volatility*) on puolestaan markkinoiden näkemys tulevasta volatiliteetistä ja se voidaan johtaa optioiden hinnasta esimerkiksi Black-Scholes – kaavan

avulla. Implisiittistä volatiliteettia hyödynnetään usein historiallisen volatiliteetin sijasta optiohinnoittelussa. (Hull J. , 2005, ss. 286,300)

2.1.1 Volatiliteettihymy ja volatiliteetin aikarakenne

Tutkimusten mukaan on laajalti havaittu, että markkinoiden optiohinnoista johdettu implisiittinen volatiliteetti ei ole vakio vaan se vaihtelee option maturiteetin sekä kohde-etuuden hinnan ja option toteutushinnan suhteen mukaan. Useissa tutkimuksissa on huomattu, että lähempänä toteutushintaa olevien tasaoptioiden volatiliteetti on pienempi verrattuna plus- ja miinusoptioihin. Tätä ilmiötä kutsutaan volatiliteettihymyksi sen vuoksi, että implisiittisen volatiliteetin ja toteutushinnan mukaan koordinaatistoon piirretty kuvaaja näyttää usein tietynlaiselta hymyltä. Mikäli myös maturiteetti lisätään mainittuun kuvaajaan mukaan, saadaan kolmiulotteinen kuvaaja, jota kutsutaan volatiliteettipinnaksi (*volatility surface*).

Optioiden aikarakenteen vaikutuksista implisiittiseen volatiliteettiin ovat käsitelleet tutkimuksessaan muun muassa Derman ja Kani (1994) muodostamalla binomipuumallin S&P 500 -markkinoiden optiohinnoista johdetusta implisiittisestä volatiliteetista ja hinnoitteleamalla optioita muodostetun mallin mukaan. Dermanin ja Kanin tutkimuksen mukaan implisiittinen volatiliteetti näytti kasvavan mitä enemmän toteutushinnan ja kohde-etuuden arvon suhde kasvoi. Maturiteetin pidentyessä implisiittinen volatiliteetti näytti pienenevän hieman. Samankaltaisiin havaintoihin ovat tulleet aiemmin Rubinstein (1985), Dupire (1994), Rubinstein (1994) ja Derman, Kani & Zou (1996). Volatiliteetin aikarakenteeseen ja volatiliteettihymyyn palataan aiempia tutkimuksia esittelevässä kappaleessa 2.4, jossa käydään läpi tutkijoiden ehdottamia malleja ja tapoja kontrolloida havaittuja toteutushinnan ja aikarakenteen vaikutuksia volatiliteetin tasoon.

2.2 Volatiliteetin mallintaminen tilastollisesti

Aiemmin esiteltyjen staattisten volatiliteettitunnuslukujen lisäksi volatiliteettia voidaan mallintaa tilastollisten mallien avulla. Tutkimukset ovat osoittaneet,

että markkinoilla volatiliteetti näyttää esiintyvän klustereissa, joissa suuret volatiliteetit seuraavat toisiaan ja päinvastoin. (Brooks, 2005, s. 438)

Volatiliteetin ennustamiseen historiallisen aineiston perusteella on olemassa useita erilaisia malleja ja tekniikoita. Näistä suosituimpiin lukeutuvat tässäkin työssä käytetyt ARCH ja GARCH -pohjaiset mallit, joihin palataan ongelmakohtineen tarkemmin seuraavassa kappaleessa. ARCH-malleja yksinkertaisempia autoregressiivisiä malleja, kuten ARMA (*Autoregressive moving average*) -mallia, voidaan myös hyödyntää volatiliteetin mallinnuksessa. Useimmiten niiden käyttö jää vähäiseksi GARCH-pohjaisten mallien rinnalla, sillä kyseisen mallin voidaan nähdä sisältävän ARMA -mallin. Autoregressiivisten mallien lisäksi volatiliteetin estimointiin voidaan käyttää edelleen yksinkertaisempia malleja, jotka esimerkiksi pyrkivät painottamaan enemmän mallin-usajankohdan lähellä olevaa aineistoa. Tällaisia malleja ovat muun muassa eksponentiaalinen painotettu keskiarvo malli (*EWMA, exponentially weighted moving average*), joka nimensä mukaisesti painottaa viimeisimpiä havaintoja suhteessa enemmän kuin kaukaisempia painotuksen laskiessa eksponentiaalisesti. (Brooks, 2005, ss. 442-445)

2.2.1 ARCH ja GARCH -prosessi

GARCH (*generalized autoregressive conditional heteroscedasticity*) -prosessi pohjautuu Englen (1982) esittelemään epälineaariseen ARCH-prosessiin, joka osaltaan kehitettiin vastaamaan perinteisen lineaarisen regressiomallin puutteisiin ja tarkkoihin taustaoletuksiin muun muassa mallin virhetermin varianssin vakioisuudesta (homoskedastisuus). GARCH-prosessin tarkoitus on pystyä tunnistamaan volatiliteetin klusteroituminen ja pystyä sitä kautta tarjoamaan luotettava estimointimenetelmä tulevaisuuden volatiliteetille. Mallin autoregressiivisellä (*autoregressive*) osalla tarkoitetaan sitä, että malli olettaa eri ajanhetkien virhetermien olevan korreloituneet keskenään. Ehdollisuus (*conditional*) taas tarkoittaa, että malli sallii ehdollisen varianssin muuttuvan ajassa aiempien virhetermien funktiona.

Alkuperäisen ARCH-mallin ongelmaksi muodostui sen ei-negatiivisuusrajoite, jonka mukaan estimoitavat parametrit eivät saa olla negatiivisia. Viiveiden (*lag*, vertailuhavaintojen välinen aikaero) lukumäärän kasvaessa tällainen tilanne tulisi todennäköisesti vastaan, eikä mallin käyttö olisi enää luotettavalla tasolla. Myös viiveiden lukumäärän määrittäminen itsessään aiheutti ongelmia, eikä parhaan lukumäärän määrittäminen ole aina suoraan mahdollista. Viiveiden lisäämisen vuoksi myös mallin ylisovitus voi heikentää ennustetarkkuutta.

Varsinaisen yleistetyn ARCH (GARCH) -mallin kehitti myöhemmin Bollerslev (1986) aiemmin mainittujen ongelmakohtien vuoksi lisäämällä ARCH malliin viivästetyn ehdollisen varianssin. Näin ollen GARCH-mallin varianssi on riippuvainen sen omista viivästetyistä variansseista (GARCH-termi) ARCH mallissa olevan viivästetyn residuaalin neliön (ARCH-termi) lisäksi. GARCH(p,q) -mallin h_t ehdollisen varianssin kaava voidaan esittää seuraavasti

$$\epsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(0, h_t) \quad (2)$$

ja

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i h_{t-i} \quad (3)$$

missä α_0 , α_i ja β_i ovat mallin estimoimat vakio, ARCH(p) -termin (ϵ_{t-i}^2) kerroin sekä GARCH(q) -termin (h_{t-i}) kerroin. Mallin rajoitusehdot ovat

$$\begin{aligned} p &\geq 0, & q &> 0 \\ \alpha_0 &> 0 & \alpha_i &\geq 0, & i &= 1, \dots, q \\ b_i &\geq 0, & i &= 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Ei-negatiivisuusehto on rajoitteena edelleen myös GARCH-mallissa, mutta on käytännössä huomattu, että GARCH(1,1) -malli on useimmiten riittävä selittämään volatiliteetin vaihtelua, eikä viiveiden lisääminen ole useinkaan tarpeellista. Tällöin negatiivisten parametrien mahdollisuus on huomattavan pie-

ni. Bollerslevin GARCH-mallin menestyksen myötä vuosien saatossa on kehitetty useita erilaisia versioita esitellyn mallin pohjalta, jotka pyrkivät ennustamaan edelleen tehokkaammin tulevaisuuden volatiliiteettia historiallisten tuotosarjojen perusteella.

Engle ja Ng (1993) tutkivat työssään positiivisten ja negatiivisten uutisten vipuvaikutusten eroja volatiliiteetin jakaumaan ja vahvistivat muun muassa Blackin (1976) ensimmäiset havainnot siitä, että markkinoiden volatiliiteettijakauma on asymmetrinen. Tällä tarkoitetaan sitä, että positiivisen ja negatiivisen markkinatiedon vaikutukset ennustettuun volatiliiteettiin eivät ole yhtä suuret ja se tulisi ottaa huomioon volatiliiteetin estimoinnissa. Englen ja Ng:n tutkimuksessa vertailun kohteena olivat symmetrisen GARCH-mallin lisäksi useita asymmetrisiä GARCH-malleja, joista on sittemmin optiohinnoittelussa laajalti hyödynnetty NGARCH-mallia [katso esim. Duan (1995)]. Englen ja Ng:n NGARCH(p,q) -mallin ehdollisen varianssin h_t kaava voidaan esittää seuraavasti

$$\epsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(0, h_t) \quad (4)$$

missä

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (\epsilon_{t-i} - \gamma \sqrt{h_{t-i}})^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i h_{t-i} \quad (5)$$

missä α_0 , α_i ja β_i ovat mallin estimoimat vakio, ARCH(p) -termin (ϵ_{t-i}^2) kerroin sekä GARCH(q) -termin (h_{t-i}) kerroin. GARCH(p,q) -malliin lisäyksenä NGARCH(p,q) -mallissa on myös estimoitavana parametrina γ , joka huomioi volatiliiteettijakauman asymmetrisyyden.

2.3 Optioiden hinnoittelumallit

Optioiden hinnoittelumalleja on kehitetty runsaasti vastaamaan Black ja Scholesin (1973) ja Mertonin (1973) kehittämän ja laajalti käytetyn Black-Scholes -mallin ongelmakohtiin. Mallin oletus staattisesta volatiliiteetista, tuottojen normaalijakaumasta ja näiden myötä heikosta ennustustarkkuudesta on pyritty

ottamaan huomioon kehittämällä monia erilaisia hinnoittelumalleja, joista tärkeimmät käydään läpi seuraavassa kappaleessa. Hinnoittelumallit on hankalaa jakaa suoranaisesti ryhmiin, sillä monet mallit ovat toistensa kanssa päällekkäisiä ja pyrkivät usein korjaamaan aiemmin kehitetyissä malleissa huomattuja ongelmia. Mallit voidaan kuitenkin jakaa näennäisiin ryhmiin seuraavasti.

Valtaosa optionhinnoittelumalleista soveltuu käytettäväksi ainoastaan eurooppalaisille optioille, mutta Rubinsteinin (1994) binomipuumallin pohjalta on kehitetty useita malleja, joita voidaan käyttää myös amerikkalaisten optioiden tapauksessa. Epäjatkuvat satunnaiset hyppyt huomioivat mallit (*jump diffusion model*) hinnoittelevat optioita simuloidun tuottosarjan mukaan simuloiden hintasarjaan mukaan myös satunnaisia nousuja ja laskuja [esim. Merton (1976), Bates (1991) ja Kou (2002)]. Cox ja Ross (1976) esittelivät CEV (*constant elasticity of variance*) mallin, joka sallii kohde-etuuden tuoton ja volatiliteetin keskinäisen korrelaation. Jatkuvat (*continuous time*) stokastiset volatiliteettimallit olettavat kohde-etuuden hintojen seuraavan stokastista prosessia. Stokastisen volatiliteettimallin esittelivät ensi kerran Hull ja White (1987) yleistämällä Black-Scholes -mallin, joka sallii volatiliteetin muuttuvan ajassa. Hullin ja Whiten esittelemien teorioiden pohjalta stokastisiin volatiliteettimalleihin on lisätty volatiliteetin lisäksi stokastinen korkotekijä, satunnaisia hyppyjä ja näiden variaatioita. Näistä esimerkkinä Bakshin, Caon ja Chenin (1997) SVSI-J -malli (*stochastic volatility stochastic interest rate model with jumps*). Hestonin (1993) esittelemä stokastinen hinnoittelumalli oli osaltaan tärkeässä roolissa sittemmin laajalti käytettyjen diskreettien (*discrete time*) GARCH-pohjaisten hinnoittelumallien kehityksessä [esim. Duan (1995) sekä Heston ja Nandi (2000)], jotka pyrkivät puolestaan mallintamaan volatiliteettiklustereita sallimalla volatiliteetin muuttuvan ajassa ja hyödyntämään tätä informaatiota optionhinnoittelussa.

Optioiden hinnoitteluun kehitettyjä malleja on olemassa lukematon määrä, joten nyt esitellyt mallit ovat vain huomionarvoisimmat tapaukset, joiden poh-

jalta yhä monimutkaisempia hinnoittelumalleja on myöhemmin kehitetty. Kat-tavan kirjallisuuskatsauksen optioiden hinnoittelumalleista on tehnyt Bates (2003) ja myöhemmin myös GARCH-malleihin keskittyvässä tutkimuksessaan Christoffersen, Jacobs & Ornathanal (2012). Monet mallit ovat käytännössä implementoinnin suhteen hankalia tai simuloinnin myötä aikaavieviä varsinkin isoimmille aineistoille, joten akateemisen tutkimuksen ulkopuolella käytetään usein yhä Black-Scholes mallia ja sen erilaisia versioita. Siksi tähän työhön on päätetty ottaa lähtökohdaksi kyseinen hinnoittelumalli. Toiseksi malliksi valittu GARCH-pohjainen malli on tutkimusten mukaan huomattu olevan tehokas ennustetarkkuudessa myös optiohinnoittelun tapauksessa, joten on kiinnostavaa arvioida mallin toimintaa myös pienemmillä Suomen markkinoil-la. Tutkimuksessa käytettävien mallien teoriapohja esitellään tarkemmin seuraavissa kappaleissa. Varsinaiset käytettävät mallit ja niiden metodologia käydään läpi tutkimuksen kolmannessa osiossa.

2.3.1 Black-Scholes-malli

Black ja Scholes (1973) ja Merton (1973) esittelivät optioiden hinnoitteluun sopivan mallin ensimmäisen kerran vuonna 1973. Tästä lähtien mallia on pi-detty eräänlaisena mittarina, jota vastaan uusia hinnoittelumalleja ja lähesty-mistapoja verrataan. Black-Scholes -mallia käytetään yhä yleisesti varsinkin eurooppalaisten osto- ja myyntioptioiden hinnoittelussa sen yksinkertaisuudesta ja helposta implementoinnista johtuen. Osinkoa maksamattoman koh-de-etuuden Eurooppalaisten optioiden hinnat voidaan laskea Black-Scholes -mallin avulla seuraavasti

$$C = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \quad (6)$$

ja

$$P = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \quad (7)$$

missä

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (8)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (9)$$

Kaavoissa C kuvaa osto-option hintaa, P vastaavasti myynti-option hintaa, S_0 on kohde-etuuden hinta ajanhetkellä 0 , K on option toteutushinta, r on riskitön korkokanta, σ on vuotuinen volatilitteetti ja T maturiteetti vuosina sekä $N(x)$ normaalijakauman kertymäfunktion x :ää vastaava arvo. (Black & Scholes, 1973)

Black-Scholes -malli olettaa kohde-etuuden hinnan noudattavan satunnaista Brownin liikettä (*Brownian motion*) sekä kohde-etuuden volatilitteetin olevan vakio. Black-Scholes -hinnoittelukaavasta voidaan nähdä, että kaavan mukaisen option hinnan laskemiseen tarvittavat tiedot ovat volatilitteettia lukuun ottamatta havaittavissa markkinoilta tai suoraan optiosopimuksesta ja tämän vuoksi käytetty volatilitteetti määrää mallin antaman hinnan. Volatilitteettina usein käytetty historiallinen volatilitteetti ei tutkimusten mukaan anna riittävää estimaattia tulevaisuuden volatilitteetille ja antaa näin harhaisen kuvan option hinnasta. Useat tutkimukset ovat tulleet yhteneviin johtopäätöksiin siitä, että markkinoilta Black-Scholes -mallin mukaan johdettu implisiittinen volatilitteetti ei ole vakio, vaan riippuvainen option kohde-etuuden hinnan ja toteutushinnan suhteesta ja toisaalta myös maturiteetista.

Black-Scholes -mallin yksinkertaisuuden vuoksi mallia käytetään edelleen paljon optiohinnoittelussa, mutta ei suoraan sen alkuperäisessä muodossa. Todettujen ongelmien vuoksi volatilitteetin annetaan vaihdella maturiteetin ja toteutushinnan mukaan. Dumas, Fleming ja Whaley (1998) esittelivät Black-Scholes -mallin, jota myös Christoffersen ja Jacobs (2004a) sekä Barone-Adesi et al (2008) myöhemmin käyttivät ja nimesivät sen PBS -malliksi (*prac-*

titioner black-scholes). Mallissa implisiittinen volatilitteetti otetaan huomioon hinnoittelussa ajamalla ensin lineaarinen regressio useiden eri toteutushintojen ja maturiteettien optioiden hintasarjoille. Estimointimenetelmänä käytetään pienimmän neliösumman menetelmää (*OLS, ordinary least squares*). Tämän jälkeen mallinnetaan sovitettu jakauma (*DVF, deterministic volatility function*), josta valitaan toteutushinta-kohdeindeksin suhteelle ja maturiteetille sopiva volatilitteetti. Tätä käytetään lopulta Black-Scholes mallin volatilitteetti-estimaattorina. Samankaltaista mallia ovat työssään käyttäneet myös Duan ja Zhang (2001), jotka yksinkertaistivat edellistä mallia kategorisoimalla optiot ryhmiin toteutushinnan sekä maturiteetin mukaan ja käyttämällä näitä ryhmiä volatilitteetin valinnassa.

2.3.2 Duan NGARCH

Tutkimuksessa toisena GARCH-prosessiin perustuvana hinnoittelumallina käytetään Duanin (1995) optiohinnoitteluun spesifioimaa Englen ja Ng:n (1993) asymmetristä NGARCH-mallia, jossa volatilitteetti seuraa GARCH(1,1) -prosessia. Duanin GARCH-mallin riskineutraali (*LRNVR, locally risk-neutral valuation relationship*) versio voidaan esittää seuraavasti:

$$\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = r - \frac{1}{2} h_t + \sqrt{h_t} \epsilon_t \quad (10)$$

missä

$$\epsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(0, h_t) \quad (11)$$

ja

$$h_t = \alpha_0 + \beta_1 h_{t-1} + \alpha_1 (\epsilon_{t-1} - \omega)^2, \quad (12)$$

missä S_t on kohdeindeksin hinta hetkenä t , r on vakioinen riskitön korkokanta, h_t on volatilitteetti hetkenä t . Parametrit α_0 , α_1 , β_1 ovat mallin estimoimat vakio, ARCH-termin kerroin ja GARCH-termin kerroin. Parametri ω huomioi vo-

latiliteetin asymmetrisen jakauman ja ϵ_t on normaalijakautunut satunnaisu-
muuttuja.

Option hinta lasketaan kaavan 13 mukaisesti

$$C_t = e^{-r(T-t)} E_t^Q [\max(S_t - K, 0)], \quad (13)$$

missä C_t on option hinta hetkenä t , r on riskitön korkokanta, T on jäljellä oleva juoksuaika ja K on option toteutushinta. Q kuvastaa mallin oletusta estimoidun hinnan riskineutraaliudesta, jolloin hinnan sanotaan olevan Q -martingaali [kts. Duan (1995)]. Kaavan 13 mukaista optiohintaa ei voida ratkaista suoraan analyttisesti, koska tarvittavaa ehdollisen volatiliteetin jakaumaa yli yhden periodin ei ole mahdollista johtaa. Tästä johtuen ratkaisuun joudutaan käyttämään numeerisia menetelmiä, Duanin mallin tapauksessa useimmiten Monte Carlo -simulointia. Mahdollisten S_t hintapolkujen simulointiin käytettiin 5000 simulaatiota, jonka huomattiin olevan raja-arvo, jonka jälkeen määrän lisäys ei enää vaikuta tuloksiin merkittävästi. Samaan havaintoon tulivat tutkimuksessaan Hsieh ja Ritchken (2005).

2.3.3 Heston-Nandi GARCH

Heston ja Nandi (2000) esittelivät oman GARCH-pohjaisen optiohinnoittelumallinsa, joka poikkeaa Duanin mallista sen implementoinnin yksinkertaisuudella, sillä optioiden hintojen laskemiseen ei tarvita simulointia vaan kyseessä on suljettu malli. Mallit ovatkin muutoin hyvin lähellä toisiaan. Heston-Nandi GARCH(1,1) voidaan esittää seuraavasti Duanin mallin tavoin riskineutraalisuudessa muodossa:

$$\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = r - \frac{1}{2} h_t + \sqrt{h_t} \epsilon_t \quad (14)$$

missä

$$\epsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(0, h_t) \quad (15)$$

ja

$$h_t = \alpha_0 + \beta_1 h_{t-1} + \alpha_1 (\epsilon_{t-1} - \omega \sqrt{h_{t-1}})^2, \quad (16)$$

missä S_t on kohdeindeksin hinta aikana t , r on vakioinen riskitön korkokanta, h_t on volatilitteetti aikana t sekä α_0 , β_1 , α_1 ovat mallin estimoimat vakio, ARCH-termin kerroin ja GARCH-termin kerroin. Parametri ω huomioi jälleen volatilitteetin asymmetrian ja ϵ_t on normaalijakautunut satunnaismuuttuja.

Option hinta aikana t ratkaistaan kaavan 16 mukaisesti

$$\begin{aligned} C_t &= e^{-r(T-t)} E_t^Q [\text{Max}(S(T) - K, 0)] \\ &= \frac{1}{2} S_t + \frac{e^{-r(T-t)}}{\pi} \int_0^\infty \text{Re} \left[\frac{K^{-i\phi} f^Q(i\phi + 1)}{i\phi} \right] d\phi \\ &\quad - K e^{-r(T-t)} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re} \left[\frac{K^{-i\phi} f^Q(i\phi)}{i\phi} \right] d\phi \right) \end{aligned} \quad (17)$$

, missä C_t on option hinta, T on option jäljellä oleva juoksuaika, r on riskitön diskonttauskorkokanta ja K on option toteutushinta. Q kuvastaa Duanin mallin tavoin hinnan olevan Q -martingaali eikä näin ollen riippuvainen aiemmista tai tulevista tapahtumista.

2.4 Aikaisemmat tutkimukset

Johdannaisten hinnoittelua ja niihin keskittyviä malleja on tutkittu viimeisten vuosikymmenten aikana huomattavan paljon ja tässä osiossa pyritään tekemään kattava, mutta yleisluontoinen esittely aiheesta tehtyihin tutkimuksiin. Perustavaa laatua olevien tutkimusten lisäksi on ensisijaisesti pyritty keskittymään 2000-luvulla julkaistuihin tutkimuspapereihin.

Tutkimukset ovat osoittaneet, että erilaisilla GARCH-malleilla pystytään mallintamaan volatilitteettia ja hyödyntämään sitä kautta mallien pohjalta luotuja optionhinnoittelumalleja tehokkaasti. Samoin myös stokastiset volatilitteettimallit ovat näyttäneet toimivan optionhintojen ennustuksessa Black-Scholes -mallia

paremmin ja näitä malleja erilaisine variaatioineen käytetään laajalti. Valtaosa optiohinnoitteluun liittyvistä tutkimuksista on toteutettu S&P 500 -indeksin aineistolla sen laajuudesta johtuen. S&P 500 indeksiopiot ovat eniten vaihdettuja optioita, joten käytettävät aineistot sisältävät huomattavan paljon informaatiota. Euroopassa esimerkiksi Saksan markkinoille sijoittuvat tutkimukset ovat yleisiä, mutta pienempien pörssien tutkimukset ovat suhteellisen harvassa. Osasyyn tähän voi olla pienempien pörssien johdannaisten likviditeettiongelmat, joiden vuoksi tutkimuksiin tarvittava aineisto jää ohueksi eikä tulosten pohjalta pystytä vetämään luotettavia johtopäätöksiä hinnoittelumallien toimivuudesta kyseisillä markkinoilla.

2.4.1 Optioiden hinnoittelu ulkomaisilla markkinoilla

Heston (1993) esitteli tutkimuksessaan stokastiseen volatiliteettiin perustuvan mallin, joka huomioi volatiliteetin ja kohde-etuuden hinnan korrelaation. Hestonin malli sisältää itsessään Black-Scholes mallin yhtenä mallin tapauksena ja siksi malli hinnoittelee tasaoptiot lähes identtisesti Black-Scholes mallin kanssa. Hestonin kehittämää mallia on käytetty laajasti erilaisilla variaatioilla, mutta alkuperäisen mallin todettujen hinnoitteluvirheiden vuoksi sitä itseään ei nykyisin käytetä. Hestonin malli on tutkimusten mukaan [esim. Bakshi, Cao ja Chen (1997)] näyttänyt suoriutuvan perinteistä Black-Scholes -mallia paremmin optioiden hinnoittelussa, mutta muun muassa Christoffersen ja Jacobs (2004a) totesivat työssään markkinoilta johdetulla implisiittisellä volatiliteetilla korjatun Black-Scholes -mallin kykenevän ennustamaan optiohintoja Hestonin mallia paremmin, mikäli mallit on spesifioitu oikein. Hestonin mallia on käytetty optiohinnoittelussa paljon sen yksinkertaisuuden vuoksi, sillä tarkasteltavan johdannaisen hinta pystytään laskemaan analyyttisesti ilman monimutkaisempia numeerisia menetelmiä.

Bakshi, Cao ja Chen (1997) vertailivat tutkimuksessaan stokastisia volatiliteettimalleja ja Black-Scholes -mallia lisäämällä aiempiin stokastisiin malleihin stokastisen korkotekijän ja satunnaiset hypyt. Tutkimuksen mukaan stokastiset volatiliteettimallit näyttävät pystyvän ennustamaan paremmin johdannais-

ten hintoja Black-Scholes -malliin verrattuna, mutta stokastisen koron tai sattunnaisten hyppyjen lisääminen malliin ei näyttänyt parantavan mallin käyttöä suojautumistarkoituksessa. Lisätyt stokastiset tekijät näyttivät kuitenkin parantavan mallin sopivuutta otosperiodin ulkopuolella arvioitaessa. Lehar, Scheicher ja Schittenkopf (2002) tutkivat stokastisten volatiliteettimallin ja Black-Scholes -mallin lisäksi myös epälineaarisen asymmetrisen GARCH-mallin hinnoittelueroja. Tutkimustulosten perusteella voitiin todeta GARCH-mallin olevan selvästi molempia vertailumallejaan parempi ennustamaan optiohintoja otosperiodin ulkopuolella tarkasteltaessa. Tulokset ovat linjassa muiden vastaavien tutkimusten kanssa [kts. esim Duan (1995), Härdle ja Hafner (2000), Siu, Tong ja Yang (2004)]. Stokastisen volatiliteettimallin ja Black-Scholes -mallin välillä erot hinnoitteluvirheissä olivat huomattavasti pienemmät.

Heston ja Nandi (2000) tutkivat optiohinnoittelua GARCH ja Black-Scholes -mallien välillä S&P 500 indeksoptioille. Hestonin ja Nandin GARCH-malli on kehitetty vastaamaan Hestonin (1993) esittelemän mallin todettuihin ongelmiin ja mallin voidaankin nähdä sisältävän itsessään alkuperäisen Hestonin mallin. Hestonin mallin tavoin myös Heston-Nandi GARCH-mallin avulla johdannaisten hinta on mahdollista ratkaista analyttisesti. Tämän vuoksi Hestonin stokastista volatiliteettimallia sekä Hestonin ja Nandin GARCH-mallia nimitetään usein suljetuiksi malleiksi (*closed-form*). Hestonin ja Nandin tutkimustulokset osoittivat, että yksinkertainen symmetrinen GARCH-malli suoriutuu selvästi huonommin kuin aktiivisesti päivittyvä Black-Scholes-malli otosperiodin sisällä vertailtaessa ja asymmetrisen jakauman huomioiminen parantaa GARCH-mallin otosperiodin sisäistä sopivuutta huomattavasti. Otosperiodin ulkopuoleista ennustekykä vertailtaessa GARCH-mallit olivat tutkimuksen mukaan parempia kuin Black-Scholes-malli, joskin lyhyen maturiteetin miinusoitot vaikuttivat olevan kaikista vaikeimmin hinnoiteltavissa niin Black-Scholes kuin GARCH-mallillakin. Tulosten perusteella voitiin vahvistaa jo aiemmin huomioitu havainto Black-Scholes -mallin heikkoudesta ennustaa

optiohintoja testiotoksen ulkopuolelta, jonka syyksi tutkimuksessa ehdotettiin mallin ylisovittamista. Christoffersen, Heston ja Jacobs (2004) kehittivät uuden Waldin jakaumaan perustuvan GARCH-mallin, joka sisältää Heston-Nandi GARCH-mallin ja vertailivat näitä keskenään. Tutkimustulokset olivat ristiriitaiset, sillä toisaalta tutkijat pystyivät osoittamaan kehittämänsä mallin toimivan Hestonin ja Nandin mallia paremmin otosperiodin sisällä, mutta huommin otosperiodin ulkopuolella varsinkin pitkillä periodeilla testattuna.

Heston-Nandi GARCH ja Duan GARCH-mallien eroja ovat tutkineet Hsieh & Ritchken (2005), jotka käyttivät työssään S&P 500-indeksioptioaineistoa ja vertasivat GARCH-malleja sekä perinteistä Black-Scholes -mallia keskenään. Tutkimuksen tulokset osoittivat, että GARCH-mallit pystyvät ennustamaan varsinkin toteutushinnaltaan lähellä kohde-etuutta olevien optioiden hintoja paremmin kuin perinteinen Black-Scholes -malli. Heston-Nandi GARCH näyttää puolestaan onnistuvan ennustamisessa Duanin mallia huommin, mikäli toteutushinta on kaukana kohde-etuuden arvosta. Tutkimuksen perusteella Duanin NGARCH näytti toimivan kokonaisuudessaan hyvin varsinkin otoksen sisällä testattuna ja kohtalaisesti myös testiotoksen ulkopuolella. Duanin optiohinnoitteluun kalibroimaa NGARCH-mallia töissään ovat käyttäneet myös Duan & Zhang (2001), jossa tutkittiin Hang Seng -indeksin johdannaisten hinnoittelua Aasian finanssikriisin aikana. Tutkimuksessa päädyttiin Hestonin ja Nandin (2000) kanssa yhtenevään tulokseen GARCH-mallien paremmuudesta verrattuna Black-Scholes -malliin.

Christoffersen & Jacobs (2004b) ovat vertailleet eri GARCH-prosessiin pohjautuvia optiohinnoittelumalleja ja tutkineet, onko mahdollista parantaa ennustustarkkuutta parametreja lisäämällä ja tulivat tulokseen, että kohde-etuuteen liittyvien uutisten asymmetrisen vipuvaikutusten huomiointi parantaa yksinkertaisen mallin ennustustarkkuutta merkittävästi, mutta muiden monimutkaisempien mallien käyttö ei tuo merkittävästi eroa ennustusperiodilla vertailtuna, joskin kaikki ovat yksinkertaista symmetristä mallia tehokkaampia. Otosperiodilla vertailtuna parametrien lisääminen antoi tutkimuksen mukaan pa-

remmat tulokset, mutta ennustusotoksella tarkasteltuna mallin ”yilisovitus” toi mukanaan heikomman ennustetarkkuuden. Kaikkien mallien, symmetristä GARCH-mallia lukuunottamatta, todettiin myös olevan parempia ennustetarkkuudessa verrattuna perinteiseen ja muuttuvan volatiliteetin sallivaan Black-Scholes -malliin. Tutkimuksessa parhaaksi todettu GARCH-malli on lähes identtinen Duanin (1995) esittelemän NGARCH-mallin kanssa.

Christoffersen, Jacobs & Mimouni (2006) ovat vertailleet GARCH- ja stokastisia volatiliteettimalleja keskenään ryhmitellen mallit analyttisesti ratkaistavissa oleviin ja toisaalta numeerisen ratkaisun vaativiin malleihin. Tutkimustulosten mukaan diskreettien Duanin ja Heston-Nandi GARCH -mallien välinen ero näytti olevan pienempi kuin jatkuvien stokastiseen volatiliteettiin perustuvien mallien tapauksessa. GARCH-mallit näyttivät yleisesti suoriutuvan hinnoittelussa stokastisia volatiliteettimalleja paremmin, joskin johtopäätöksiä analyttisten ja numeeristen menetelmien mallien paremmuuden välillä oli ristiriitaisen tulosten perusteella mahdotonta tehdä. Christoffersen & Elkamhi (2010) tutkivat edelleen GARCH-mallien eroja yleistämällä Duanin NGARCH-optionhinnoittelumallin sallimalla epänormaalisti jakautuvat tuotot ja vaihtuvan hinnoitteluriskin. Tulosten mukaan tutkimuksessa kehitetty malli näytti selittävän volatiliteettihymyä vertailussa olleita malleja paremmin ja tarjoaa näin joustavamman mallin vähempine rajoituksineen.

GARCH-mallien ennustetarkkuuksiin heikentävästi vaikuttavista rajoitteista raportoivat niin ikään töissään Christoffersen ja Jacobs (2004b) sekä Barone-Adesi, Engle ja Mancini (2008), jotka laajensivat Duanin GARCH ja GJR-malleja ottamalla hinnoitteluprosessiin mukaan markkinoilta saatavista optiohintatiedoista muodostetun jakauman. Malli huomioi markkinoiden epätehokkuuden käyttämällä erilaista jakaumaa hinnoitteluprosessille ja historialliselle volatiliteetille. Tutkimustulosten mukaan heidän kehittämänsä malli osoittautui Black-Scholes ja GJR-GARCH -malleja paremmaksi selittämään volatiliteetin aikarakennetta ja volatiliteettihymyä.

2.4.2 Optioiden hinnoittelu Suomen markkinoilla

Optiohinnoittelua Suomen markkinoilla on kirjallisuudessa käsitelty suhteellisen vähän. Suoranaisesti mallien väliseen tarkasteluun keskittyneitä tutkimuksia ei viime vuosilta juurikaan löytynyt. Nikkinen (2003) on tutkinut työssään suomalaisten optioiden hinnoittelua vuosilta 1988 – 1998 vertailemalla optioiden hintojen jakaumia perinteisten hinnoittelumallien tarjoamien hintaestimaattien vertailun sijasta. Jakaumien vertailu antaa tarkemman kuvan optiohinnoittelusta perinteisten keskiarvotestien sijasta sen vuoksi, että jakaumien kautta päästään helposti käsiksi tilastollisiin eroihin. Nikkinen tutkimustulosten mukaan myös Suomen optiomarkkinoilla on havaittavissa jakaumien leptokurtisuutta tilastollisten testien perusteella. Toisena huomiona havaittiin pienemmällä markkinoilla oleva suurempi viive uutisten julkistamisen siirtymisessä optiohintoihin suurempiin markkinoihin verrattuna. Tälle syyksi tutkimuksessa ehdotettiin analyytikkojen ja sijoittajaryhmien suurempaa määrää isommilla markkinoilla.

Suomen markkinoilla tehtyjen tutkimusten vähäisestä määrästä johtuen tähän tutkimukseen haluttiin käydä läpi muutama tutkimus Ruotsin markkinoilta. Ruotsin johdannaismarkkinat ovat myös suhteellisen pienet verrattuna suuriin markkinoihin, joten niiden tulokset voivat olla paremmin linjassa Suomen markkinoiden vastaavien kanssa. Muun muassa Engström (2002) on tutkinut työssään volatiliteettihymyn esiintymistä Ruotsin optiomarkkinoilla vuosina 1995 - 1996. Engström käytti tutkimuksessaan optioiden hinnoittelumallina binomipuumallia, jossa volatiliteettina käytettiin implisiittisestä volatiliteetistä johdettuja estimaatteja. Hinnoittelumallin tuloksia verrattiin markkinoilta saataviin todellisiin optiohintoihin sekä toisaalta myös vertailuhintana toimivaan mahdollisimman lähellä toteutushintaa olevan option binomipuumallin mukaiseen hintaan. Tuloksissa havaittiin jälleen selvästi U-mallinen volatiliteettihymy myös Ruotsin optiomarkkinoilla ja todettiin, että tasaoption mukaisella volatiliteetillä ei voida hinnoitella miinus- ja plusoptioita. Toisaalta tutkimustulosten mukaan ei voitu vetää johtopäätöksiä jonkin käytetyn volatiliteettiestimaa-

tin paremmuudesta, sillä eri estimointitavat toimivat eritavoin miinus- ja plusoptioiden kohdalla. Vastaavan tutkimuksen samalla aineistolla vuotta myöhemmin on julkaissut Nordén (2003), jossa vahvistetaan volatilitteettihymyn esiintyminen Ruotsin markkinoilla.

Tehdyn kirjallisuuskatsauksen perusteella voidaan olettaa, että volatilitteettihymyä esiintyy myös pienemmällä, kuten tässä tapauksessa Suomen, optio-markkinoilla. Näin ollen myös lähtökohtaoletuksena on, että isoilla markkinoilla testatut asymmetrian huomioivat hinnoittelumallit toimivat pienemmällä markkinoilla.

3 TUTKIMUSAINEISTO JA -METODOLOGIA

Tässä osiossa esitellään tutkimuksessa käytetty aineisto ja sen tärkeimmät kuvailevat tunnusluvut sekä aiemmassa kappaleessa esitettyjen teorioiden pohjalta muodostetut mallit ja niiden käyttö tutkimuksessa. Tutkimuksen teos- sa käytetyt ohjelmistot on esitelty tutkimuksen liitteessä 1.

3.1 Aineisto

Tutkimuksessa käytetään OMX Helsinki -pörssissä noteerattuja Nordean liikkeellelaskemia OMXH25 indeksiä seuraavien useiden eri toteutushintaisten ja eri maturiteettisten warranttien päivän päätöskursseja vuosilta 2009–2011. Tutkimuksessa käytettävä warranttiaineisto on saatu Nasdaq OMX:ltä. Warranttiaineiston lisäksi GARCH-malleja varten kerättiin OMX Helsinki 25 -indeksin päivittäinen hinta-aikasarja vuosilta 2007-2011, jota käytettiin GARCH-mallien kalibroimiseen. Riskittömänä korkokantana käytettiin Euribor-korkoa, jonka pituus määritettiin kulloisenkin maturiteetin mukaan. Tutkimuksen kaikissa malleissa ja laskelmissa oletettiin vuodessa olevan 365 päivää.

Aineistosta karsittiin aluksi pois sellaiset warranttisarjat, joita ei ollut vaihdettu lainkaan. Samalla poistettiin myös alle 10 päivän maturiteetin sekä yli 360 päivän maturiteetin havainnot. Samoin poistettiin myös sellaiset havainnot, jonka markkinatakaajan osto- ja myyntitarjoukset eivät olleet tiedossa. Työssä lopulta käytetty aineisto koostuu 337 OMX 25 Helsinki -ostowarrantin viikoittaisesta havainnosta. Havaintopäiväksi päätettiin valita keskiviikko tai pörssin kiinni ollessa lähin kaupankäyntipäivä. Tässä tapauksessa ensisijaisena datanlähteenä toimivat torstaipäivät. Mikäli torstaikaan ei ollut kaupankäyntipäivä, käytettiin tiistaipäivän arvoja. Keskiviikko valittiin päiväksi sen vuoksi, että sillä pyrittiin karsimaan pois mahdolliset viikonpäiväanomaliat. Näin on menetelty useissa tutkimuksissa, joissa option hintasarjoja on käytetty [kts. Christoffersen & Jacobs (2004b); Hsieh & Ritchken (2005); Duan & Zhang (2001); Heston & Nandi (2000); Barone et al. (2008)]. Lopullinen aineisto on tarkemmin aikaväliltä 11.2.2009–28.12.2011. Warranttien hintoina on tarkasteltu markkinatakaajan osto- ja myyntitarjousten (*bid-ask*) keskiarvoa, koska var-

sinkin pitkien maturiteettien ja vahvojen miinuswarranttien kaupankäynti on usein ohutta eivätkä viimeisimmät päätöskurssit kuvasta luotettavasti markkinoiden näkemystä hinnasta.

Käytettävä aineisto jaettiin yhteensä kuuteen osaan siten, että jokaisen kolmen vuoden ensimmäiset kuusi kuukautta ovat testiaineistoa ja kuusi jälkimmäistä puolestaan ennustusaineistoa. Tästä lähtien tutkielmassa käytetään nimitystä testiotos vuosien ensimmäisistä kuudesta kuukaudesta ja nimitystä ennustusotos jälkimmäisten kuuden kuukauden osalta. Aineisto kategorisoi- tiin tutkimusta varten mukaillen Englen ja Ng:n (1993) tutkimusta.

Warrantit jaettiin maturiteetin mukaan neljään kategoriaan sekä neljään kategoriaan indeksin arvon ja warrantin toteutushinnan suhteen mukaan seuraavasti:

Taulukko 1: Warrantiaineiston kategorisointi

Kategorian nimi	Maturiteetti (DTM)	Kategorian nimi	Indeksin arvo / Toteutushinta (S/X)
Hyvin lyhyt maturiteetti	10 - 60	Vahva miinusoptio	< 0,85
Lyhyt maturiteetti	61 - 120	Miinusoptio	0,85 - 0,95
Keskipitkä maturiteetti	121 - 180	Tasaoptio	0,95 - 1,05
Pitkä maturiteetti	181 - 360	Plusoptio	1,05 <

DTM = jäljellä oleva juoksuaika päivinä (*days to maturity*) ja S/X = Kohde-etuusindeksin arvo / Warrantin toteutushinta (*spot / exercise*).

Taulukossa 2 on kuvattu käytetyn aineiston tärkeimmät kuvailevat tunnusluvut ryhmittäin. Kaikki esitetyt luvut on laskettu koko aineistolle vuosilta 2009-2011 sisältäen testiotoksen sekä ennustusotoksen.

Taulukko 2: OMXH 25 warranttiaineiston kuvailevat tunnusluvut

Taulukossa on kuvattu tutkimuksessa käytettyjen OMX Helsinki 25 ostowarranttien tietoja vuosilta 2009-2011 seuraavasti: DTM (*days to maturity*) on jäljellä oleva juoksuaika ja S/X on indeksin arvon ja warrantin toteutushinnan suhde. Paneelissa A on kuvattu kuhunkin ryhmään jääneiden warranttien lukumäärä, paneelissa B on kuvattu osto- ja myyntinoteerausten keskiarvot ja paneelissa C Black-Scholes kaavasta johdetut implisiittisten volatiliteettien keskiarvot.

Paneeli A: Ostowarranttien lukumäärä (kpl)

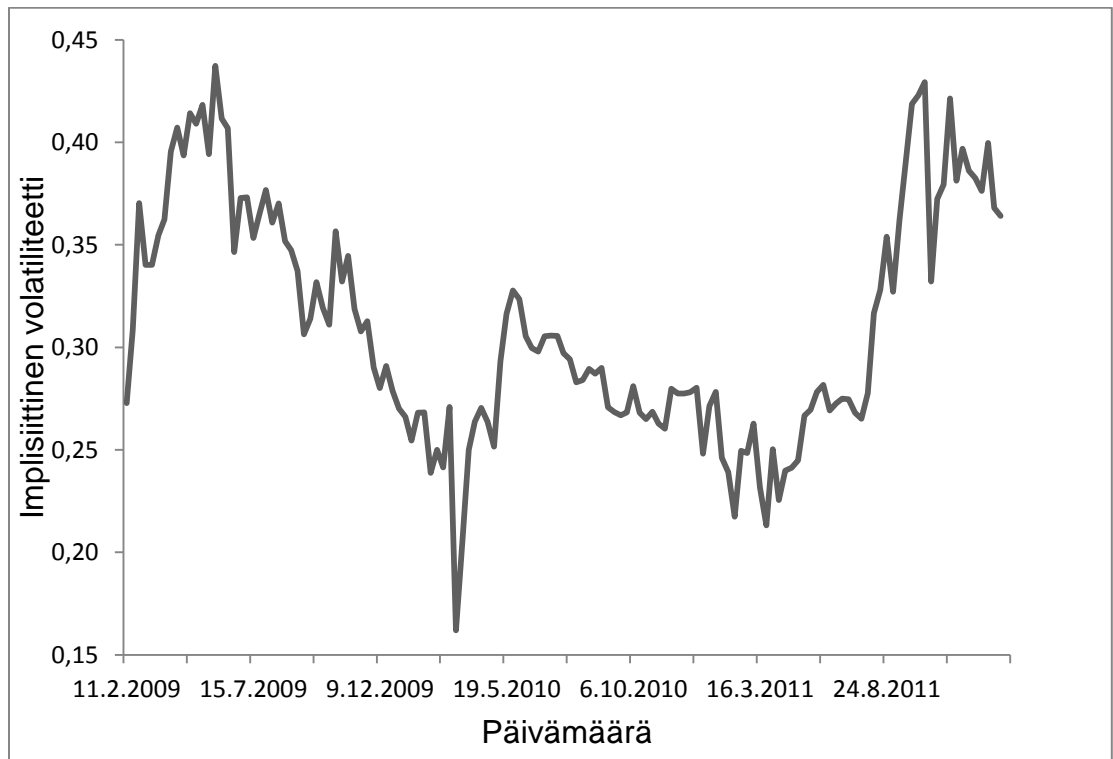
	10 < DTM < 60	60 < DTM < 120	120 < DTM < 180	180 < DTM < 360	Yhteensä
S/X < 0,85	8	24	14	12	58
0,85 < S/X < 0,95	32	38	20	23	113
0,95 < S/X < 1,05	62	41	21	9	133
1,05 < S/X < 1,15	18	12	1	2	33
Yhteensä	120	115	56	46	337

Paneeli B: Ostowarranteista johdetun implisiittisen volatiliteetin keskiarvot

	10 < DTM < 60	60 < DTM < 120	120 < DTM < 180	180 < DTM < 360	Kaikki
S/X < 0,85	0,3640	0,3391	0,2937	0,3317	0,3300
0,85 < S/X < 0,95	0,3373	0,3052	0,3130	0,3101	0,3167
0,95 < S/X < 1,05	0,3341	0,3071	0,2780	0,2823	0,3134
1,05 < S/X < 1,15	0,3468	0,2901	0,2729	0,2370	0,3173
Kaikki	0,3389	0,3114	0,2943	0,3071	0,3177

Taulukon 2 paneelista A voidaan nähdä, että warranttisopimukset jakaantuvat suhteellisen tasaisesti ryhmien kesken poislukien pluswarranttien pitkien maturiteettien sopimukset. Paneelissa B on kuvattu ostowarranteista Black-Scholes kaavan avulla johdetut implisiittisten volatiliteettien ryhmäkohtaiset keskiarvot. Ryhmissä on havaittavissa implisiittisen volatiliteetin vaihtelevan niin toteutushinnan kuin maturiteetinkin mukaan, ja yleisesti havaittu volatiliteettihiymy vaikuttaa esiintyvän myös OMX Helsinki 25 -warrantin aineistosta johdettuna eritoten lyhyillä maturiteeteilla. Maturiteetin pidentyessä myös volatiliteetit näyttävät laskevan kaikissa ryhmissä poislukien vahvoissa miinuswarranteissa pitkien maturiteettien kohdalla, mikä on linjassa aiempien tutkimusten havaintojen kanssa.

Kuvassa 1 on esitetty OMXH 25 -ostowarrantin implisiittisen volatiliteetin viikoittaiset keskiarvot kaikilta 337 havainnolta laskettuna.



Kuva 1: OMXH 25 -ostowarranteista johdetun implisiittisen volatiliteetin viikoittaiset keskiarvot.

Kuten kuvasta 1 voidaan nähdä, vaikuttaa implisiittisen volatiliteetin taso vaihdelleen vuosittain suhteellisen paljon. Aineisto vaikuttaa myös suhteellisen luotettavalta eikä suurempia outlier-havaintoja ole yhtä, vuoden 2010 maaliskuun havaintoa lukuunottamatta havaittavissa.

3.2 Black-Scholes -malli

Ensimmäinen tutkimuksessa käytettävä malli on perinteisen Black-Scholes -mallin muunnos, johon syötetään historiallisen volatiliteetin sijasta maturiteetin ja toteutushinnan suhteen mukaan muuttuva volatiliteetti. Käytettävä malli on esitelty Christofersenin ja Jacobsin (2004a) tutkimuksessa ja se pohjautuu Dumas, Fleming ja Whaley (1998) esittelemään yleiseen malliin implisiittistä volatiliteettifunktioista (Christoffersen & Jacobs, 2004a). Mallissa käytetään testiotoksesta laskettuja optiokohtaisia implisiittisiä volatiliteetteja, jotka

regressoidaan käyttämällä pienimmän neliösumman menetelmää. Näiden saatujen tulosten mukaan estimoitiin kulloiseenkin tilanteeseen sopiva volatiliiteettiestimaatti lineaarisen regression tulosten pohjalta. Käytetty lineaarinen regressio voidaan esittää seuraavasti

$$\sigma_{iv} = \theta_0 + \theta_1 X + \theta_2 X^2 + \theta_3 T + \theta_4 T^2 + \theta_5 XT + \epsilon, \quad (18)$$

missä σ_{iv} on implisiittinen volatiliiteetti, $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ ja θ_5 ovat estimoitavat parameterit, X on kohde-etuuden hinnan ja warrantin toteutushinnan suhde sekä T on jäljellä oleva juoksuaika vuosina sekä ϵ on mallin jäännöstermi.

Black-Scholes -mallia varten ajettiin kolme erillistä regressiota vuosittain. Regressiot ajettiin vuosien ensimmäisten kuuden kuukauden aineistoilla, joka aiemmin nimettiin yleisesti testiaineistoksi. Kaikkiin regressiomalleihin jäi suunnilleen saman verran havaintoja. Malleja testattiin myös siten, että regressioon otettiin mukaan kaikki aikaisemmat havainnot vuoden puolestavälisestä taaksepäin. Näin meneteltynä viimeisen vuoden mallin selitysaste jäi kuitenkin niin alhaiseksi, että päätettiin valita kaikkiin malleihin ainoastaan puolen vuoden taaksepäin katsova periodi. Tämän todettiin olevan tehokkain tapa estimoida volatiliiteettia tulevaisuuteen. Regressioyhtälöiden korjatut selitysasteet olivat välillä 0,26 - 0,36 ja ne olivat alimmillaan viimeisenä vuonna. Tarkemmat tulokset regressioyhtälöistä on esitelty liitteessä 2.

3.3 GARCH-mallit

Seuraavaksi esitellään tutkimuksessa käytettävät GARCH-mallit, joiden mukaan optioiden hintoja pyrittiin ennustamaan. GARCH-mallien käyttöä varten tutkitaan ensin, soveltuuko käytettävä aineisto mallien käytettäväksi, toisin sanoen onko aineistossa havaittavissa ARCH-efektiä ts. volatiliiteettien klusteroitumista.

ARCH-efektien testaukseen käytetään Englen (1982) esittelemää mallia, jossa aikasarjalle ajetaan lineaarinen regressio ja tallennetaan estimoidun mallin

jäännöstermit. Toisessa vaiheessa tallennetut jäännöstermit neliöidään ja muodostetaan regressioyhtälö valittujen viiveiden (q) mukaisesti. Toisen regression tuloksista tulkitaan mallin selitysasetta, josta saadaan havaintojen lukumäärällä kertomalla tarvittava X^2 -jakautunut testisuure TR^2 . Käytetyn Lagrange multiplier -testin nollahypoteesin mukaan kaikkien neliöityjen jäännöstermien autokorrelaatio on nolla. ARCH-testin tulokset tutkimuksessa käytetylle aineistolle on esitelty taulukossa 3, joka osoittaa, että käytettävä OMXH 25 -aineisto soveltuu hyvin GARCH-mallinnukseen, sillä kaikkien seitsemän eri viiveen testisuureet ovat vahvasti tilastollisesti merkitseviä ja näin ollen nollahypoteesi hylätään. Testin perusteella aineistossa on siis havaittavissa volatilitteettien klusteroitumista.

Taulukko 3: ARCH efektien testaus

Taulukossa on esitetty Lagrange multiplier -testiarvot OMXH 25 -tuottoindeksistä lasketuna ajalta 2.1.2007 - 30.12.2011. Havaintoja yhteensä 1258 kpl. Arvot on laskettu 1 - 7 päivän viiveille (q).

(q)	1	2	3	4	5	6	7
TR^2 ^(a)	12,676	60,661	90,037	94,757	166,941	177,917	179,468
p-arvo	0,001	< 0,000	< 0,000	< 0,000	< 0,000	< 0,000	< 0,000

^(a) arvot $\chi^2(q)$ jakautuneita

3.3.1 GARCH-mallien parametrien estimointi

Tutkimuksessa käytettävien GARCH-mallien molemmista versioista käytettiin yhden viiveen versiota. Estimointiin käytettiin maximum likelihood estimation (MLE) -menetelmää. Parametrit estimoitiin kaikille kolmelle vuodelle erikseen siten, että vuoden 2009 kohdalla käytettiin OMXH 25 -indeksin hintasarjaa ajalta 2.1.2007-30.6.2009, vuoden 2010 aikasarja muodostui 2.1.2008-30.6.2010 väliseltä ajalta sekä viimeisen vuoden 2011 aikasarja muodostui 2.1.2009-30.6.2011 väliseltä ajalta. Taulukossa 4 on kuvattu molempien mallien parametriestimaatit vuosittain, minkä lisäksi on raportoitu myös annualisoitu volatilitteetti sekä log-likelihood funktioiden arvot. Riskitön korko määritettiin molemmille malleille nollassi, koska sen katsottiin vaikuttavan tuloksiin hyvin marginaalisesti. Näin menetteli myös Duan (1995) huomioiden samalla,

että näin menetellessä miinus- ja plusoptioiden hintojen tulkinta on helpompaa.

Taulukko 4: GARCH-mallien parametriestimaatit

GARCH-mallien maximum likelihood -estimaatit OMXH25 -indeksistä estimoituna. Käytetty aikasarja on vuosilta 2007-2011.

Vuosi	Havainnot	α_0	α_1	β	ω	θ	LL
Paneeli A: Heston-Nandi GARCH							
2009	622	<0,000	1,75E-06	0,6684	430,2640	24,0 %	3206,1
2010	623	<0,000	2,33E-06	0,7795	300,6878	23,9 %	4546,7
2011	625	<0,000	1,89E-06	0,7757	337,5311	22,9 %	5961,2

Vuosittaiset maximum likelihood -estimaatit ($\alpha_0, \alpha_1, \beta, \omega$) sekä annualisoitu stationaarinen volatilitteetti (θ) Heston-Nandi GARCH (1,1) -mallille:

$$\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = r - \frac{1}{2} h_t + \sqrt{h_t} \epsilon_t,$$

$$h_t = \alpha_0 + \beta_1 h_{t-1} + \alpha_1 (\epsilon_{t-1} - \omega \sqrt{h_{t-1}})^2$$

Vuosi	Havainnot	α_0	α_1	β	ω	θ	LL
Paneeli B: Duan GARCH							
2009	622	5,56E-06	0,0989	0,8685	0,4593	34,6 %	1645,1
2010	623	3,72E-06	0,0113	0,9770	-0,0106	28,3 %	1561,9
2011	625	3,42E-06	0,0804	0,9056	0,0153	24,8 %	1765,2

Vuosittaiset maximum likelihood -estimaatit ($\alpha_0, \alpha_1, \beta, \omega$) sekä annualisoitu stationaarinen volatilitteetti (θ) Duan GARCH (1,1) -mallille:

$$\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = r - \frac{1}{2} h_t + \sqrt{h_t} \epsilon_t,$$

$$h_t = \alpha_0 + \beta_1 h_{t-1} + \alpha_1 (\epsilon_{t-1} - \omega)^2$$

LL=Log-Likelihood

Taulukon silmämääräisen tarkastelun perusteella voidaan huomata Heston-Nandi -mallin annualisoidun stationaarisen volatilitteetin olevan kaikkien vuosien kohdalla Duanin mallin vastaavia pienempi. Log-likelihood funktion arvot vaihtelevat vuosittain suhteellisen paljon varsinkin Heston-Nandi -mallin osalta suurimman, vuoden 2011 log-likelihood arvon ollessa miltei kaksinkertainen vuoden 2009 arvoon verrattuna. Log-likelihood-arvoja ei ole mielekästä vertailla mallien kesken, mutta tulosten perusteella voidaan olettaa Heston-

Nandi -mallin ennustetarkkuuden paranevan vuoden 2011 osalta suhteessa aiempiin vuosiin.

3.4 Mallien vertailu

Tutkimuksen tarkoituksena on vertailla erilaisten hinnoittelumallien avulla es- timoituja hintoja markkinoilta havainnoitujen hintojen kanssa ja pyrkiä teke- mään hinnoitteluvirheiden perusteella johtopäätöksiä käytettyjen mallien toi- mivuudesta. Christoffersen ja Jacobs (2004a) ovat tutkineet yleisesti käytetty- jen menetelmien vaikutuksia hinnoittelumallien vertailujen tuloksiin ja totea- vat, että menetelmän valinnan merkitys mallien testaukseen on aiemmissa tutkimuksissa tiedostettu. Monet tutkimukset käyttävät kuitenkin mallien esti- moinnissa ja mallien välisessä vertailussa eri funktioita keskiarvojen vertai- luun, mikä voi Christoffersenin ja Jacobsin mukaan antaa harhaisia ja jopa vääriä tuloksia mallien paremmuudesta. Heidän tutkimuksensa tarkoitus ei ollut arvioida käytettyjen keskiarvotestien eroja, vaan huomioida, että käytet- tyjen testien tulee olla linjassa kaikkien tarkasteltavien mallien kesken niin estimointi- kuin vertailuvaiheessakin.

Tässä tutkimuksessa käytetyt virhefunktiot eivät ole yhtenevät mallien kes- ken, mikä on otettava huomioon tuloksia arvioitaessa. Mallien välisiä eroja vertaillaan ensin käyttämällä prosentuaalisia RMSE (*root mean squared error*) -virheitä, jota käyttivät tutkimuksessaan myös Heston ja Nandi (2000), Chris- toffersen et al. (2006) sekä Engström (2002). RMSE-virheiden ongelmaksi muodostuu hinnoitteluvirheen neliöinnistä johtuva suunnan menetys. RMSE- virhe ei täten paljasta, ovatko mallit hinnoitelleet optiot alle vai yli markkina- hinnan. Tämän takia toisena hinnoitteluvirhettä kuvaavana menetelmänä käy- tetään prosentuaalisia hinnoitteluvirheitä ja niiden pohjalta piirrettyjä box- whisker -laatikkokuvaajia.

4 TULOKSET

Tutkimuksen neljännessä osiossa esitellään saadut tutkimustulokset siten, että ensin käydään läpi eri mallien prosentuaaliset RMSE-hinnoitteluvirheet testiotoksen sisältä laskettuna, minkä jälkeen keskitytään ennustusotoksesta laskettujen RMSE-hinnoitteluvirheiden tarkasteluun. Tämän jälkeen jatketaan yksinkertaisten prosentuaalisten hinnoitteluvirheiden tulkitsemiseen Box-whisker -laatikkokuvaajista, joiden perusteella pyritään vetämään johtopäätöksiä mallien ali- tai ylihinnoittelusta.

4.1 RMSE-hinnoitteluvirheet testiotoksessa

Ensimmäisenä tarkastellaan prosentuaalisia RMSE-hinnoitteluvirheitä testiotoksen sisältä laskettuna. On oletettavaa, että implisiittisellä volatiliteetilla oikaistu Black-Scholes -malli suoriutuu testiotoksen sisällä molempia GARCH-malleja paremmin, sillä implisiittinen volatiliteetti on johdettu nimenomaan Black-Scholes -mallin kautta ja käytettävä volatiliteetti on tasoitettu regression avulla. Tällaisiin tuloksiin ovat päätyneet myös monet aiemmat tutkimukset aiheesta.

4.1.1 Hinnoitteluvirheet koko periodilla

Hinnoitteluvirheet koko periodilta 2009 - 2011 yhteisesti tarkasteltuna näyttivät vaihtelevan mallien välillä huomattavasti. Taulukossa 5 on esitelty neliöityjen prosentuaalisten hinnoitteluvirheiden neliöjuuret (%-RMSE) kaikille kolmelle mallille. Hinnoitteluvirheet on laskettu eri maturiteettien sekä indeksin ja warrantin toteutushinnan suhteen mukaisille ryhmille.

Taulukko 5: %-RMSE-hinnoitteluvirheet koko testiotokselle

Hinnoitteluvirheet on laskettu 2009-2011 vuosien ensimmäisten 6 kk:n ajalta. Mallien estimoituja hintoja on verrattu warranttimarkkinoilta havainnoituihin bid-ask -keskiarvohintoihin. Hinnoitteluvirheiden laskemiseen on käytetty prosentuaalista RMSE (*root-mean-squared-error*) funktiota. DTM (*days to maturity*) kuvaa warrantin jäljellä olevaa juoksuaikaa ja S/X (*Spot to exercise*) kuvaa kohde-etuuden ja warrantin toteutushinnan suhdetta.

	Black-Scholes (%)	HN GARCH (%)	Duan GARCH (%)	Havainnot (kpl)
10 < DTM < 60	12,4	37,3	30,0	42
60 < DTM < 120	19,1	55,7	30,8	41
120 < DTM < 180	14,0	46,5	30,5	22
180 < DTM < 360	15,7	56,0	40,6	36
S/X < 0,85	20,3	87,3	49,6	17
0,85 < S/X < 0,95	20,4	56,1	41,9	49
0,95 < S/X < 1,05	10,7	30,6	20,1	60
1,05 < S/X < 1,15	5,5	20,3	16,7	15
Yhteensä	15,7	49,5	33,3	141

Taulukosta 5 nähdään, että Black-Scholes -mallin hinnoitteluvirheet näyttävät olevan pienimmät sekä keskimäärin että kaikissa ryhmissä yksittäinkin vaihteluvälillä 5,5 %-20,4 %. Eri maturiteettien välillä ei vaikuta olevan merkittäviä eroja, mutta eri toteutushintaisten warranttien välillä huomataan, että pluswarranttien ja tasawarranttien kohdalla hinnoitteluvirheet ovat selvästi pienempiä kuin miinuswarranttien kohdalla.

GARCH-malleista paremmin otosperiodin sisällä vertailtaessa näytti selviytyvän Duanin malli, jonka hinnoitteluvirhe kaikissa ryhmissä oli keskimäärin 33,3 % vaihteluvälillä 16,7 %-49,6 %. Maturiteetin mukaan vertailtaessa kolme ensimmäistä ryhmää 10 päivästä 180 päivään näyttää antavan hinnoitteluvirheeksi noin 30 prosenttia ja ainoastaan viimeisen ryhmän, yli 180 päivän maturiteetin warranttien hinnoitteluvirheet hyppäävät 40,6 prosenttiin. Toteutushinnan mukaan Duanin mallin ennustetarkkuus näyttää heikkenevän tassaisesti miinuswarrantteihin päin mentäessä vaihteluvälillä 16,7 %-49,6 %.

Heston-Nandi GARCH-malli suoriutui testiotoksen sisäisen vertailussa heikoimmin sen keskimääräisen hinnoitteluvirheen ollessa 49,5 % vaihteluvälillä 20,3 %-87,3 %. Hestonin ja Nandin mallin estimoimat hinnat näyttävät muuttuvan tasaisesti epätarkemmiksi sekä maturiteetin kasvaessa että miinuswarrantteihin päin mentäessä.

Black-Scholes malli näyttää olevan koko periodin testiotoksen sisäisessä tarkastelussa ylivoimainen GARCH-malleihin nähden sen suurimmankin (20,4 %) hinnoitteluvirheen ollessa jotakuinkin yhtä suuri kuin Hestonin ja Nandin mallin pienin (20,3 %) hinnoitteluvirhe.

4.1.2 Hinnoitteluvirheet vuosittain

Seuraavaksi käydään läpi aiemman kappaleen mukaiset testiotoksen hinnoitteluvirheet vuosittain. Taulukoissa 6, 7 ja 8 on esitelty vuosien 2009-2011 prosentuaaliset RMSE-hinnoitteluvirheet kaikille kolmelle mallille.

Taulukko 6: %-RMSE-hinnoitteluvirheet testiotoksen vuodelle 2009

Hinnoitteluvirheet on laskettu vuoden 2009 ensimmäisten 6 kk:n ajalta. Mallien estimoimia hintoja on verrattu warranttmarkkinoilta havainnoituihin bid-ask -keskiarvohintoihin. Hinnoitteluvirheiden laskemiseen on käytetty prosentuaalista RMSE (*root-mean-squared-error*) funktiota. DTM (*days to maturity*) kuvaa warrantin jäljellä olevaa juoksuaikaa ja S/X (*Spot to exercise*) kuvaa kohde-etuuden ja warrantin toteutushinnan suhdetta.

	Black-Scholes (%)	HN GARCH (%)	Duan GARCH (%)	Havainnot (kpl)
10 < DTM < 60	1,6	24,5	11,0	12
60 < DTM < 120	13,9	68,6	18,5	17
120 < DTM < 180	16,4	53,9	21,9	6
180 < DTM < 360	12,7	64,4	17,9	10
S/X < 0,85	16,9	90,9	24,6	11
0,85 < S/X < 0,95	13,1	55,2	17,1	14
0,95 < S/X < 1,05	7,5	29,3	12,4	14
1,05 < S/X < 1,15	6,0	9,3	8,8	6
Yhteensä	12,0	57,0	17,2	45

Kuten taulukosta 6 nähdään, vuoden 2009 kohdalla Black-Scholes mallin hinnoitteluvirheet ovat pienimpiä koko aineiston keskiarvon ollessa 12,0 prosenttia. Duanin GARCH-malli näyttää suoriutuvan myös varsin hyvin keskimääräisen hinnoitteluvirheen ollessa 17,2 prosenttia. Heston-Nandi GARCH-malli oli selvästi heikoin keskimääräisen virheen ollessa 57,0 prosenttia.

Kaikki mallit näyttävät pystyvän hinnoittelemaan pluswarrantteja jokseenkin yhtä tehokkaasti ja huomattavan pienellä virheellä kaikkien mallien hinnoitteluvirheen jäädessä alle 10 prosenttiin. Black-Scholes -mallin tarkkuus heikkenee vähiten tarkastelujaksolla miinuswarrantteihin päin mentäessä vahvan miinuswarrantin hinnoitteluvirheen jäädessä 16,9 prosenttiin. Duanin GARCH-malli suoriutuu myös kohtalaisesti eri toteutushintaisten warranttien hinnoittelusta vahvan miinuswarrantin hinnoitteluvirheen jäädessä 24,6 prosenttiin. Sen sijaan Hestonin ja Nandin mallin tarkkuus heikkenee huomattavasti miinuswarrantteihin päin siirryttäessä vahvan miinuswarrantin virheen ollessa yli 90 prosenttia.

Maturiteetin mukaan vertailtaessa nähdään, että Black-Scholes mallin mukaiset hinnat hyvin lyhyillä maturiteeteilla (10 - 60 päivää) ovat lähellä oikeaa hinnoitteluvirheen ollessa ainoastaan 1,6 prosenttia. Myös molemmat GARCH-mallit hinnoittelevat lyhyen maturiteetin warrantit tehokkaimmin. Hestonin ja Nandin malli vaikuttaa olevan jälleen huomattavasti kahta muuta mallia epätarkempi pidempiin maturiteetteihin päin mentäessä.

Taulukossa 7 on esitelty vastaavasti vuoden 2010 hinnoitteluvirheet eri ryhmittäin.

Taulukko 7: %-RMSE-hinnoitteluvirheet testiotoksen vuodelle 2010

Hinnoitteluvirheet on laskettu vuoden 2010 ensimmäisten 6 kk:n ajalta. Mallien estimoimia hintoja on verrattu warranttimarkkinoilta havainnoituihin bid-ask -keskiarvohintoihin. Hinnoitteluvirheiden laskemiseen on käytetty prosentuaalista RMSE (*root-mean-squared-error*) funktiota. DTM (*days to maturity*) kuvaa warrantin jäljellä olevaa juoksuaikaa ja S/X (*Spot to exercise*) kuvaa kohde-etuuden ja warrantin toteutushinnan suhdetta.

	Black-Scholes (%)	HN GARCH (%)	Duan GARCH (%)	Havainnot (kpl)
10 < DTM < 60	18,3	41,6	31,3	14
60 < DTM < 120	15,2	36,3	28,7	10
120 < DTM < 180	12,9	43,4	33,1	16
180 < DTM < 360	21,5	67,5	60,4	15
S/X < 0,85	25,4	80,3	76,6	6
0,85 < S/X < 0,95	18,9	52,4	42,4	20
0,95 < S/X < 1,05	14,2	37,1	26,9	27
1,05 < S/X < 1,15	10,4	51,4	42,2	2
Yhteensä	17,4	49,7	41,4	55

Taulukosta 7 voidaan havaita, että Black-Scholes malli on jälleen vertailun paras keskimääräisen hinnoitteluvirheen ollessa 17,4 prosenttia vaihteluvälillä 10,4 %-25,4 %. Vuoden 2010 vertailussa GARCH-mallit ovat lähempänä toisiaan Duanin mallin keskimääräisen virheen ollessa 41,4 prosenttia ja Heston-Nandi mallin 49,7 prosenttia.

Samoin kuin vuonna 2009 myös vuonna 2010 näyttävät mallit olleen tehokkaimpia pluswarranttien kohdalla ja mallien ennustetarkkuus näyttää heikenevän miinuswarrantteihin päin mentäessä. Maturiteetin mukaan vertailtaessa vaikuttaa siltä, että Black-Scholes -malli voittaa molemmat GARCH-mallit kaikissa ryhmissä. Vertailtaessa vuoden 2010 tuloksia edellisen vuoden tuloksiin voidaan todeta, että hinnoitteluvirheet ovat vuonna 2010 systemaattisesti suurempia kaikilla malleilla ja varsinkin Duanin malli näyttää suoriutuneen huomattavan heikosti vuoteen 2009 verrattuna. Vuoden 2010 tulokset eivät myöskään noudata koko periodin yhteistä eikä vuoden 2009 linjaa, jossa en-

nustusvireet kasvoivat tasaisesti maturiteetin pidentyessä tai miinuswarrantteihin päin mentäessä. Osan tuloksista voi selittää havaintojen epätasainen jakautuminen, sillä esimerkiksi vuonna 2010 pluswarrantteja on tarkastelussa ainoastaan kaksi kappaletta. Vaikka tulokset ovatkin jokseenkin epä johdonmukaisia, on niiden kokonaiskuva kuitenkin linjassa aikaisemman vuoden tulosten kanssa.

Viimeisessä testiotosvertailussa käytiin läpi vielä vuoden 2011 hinnoitteluvirheet kaikille kolmelle mallille. Tulokset on esitelty taulukossa 8 vastaavasti kuin aiemmissakin taulukoissa.

Taulukko 8: %-RMSE-hinnoitteluvirheet testiotoksen vuodelle 2011

Hinnoitteluvirheet on laskettu vuoden 2011 ensimmäisten 6 kk:n ajalta. Mallien estimoimia hintoja on verrattu warranttimarkkinoilta havainnoituihin bid-ask -keskiarvohintoihin. Hinnoitteluvirheiden laskemiseen on käytetty prosentuaalista RMSE (*root-mean-squared-error*) funktiota. DTM (*days to maturity*) kuvaa warrantin jäljellä olevaa juoksuaikaa ja S/X (*Spot to exercise*) kuvaa kohde-etuuden ja warrantin toteutushinnan suhdetta.

	Black-Scholes (%)	HN GARCH (%)	Duan GARCH (%)	Havainnot (kpl)
10 < DTM < 60	10,3	41,1	37,6	16
60 < DTM < 120	26,0	49,2	42,1	14
120 < DTM < 180				0
180 < DTM < 360	5,5	16,2	11,1	11
S/X < 0,85				0
0,85 < S/X < 0,95	26,9	61,3	55,4	15
0,95 < S/X < 1,05	5,8	19,4	11,7	19
1,05 < S/X < 1,15	1,6	7,6	4,7	7
Yhteensä	16,7	39,5	34,5	41

Taulukosta 8 nähdään, että vuoden 2011 kohdalla Black-Scholes -mallin koko aineiston mukainen hinnoitteluvirhe, 16,7 prosenttia, on jälleen vertailun pienin vaihteluvälillä 1,6 %-26,9 %. Myös GARCH-mallien järjestys on aiempien tulosten mukainen Duanin mallin koko aineiston virheen ollessa keskimäärin 34,5 prosenttia ja Heston-Nandi mallin 39,5 prosenttia.

Vuoden 2011 testiotosaineisto on rikkonaisempi kuin aiempien kahden vuoden aineistot, sillä 120 - 180 päivän maturiteettiryhmään ei jäänyt yhtään warranttia, kuten ei myöskään vahvojen miinuswarranttien ryhmään. Jäljelle jääneiden ryhmien välillä havainnot jakautuivat kuitenkin suhteellisen tasaisesti. Toteutushinnan mukaan vertailtaessa tulokset ovat aikaisempien vuosien kaltaisia hinnoitteluvirheen kasvaessa pluswarrantteista miinuswarrantteihin päin mentäessä. Black-Scholes -mallin pluswarrantin hinnoitteluvirhe on jälleen vertailun pienin jääden ainoastaan 1,6 prosenttiin. Myös GARCH-mallien virheet ovat pieniä Duanin mallin virheen ollessa 4,7 prosenttia ja Heston-Nandin mallin 7,6 prosenttia vastaavasti. Taulukosta voidaan myös nähdä, että kaikkien mallien hinnoitteluvirheet myös tasawarranttien tapauksessa jäävät aiempia vuosia pienemmiksi ja varsinkin Black-Scholes mallin virhe on huomattavan pieni, 5,8 prosenttia. Miinuswarranttien kohdalla Black-Scholes -mallin virhe on vielä kohtuullinen sen jäädessä 26,9 prosenttiin, mutta GARCH-mallien virheet hyppäävät molemmat reilusti yli 50,0 prosentin.

Maturiteettiryhmien välinen vertailu vuoden 2011 testiotosaineistolla näyttää olevan merkittävästi erilainen vuosien 2009 ja 2010 vastaavan kanssa, sillä kaikki mallit näyttävät onnistuneen hinnoittelussa parhaiten yli 180 päivän maturiteetin warranttien kohdalla. Tämä voi johtua warranttimarkkinoilla tapahtuneista muutoksista kohde-etuusindeksin kurssin laskiessa voimakkaasti vuonna 2011. Black-Scholes -malli on jälleen paras kaikissa ryhmissä ja Heston-Nandi GARCH heikoin.

4.2 RMSE-hinnoitteluvirheet ennustusotoksessa

Tässä osassa tutkielmaa vertaillaan mallien välisiä hinnoitteluvirheitä ennustusotoksessa eli vuosien jälkimmäisten kuuden kuukauden aikana. Ensin tarkastellaan kaikkia kolmea vuotta yhteisesti, jonka jälkeen käydään läpi vuosittaiset virheet. Lopuksi vertaillaan mallien välisiä eroja kuukausittain. Tämä osa tutkimuksesta on huomattavasti mielenkiintoisempi ja tärkeämpi aihealue verrattuna aiempaan testiotosvertailuun, sillä ennustusotoksen tulosten mu-

kaan voidaan mahdollisesti vetää johtopäätöksiä mallien toiminnasta käytännössä.

4.2.1 Hinnoitteluvirheet koko ennustusotoksessa

Ensimmäiseksi tarkastelun kohteeksi otetaan kaikki kolme vuotta 2009 - 2011 ja tarkemmin vuosien jälkimmäiset puoliskot. Taulukossa 9 on esitelty jälleen prosentuaaliset RMSE-hinnoitteluvirheet maturiteetti- ja kohde-etuus/toteutushinta -ryhmittäin.

Taulukko 9: %-RMSE-hinnoitteluvirheet koko ennustusotokselle

Hinnoitteluvirheet on laskettu vuosien 2009-2011 jälkimmäisten 6 kk:n ajalta. Mallien estimoimia hintoja on verrattu warrantimarkkinoilta havainnoituihin bid-ask -keskiarvohintoihin. Hinnoitteluvirheiden laskemiseen on käytetty prosentuaalista RMSE (*root-mean-squared-error*) funktiota. DTM (*days to maturity*) kuvaa warrantin jäljellä olevaa juoksuaikaa ja S/X (*Spot to exercise*) kuvaa kohde-etuuden ja warrantin toteutushinnan suhdetta.

	Black-Scholes (%)	HN GARCH (%)	Duan GARCH (%)	Havainnot (kpl)
10 < DTM < 60	52,5	43,2	39,0	78
60 < DTM < 120	52,7	38,8	31,8	74
120 < DTM < 180	48,1	40,9	42,1	34
180 < DTM < 360	86,5	40,9	43,3	10
S/X < 0,85	87,7	61,1	51,7	41
0,85 < S/X < 0,95	56,1	43,5	42,3	64
0,95 < S/X < 1,05	27,6	27,2	25,5	73
1,05 < S/X < 1,15	9,6	9,0	7,4	18
Yhteensä	54,1	41,0	37,3	196

Taulukosta 9 voidaan nähdä, että ennustusotoksessa vertailtuna mallien väliset tulokset kääntyvät lähes päinvastoin testiotoksen tuloksiin nähden, mikä on linjassa aikaisempien tutkimustulosten kanssa. Koko ennustusotosaineistolle lasketut hinnoitteluvirheet ovat yleisesti suurempia testiotokseen verrattuna, mutta Heston-Nandi -malli näyttää suoriutuvan hinnoittelutarkkuudessa paremmin ennustusotoksessa kuin testiotoksessa. Duanin mallin kokonaisvirhe on vertailun pienin sen jäädessä 37,3 prosenttiin vaihteluvälillä 7,4 %-51,7

%. Myös Heston-Nandi -malli suoriutuu hinnoittelusta Black-Scholes -mallia paremmin kokonaisvirheen ollessa 41,0 % vaihteluvälillä 9,0 %-61,1 %. Black-Scholes -mallin kokonaisvirhe on 54,1 % vaihteluvälillä 9,6 %-87,7 %.

Kaikki mallit suoriutuvat hyvin pluswarranttien hinnoittelusta ja niiden ennustetarkkuus näyttää heikkenevän tasaisesti miinuswarrantteihin päin mentäessä. Tasawarranttien hinnoitteluvirheet ovat malleilla lähes identtiset Duanin mallin virheen ollessa pienin, 25,5 prosenttia, ja Black-Scholes -mallin suurin, 27,6 prosenttia. Kaikki mallit epäonnistuvat miinuswarranttien hinnoittelussa, joskin Duanin mallin hinnoitteluvirheet jäivät sekä miinus- että vahvojen miinuswarranttien kohdalla vertailun pienimmiksi.

Maturiteettiryhmien välisessä vertailussa ei ole nähtävissä systemaattista eroa minkään mallin hinnoitteluvirheissä, ainoastaan Black-Scholes -mallin yli 180 päivän maturiteetin warranttien kohdalla hinnoitteluvirhe eroaa selvästi muista ryhmistä ollen 86,5 prosenttia. GARCH-mallit suoriutuvat molemmat hyvin samankaltaisesti kaikkien maturiteettiryhmien hinnoitteluvirheiden ollessa noin 40 prosentin tuntumassa lukuun ottamatta Duanin mallin 60 - 120 päivän maturiteetin 31,8 prosentin virhettä.

Kokonaisuudessaan voidaan todeta, että kaikkia vuosia yhteisesti tarkasteltaessa mallit suoriutuvat hinnoittelusta hyvin samankaltaisesti eikä kumpikaan GARCH-malli tuo merkittävää parannusta miinuswarranttien hinnoitteluun Black-Scholes -malliin nähden. Varsinkin pluswarranttien kohdalla kaikki mallit antavat hyvin oikeansuuntaisia hinta-arvioita.

4.2.2 Hinnoitteluvirheet vuosittain

Seuraavaksi tarkastellaan ennustusotoksen hinnoitteluvirheitä jälleen vuosittain. Taulukoissa 10, 11 ja 12 on kuvattu vuosien 2009, 2010 ja 2011 hinnoitteluvirheet aiempien taulukoiden mukaisesti eri ryhmittäin.

Taulukko 10: %-RMSE-hinnoitteluvirheet ennustusotoksen vuodelle 2009

Hinnoitteluvirheet on laskettu vuoden 2009 jälkimmäisten 6 kk:n ajalta. Mallien estimoimia hintoja on verrattu warranttimarkkinoilta havainnoituihin bid-ask -keskiarvohintoihin. Hinnoitteluvirheiden laskemiseen on käytetty prosentuaalista RMSE (*root-mean-squared-error*) funktiota. DTM (*days to maturity*) kuvaa warrantin jäljellä olevaa juoksuaikaa ja S/X (*Spot to exercise*) kuvaa kohde-etuuden ja warrantin toteutushinnan suhdetta.

	Black-Scholes (%)	HN GARCH (%)	Duan GARCH (%)	Havainnot (kpl)
10 < DTM < 60	31,8	21,8	12,2	19
60 < DTM < 120	37,2	20,8	22,6	20
120 < DTM < 180	41,1	49,2	33,7	13
180 < DTM < 360	107,7	37,3	40,7	3
S/X < 0,85	42,8	76,0	35,4	3
0,85 < S/X < 0,95	59,3	37,6	32,1	22
0,95 < S/X < 1,05	32,8	15,4	17,8	19
1,05 < S/X < 1,15	5,7	5,7	4,8	11
Yhteensä	43,4	31,1	24,4	55

Taulukosta 10 voidaan havaita Duanin mallin kokonaishinnoitteluvirheen olleen pienin sen jäädessä 24,4 prosenttiin vaihteluvälillä 4,8 %-40,7 %. Myös Heston-Nandi -malli suoriutui hinnoittelusta varsin hyvin kokonaisvirheen jäädessä 31,1 prosenttiin, kun taas Black-Scholes -mallin virhe oli vastaavasti 43,4 %.

Vuoden 2009 kohdalla voidaan jälleen todeta pluswarranttien hinnoitteluvirheiden olleen pienimpiä kaikilla malleilla niiden jäädessä noin 5 prosenttiin. Black-Scholes mallin virheet kasvavat miinuswarrantteihin päin mentäessä huomattavasti enemmän kuin GARCH-mallien vastaavat. Vahvojen miinuswarranttien kohdalla vertailua ei voida pitää luotettavana, sillä kyseiseen ryhmään jäi ainoastaan 3 havaintoa. Duanin malli näyttää suoriutuneen kokonaisuudessaan kaikissa ryhmissä parhaiten ja Black-Scholes -mallin huonoiten.

Maturiteettiryhmien välillä vertailtaessa voidaan kaikkien mallien kohdalla todeta, että maturiteetin kasvaessa myös hinnoitteluvirhe kasvaa kohtalaisesti.

Pisimmän maturiteettiryhmän tulosten luotettavuus ei ole riittävä ainoastaan kolmella havainnolla tutkittaessa, joten se jätetään vertailun ulkopuolelle. Hyvin lyhyen maturiteetin ryhmässä Duanin mallin hinnoitteluvirhe on pienin ja lyhyen maturiteettiryhmän kohdalla puolestaan Heston-Nandi -mallin.

Seuraavaksi tarkastellaan vuoden 2010 ennustusotosaineiston hinnoitteluvirheitä mallien välillä, jotka on esitetty taulukossa 11.

Taulukko 11: %-RMSE-hinnoitteluvirheet ennustusotoksen vuodelle 2010

Hinnoitteluvirheet on laskettu vuoden 2010 jälkimmäisten 6 kk:n ajalta. Mallien estimoimia hintoja on verrattu warranttimarkkinoilta havainnoituihin bid-ask -keskiarvohintoihin. Hinnoitteluvirheiden laskemiseen on käytetty prosentuaalista RMSE (*root-mean-squared-error*) funktiota. DTM (*days to maturity*) kuvaa warrantin jäljellä olevaa juoksuaikaa ja S/X (*Spot to exercise*) kuvaa kohde-etuuden ja warrantin toteutushinnan suhdetta. Taulukosta on jätetty pois syvä miinuswarrantti, ($S/X < 0,85$), koska ryhmään jäi vain yksi havainto.

	Black-Scholes (%)	HN GARCH (%)	Duan GARCH (%)	Havainnot (kpl)
10 < DTM < 60	10,4	30,1	21,9	20
60 < DTM < 120	14,4	33,8	28,4	25
120 < DTM < 180	15,6	41,3	39,2	10
180 < DTM < 360				0
S/X < 0,85				1
0,85 < S/X < 0,95	20,3	52,8	49,5	10
0,95 < S/X < 1,05	11,5	28,7	21,0	39
1,05 < S/X < 1,15	10,1	12,2	5,0	5
Yhteensä	13,4	34,0	28,6	55

Vuosi 2010 näyttää olleen edellisvuoteen verrattuna jälleen hyvin erilainen, sillä kokonaisvirheellä verrattuna pienimmän hinnoitteluvirheen malli näytti olleen Black-Scholes -malli virheen ollessa 13,4 prosenttia vaihteluvälillä 10,1%-20,3 %, ja on huomionarvoista, että vaihteluväli on näinkin pieni. Duanin mallin kokonaisvirhe oli huomattavasti korkeampi sen ollessa 28,6 prosenttia vaihteluvälillä 5,0 %-49,5 %. Heston-Nandi -mallin kokonaisvirhe on melko lähellä Duanin mallia (34,0 %) vaihteluvälillä 12,2 %-52,8 %.

Vuoden 2010 kohdalla tulokset ovat aiempiin verrattuna epäjohdonmukaisia, sillä yksikään malli ei ole selvästi muita parempi valtaosassa ryhmistä. Toteutushintaryhmien välillä vertailtaessa pluswarranttien ennustevirhe on pienin Duanin mallilla sen ollessa 5,0 %, kun Black-Scholes mallin vastaava virhe oli 10,1 % ja Heston-Nandin vastaava 12,2 %. Kaikki mallit siis suoriutuvat jälleen suhteellisen hyvin pluswarranttien hinnoittelusta. Black-Scholes mallin tasawarrantihinnoitteluvirhe ei eroa merkittävästi pluswarrantista, kun taas GARCH-mallien virheet nousevat huomattavasti plus- ja tasawarrantin välillä. Miinuswarranttien kohdalla Black-Scholes mallin ennustevirhe on huomattavasti GARCH-malleja pienempi sen ollessa ainoastaan 20,3 prosenttia kun taas GARCH-mallien virheet nousevat noin 50 prosenttiin. Vahvoja miinuswarrantteja jäi kyseiseen ryhmään ainoastaan yksi kappale, joten se on jätetty vertailun ulkopuolelle.

Maturiteettien mukaan vertailtuna havaitaan maturiteetin kasvaessa myös hinnoitteluvirheen kasvavan kaikkien mallien kohdalla, joskin on huomionarvoista, että Black-Scholes mallin suurin hinnoitteluvirhe, 15,6 prosenttia on huomattavasti pienempi kuin kahden muun mallin pienin virhe 21,9 prosenttia. Pisimpään, yli 180 päivän maturiteettien, ryhmään ei jäänyt vuoden 2010 osalta yhtään havaintoa.

Viimeisenä käydään läpi vielä ennustusotoksen viimeisen eli vuoden 2011 hinnoitteluvirheet, jotka on esitelty taulukossa 12.

Taulukko 12: %-RMSE-hinnoitteluvirheet ennustusotoksen vuodelle 2011

Hinnoitteluvirheet on laskettu vuoden 2011 jälkimmäisten 6 kk:n ajalta. Mallien estimoimia hintoja on verrattu warranttimarkkinoilta havainnoituihin bid-ask -keskiarvohintoihin. Hinnoitteluvirheiden laskemiseen on käytetty prosentuaalista RMSE (*root-mean-squared-error*) funktiota. DTM (*days to maturity*) kuvaa warrantin jäljellä olevaa juoksuaikaa ja S/X (*Spot to exercise*) kuvaa kohde-etuuden ja warrantin toteutushinnan suhdetta.

	Black-Scholes (%)	HN GARCH (%)	Duan GARCH (%)	Havainnot (kpl)
10 < DTM < 60	70,5	55,0	52,2	39
60 < DTM < 120	77,2	50,5	39,3	29
120 < DTM < 180	70,2	27,7	52,2	11
180 < DTM < 360	75,6	42,4	44,4	7
S/X < 0,85	91,5	60,0	52,6	37
0,85 < S/X < 0,95	61,2	44,1	45,8	32
0,95 < S/X < 1,05	44,8	34,2	40,2	15
1,05 < S/X < 1,15	20,0	13,0	17,6	2
Yhteensä	73,2	49,8	47,6	86

Vuoden 2011 ennustusotoksen hinnoitteluvirheet ovat selvästi aiempien vuosien vastaavia suurempia kaikilla malleilla. GARCH-mallit suoriutuivat kokonaisvirheellä mitattaessa selvästi Black-Scholes -mallia paremmin Duanin mallin virheen ollessa keskimäärin 47,6 prosenttia vaihteluvälillä 17,6 %-52,6 % ja Heston-Nandi -mallin 49,8 % vaihteluvälillä 13,0 %-60,0 %. Black-Scholes mallin kokonaisvirhe on huomattavan suuri sen noustessa 73,2 prosenttiin vaihdelleen välillä 20,0 %-91,5 %.

Mallit näyttävät jälleen hinnoittelevan tehokkaimmin pluswarrantit Heston-Nandi -mallin hinnoitteluvirheen ollessa pienin 13,0 %. Huomattavaa on kuitenkin, että kyseiseen ryhmään jäi ainoastaan kaksi havaintoa, joten tuloksia ei voida pitää kovinkaan yleistettävänä. Miinuswarrantteihin päin mentäessä hinnoitteluvirheet kasvavat tasaisesti kaikilla malleilla, vahvimmin Black-Scholes mallilla, jonka vahvojen miinuswarranttien hinnoitteluvirhe kohoaa

91,5 prosenttiin. Heston-Nandi -mallin hinnoitteluvirheet ovat vahvoja miinuswarrantteja lukuunottamatta vertailtavan ryhmän pienimmät.

Maturiteettiryhmien mukaan vertailtaessa Black-Scholes -mallin hinnoitteluvirheet ovat kaikissa ryhmissä yli 70 prosenttia eikä selvää eroa ryhmien välillä ole nähtävissä. Heston-Nandi -mallin kohdalla kahden lyhimmän maturiteettiryhmän hinnoitteluvirheet näyttävät olevan hieman kahta pidempää ryhmää suurempia, mutta Duanin mallin kohdalla vastaavaa ei ole selvästi havaittavissa. Yleisesti GARCH-mallien hinnoitteluvirheet näyttävät sijoittuvan noin 40 - 50 prosentin vaihteluvälille pois lukien Heston-Nandi -mallin 120 - 180 päivän ryhmän selvästi pienempi (27,7 prosentin) hinnoitteluvirhe.

4.2.3 Hinnoitteluvirheet kuukausittain

Seuraavaksi vertaillaan, miten hinnoitteluvirheet eroavat eri kuukausina tarkasteltaessa. Kuten aiemmin mainittu, tutkimuksessa käytettävä aineisto on jaettu kuuteen osaan siten, että kaikki vuodet on jaettu puoliksi ja ensimmäinen puolikas kuuluu testiotokseen ja toinen puolestaan ennustusotokseen. Käytettävät mallit on siis kalibroitu siten, että mallien parametrit on määritetty testiotoksesta vuosittain juuri puolessa välissä vuotta.

Taulukoissa 13, 14 ja 15 on esitelty hinnoitteluvirheet kuukausittain siten, että esimerkiksi sarakkeessa 1 kk on hinnoitteluvirheet mallin kalibroitua seuraavalta kuukaudelta, 2kk kohdalla vastaavasti toiselta ja niin edelleen. Testiotos-sarakkeessa on esitetty vuoden ensimmäisten 6 kuukauden hinnoitteluvirhe.

Tarkastellaan ensin Black-Scholes mallin hinnoitteluvirheet kuukausittain, mitkä on esitetty taulukossa 13.

Taulukko 13: Black-Scholes mallin %-RMSE-hinnoitteluvirheet ennustusotoksessa kuukausittain

Black-Scholes mallin prosentuaaliset RMSE-hinnoitteluvirheet kuukausittain. Testiotossarakkeessa on esitetty hinnoitteluvirhe yhteensä testiotoksesta (vuoden tai vuosien ensimmäiset 6 kk) ja sen jälkeen virheet ennustusotoksesta kuukausittain.

	Testiotos	1 kk	2 kk	3 kk	4 kk	5 kk	6 kk
2009-2011	15,7	27,6	50,0	54,3	58,0	56,9	74,8
Havainnot	141	30	47	41	26	28	24
2009	12,0	8,5	15,6	24,0	39,1	43,4	89,8
Havainnot	45	8	10	12	8	9	8
2010	17,4	8,4	10,7	17,1	15,2	17,1	12,4
Havainnot	55	11	14	11	6	6	7
2011	16,7	44,1	70,3	78,5	78,5	74,4	87,4
Havainnot	41	11	23	18	12	13	9

Vuosien kohdalla ilmoitetut luvut ovat prosentteja, havainnot lukumääriä.

Kuten taulukosta 13 voidaan havaita, Black-Scholes -mallin hinnoitteluvirheet näyttävät kasvavan ajan pidentyessä niin koko periodilla kuin vuosittainkin pois lukien vuosi 2010, jossa virheet ovat suhteellisen tasaisia vaihteluvälillä 8,4 %-17,1 %. Kaikkien vuosien kohdalla voidaan kuitenkin todeta, että ennustusotoksen hinnoitteluvirheet ovat huomattavasti pienempiä ensimmäisen kuukauden aikana kuin sitä seuraavien. Mielenkiintoinen huomio on myös, että vuosien 2009 ja 2010 kohdalla ensimmäisen kuukauden ajalta lasketut hinnoitteluvirheet ovat jopa pienempiä kuin testiotoksen kokonaishinnoitteluvirhe. Tämä on huomionarvoista siksi, että aiemmissa kappaleissa ennustusotoksen virheitä tutkittaessa huomattiin Black-Scholes -mallin virheiden olleen keskimäärin suurempia ennustusotoksesta kuin testiotoksesta lasketuna.

Kokonaisuudessaan vaikuttaa siltä, että Black-Scholes mallia voidaan hyödyntää jokseenkin tehokkaasti nimenomaan lyhyellä perspektiivillä ja implisiittistä volatilitteettiä tulisi päivittää vähintään kuukausittain ennustustarkkuuden parantamiseksi, sillä puolen vuoden päässä olevat ennustetut hinnat näyttävät olevan huomattavan harhaisia.

Seuraavaksi tarkastellaan vastaavasti Heston-Nandi GARCH-mallin hinnoitteluvirheet ennustusotoksessa kuukausittain. Prosentuaaliset RMSE-hinnoitteluvirheet on raportoitu taulukossa 14.

Taulukko 14: Heston-Nandi GARCH-mallin %-RMS- hinnoitteluvirheet ennustusotoksessa kuukausittain

Heston-Nandi GARCH-mallin prosentuaaliset RMSE-hinnoitteluvirheet kuukausittain. Testiotossarakkeessa on esitetty hinnoitteluvirhe yhteensä testiotoksesta (vuoden tai vuosien ensimmäiset 6 kk) ja sen jälkeen virheet ennustusotoksesta kuukausittain.

	Testiotos	1 kk	2 kk	3 kk	4 kk	5 kk	6 kk
2009-2011	49,5	36,0	34,9	44,8	46,6	42,4	43,4
Havainnot	141	30	47	41	26	28	24
2009	57,0	51,7	38,3	17,3	31,9	17,6	18,5
Havainnot	45	8	10	12	8	9	8
2010	49,7	30,2	35,9	37,4	32,2	37,1	28,6
Havainnot	55	11	14	11	6	6	7
2011	39,5	26,0	32,6	59,3	59,2	55,0	64,0
Havainnot	41	11	23	18	12	13	9

Vuosien kohdalla ilmoitetut luvut ovat prosentteja, havainnot lukumääriä.

Heston-Nandi GARCH-mallin kohdalla ajan vaikutus hinnoitteluvirheisiin ei vaikuta olevan yhtä suuri kuin Black-Scholes mallin kohdalla. Koko periodilla tarkasteltaessa voidaan huomata, että hinnoitteluvirheet ovat pienempiä ensimmäisten kahden kuukauden aikana kuin testiotoksesta laskettuna ja kahden seuraavan kuukauden aikana ne nousevat maltillisesti, mutta eivät ylitä missään vaiheessa 50 prosentin tasoa. Viimeisten kahden kuukauden aikana hinnoitteluvirheet ovat myös ensimmäisiä kuukausia korkeampia.

Vuositasolla Heston-Nandi -mallin tulokset ovat epäjohdonmukaisempia, sillä vuoden 2009 kohdalla hinnoitteluvirheen suuruus näyttää laskevan pidemmälle mentäessä ja olevan jopa huomattavan pieni, alle 20 prosenttia kolmannen, viidennen ja kuudennen kuukauden kautta tarkastellen. Vuoden 2010 virheet puolestaan ovat kaikkien kuukausien kohdalla hyvin samansuuruisia vaihteluvälillä 28,6 %-37,4 %. On kuitenkin huomattava, että vastaavas-

ti Black-Scholes mallin hinnoitteluvirheet vuonna 2010 jäivät kaikkien kuukausien osalta alle 20 prosenttiin ja lähentelivät useana kuukautena 10 prosenttia. Vuoden 2011 osalta Heston-Nandi-malli vaikuttaa hinnoittelevan kahden ensimmäisen kuukauden warrantit selvästi tehokkaammin verrattuna neljään viimeiseen kuukauteen vaihteluvälillä 26,0 %-59,3 %. Huolimatta siitä, että ennustevirheet ovatkin kahta aiempaa vuotta hieman suurempia, ovat ne kuitenkin kokonaisuudessaan Black-Scholes mallia pienempiä vuoden 2011 osalta.

Viimeisenä käydään vielä läpi Duanin GARCH-mallin hinnoitteluvirheet kuukausitasolla. Prosentuaaliset RMSE-hinnoitteluvirheet on ilmoitettu taulukossa 15.

Taulukko 15: Duan GARCH-mallin %-RMSE-hinnoitteluvirheet ennustusotoksessa kuukausittain

Duan GARCH-mallin prosentuaaliset RMSE-hinnoitteluvirheet kuukausittain. Testiotossarakkeessa on esitetty hinnoitteluvirhe yhteensä testiotoksesta (vuoden tai vuosien ensimmäiset 6 kk) ja sen jälkeen virheet ennustusotoksesta kuukausittain.

	Testiotos	1 kk	2 kk	3 kk	4 kk	5 kk	6 kk
2009-2011	33,3	28,9	33,4	37,6	39,7	41,5	44,7
Havainnot	141	30	47	41	26	28	24
2009	17,2	9,1	5,9	17,8	26,2	28,7	43,4
Havainnot	45	8	10	12	8	9	8
2010	41,4	29,5	31,5	30,1	26,5	28,0	19,6
Havainnot	55	11	14	11	6	6	7
2011	34,5	36,7	40,8	49,5	51,0	52,6	57,8
Havainnot	41	11	23	18	12	13	9

Vuosien kohdalla ilmoitetut luvut ovat prosentteja, havainnot lukumääriä.

Koko periodilla tarkasteltuna vaikuttaa jälleen siltä, että hinnoitteluvirheet kasvavat ajan pidentyessä, mutteivät kuitenkaan yhtä dramaattisesti kuin Black-Scholes mallin tapauksessa. Ensimmäisen kuukauden hinnoitteluvirhe jää 28,9 prosenttiin, joka on ainoastaan hivenen suurempi Black-Scholes mallin vastaavaan (27,6 prosenttiin) verrattuna. Ajan pidentyessä ennustevirhe kasvaa tasaisesti viimeisen kuukauden virheen ollessa suurin, 44,7 prosent-

tia. Tämä on huomattavasti Black-Scholes -mallin virhettä pienempi, sillä sen virhe kasvoi jo toisen kuukauden kohdalla yli 50 prosenttiin ja viimeisen kuukauden kohdalla se oli jo 74,8 prosenttia. Duanin mallin virheet vaikuttavat olevan kokonaisuudessaan hyvin lähellä Heston-Nandi -mallin virheitä.

Vuositasolla tarkasteltaessa vuosi 2009 erottuu edukseen pienten hinnoitteluvirheidensä ansiosta, missä virhe pienimmillään jää ainoastaan 5,9 prosenttiin toisen kuukauden kohdalla. Myös Duanin mallin kohdalla on nähtävissä selkeästi vuosien 2009 ja 2011 kohdalla, että hinnoitteluvirheet ovat pienimmillään juuri kahden ensimmäisen kuukauden aikana. Vuoden 2009 kohdalla hinnoitteluvirheet jäävät alle 30 prosenttiin viiden ensimmäisen kuukauden aikana ja nousevat ainoastaan viimeisen kuukauden kohdalla merkittävästi, 43,4 prosenttiin. Vuoden 2010 kohdalla virheet ovat noin 30 prosentin tuntumassa viiden ensimmäisen kuukauden aikana ja näyttävät jopa laskevan mentäessä kauemmaksi ajassa mallien kalibrointihetkestä. Vuoden 2010 virheet ovat kokonaisuudessaan hieman Heston-Nandi -mallin virheitä matalampia, mutta jäävät selvästi Black-Scholes mallin virheitä korkeammiksi. Viimeisen vuoden 2011 kohdalla voidaan huomata kyseisen vuoden olevan ainoa, jolloin hinnoitteluvirheet ovat koko testiotoksesta laskettuna pienemmät, 34,5 prosenttia kuin ennustusotoksen ensimmäisen kuukauden ajalta, 36,7 prosenttia. Viimeisen vuoden hinnoitteluvirhe näyttää kasvavan tasaisesti kuukausissa eteenpäin mentäessä sen ollessa suurin viimeisen kuukauden kohdalla, 52,6 prosenttia. Kokonaisuudessaan Duanin mallin virheet ovat samaa tasoa Heston-Nandi -mallin virheiden kanssa ja selvästi pienempiä Black-Scholes -mallin virheiden kanssa viimeisen vuoden osalta.

Tulosten perusteella voidaan sanoa, että kaikkien mallien kohdalla mallit toimivan tehokkaimmin kahden ensimmäisen kuukauden aikana mallin parametrien määrittämisestä. Kaikkien periodien yhteisellä ennustusotosaineistolla tarkasteltuna malleista parhaaksi osoittautui Duanin GARCH-malli, mutta on huomionarvoista, että kahden ensimmäisen vuoden aineistoilla tarkasteltaes-

sa Black-Scholes mallin ensimmäisten kuukausien hinnoitteluvirheet ovat huomattavan pieniä ennakko-odotuksiin nähden.

Käytännössä käytettävän aineiston saatavuus ja mallien estimointiin käytetyn ajan arviointi vaikuttavat mallien paremmuuteen. Black-Scholes mallia varten johdettava implisiittinen volatilitteetti ja sen regressointi vaativat käytettävien warranttien markkinahinnat ja tämänkin tutkimuksen tekemisen aikana on tullut esille kyseisen aineiston analysointiin vaaditun työn suuri määrä. Toisaalta myös Duanin GARCH-mallin antamat RMSE-hinnoitteluvirheet ovat suhteellisen pieniä varsinkin vuoden 2009 osalta eikä mallin ajamiseen tarvita markkinoilta muuta tietoa kuin kohde-etuusindeksin hinta-aikasarja.

4.3 Prosentuaaliset hinnoitteluvirheet ennustusotoksesta

Seuraavaksi tarkastellaan prosentuaalisia hinnoitteluvirheitä box-whisker -laatikkokuvioiden avulla. Tässä kappaleessa esitetyissä kuvioissa on kuvattu ennustusotoksen prosentuaaliset hinnoitteluvirheet mahdollisimman havainnollistavalla tavalla. Kuvioissa laatikko sisältää 50 prosenttia havainnoista jaoteltuina mediaanin (viiva laatikon keskellä) sekä ala- ja yläkvartiilin (laatikon ala- ja yläreuna) mukaan. Laatikoista lähtevät viivat kuvaavat havaintojen ääriarvoja. Näin ollen kuvioista voidaan havaita, miten hinnoitteluvirheet ovat jakautuneet sekä hinnoitteluvirheiden suunta. Molemmat näkökulmat jäivät aiemmissa prosentuaalisten RMSE-hinnoitteluvirheiden tarkastelussa hämärän peittoon, sillä kyseisellä metodilla kaikki hinnoitteluvirheet neliöidään eikä mahdollisia outlier-havaintoja kontrolloida lainkaan.

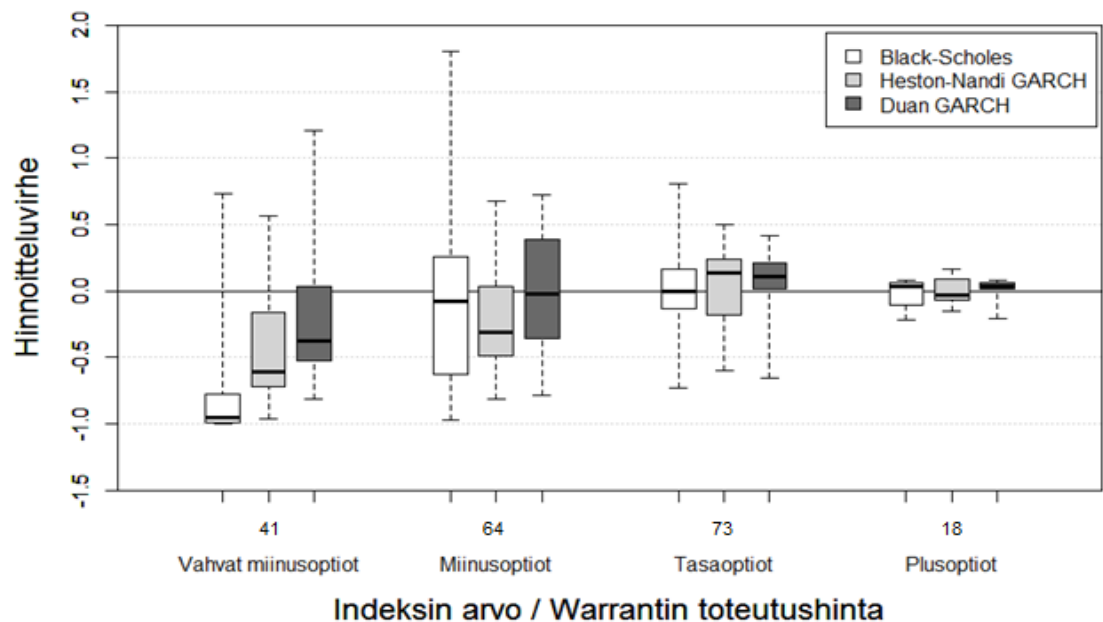
Laatikkokuviotarkasteluun päätettiin ottaa aiemmista tuloksista johtuen tarkastelu kohde-etuuden ja toteutushinnan suhteen mukaan sekä hinnoitteluvirheet kuukausittain. RMSE-virheiden tarkastelun perusteella erot maturiteettiryhmien väleillä eivät olleet yhtä merkittäviä, joten kyseiset virheet päädyttiin toteamaan ainoastaan päällisin puolin. Box-whisker -kuviot maturiteettiryhmien mukaan on sisällytetty tutkimuksen liitteisiin. Olisi ollut mielenkiintoista tutkia myös tarkemmin maturiteetin vaikutusta eri toteutushintaryhmien kesken,

mutta tällaista tarkastelua varten havaintojen ryhmäkohtaiset lukumäärät olisivat jääneet liian pieniksi, eikä luotettavia johtopäätöksiä olisi pystytty tekemään. Myös testiotostarkastelu jätettiin kokonaisuudessaan kuviotarkastelun ulkopuolelle, sillä testiotoksen tarkoitus on kalibroida mallit, eikä sen tulosten analysointi ole tässä kontekstissa järkevää, koska se voi johtaa mallien ”ylisovittamiseen” ja tätä kautta huonoon ennustetarkkuuteen.

Box-whisker -kuviot käydään läpi siten, että ensin esitellään kuviot toteutushintaryhmien mukaan aiempien tulosten mukaisesti aluksi kaikilta kolmelta vuodelta yhteisesti ja sen jälkeen kukin vuosi erikseen. Toisena käydään läpi kuukausittaiset hinnoitteluvirheet vastaavasti ensin koko periodilta sekä vuosi kerrallaan.

4.3.1 Hinnoitteluvirheet toteutushinnan mukaan

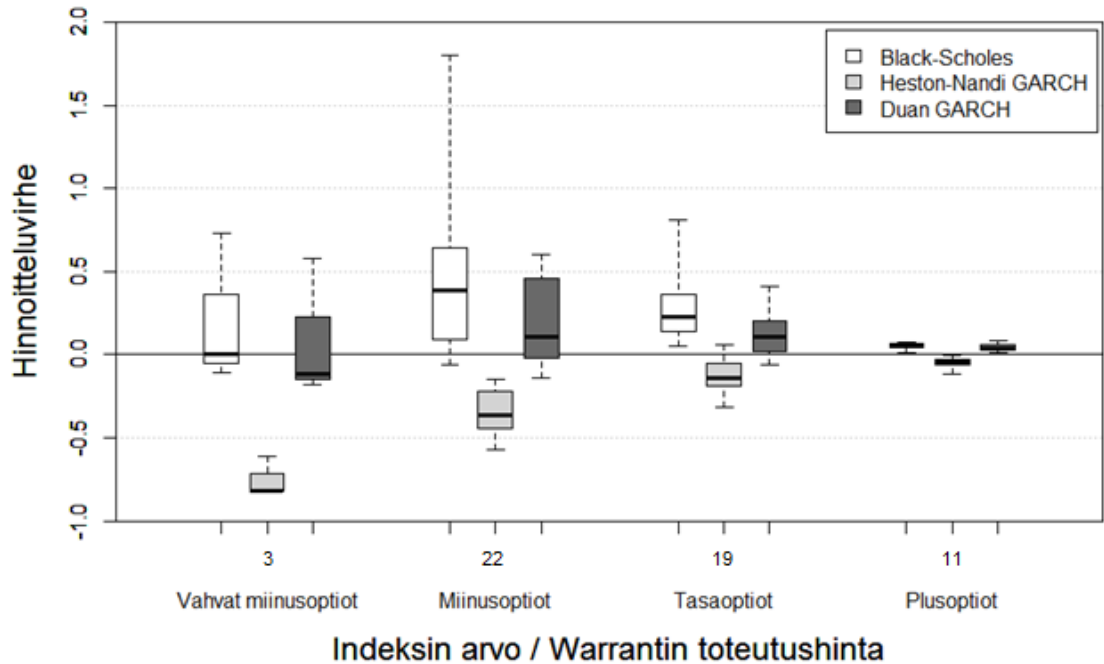
Kuvissa 2, 3, 4 ja 5 on esitetty kuvaajat prosentuaalisista hinnoitteluvirheistä ensin kaikkien vuosien jälkimmäisten puolikkaiden osalta ja sen jälkeen kukin vuosi yksitellen.



Kuva 2: Mallien prosentuaaliset hinnoitteluvirheet ennustusotoksesta vuosilta 2009-2011. Kuviossa 1,0 = 100 %. Ryhmien havaintojen lukumäärä on ilmoitettu ryhmän nimen yläpuolella.

Kuvasta 2 voidaan havaita, että kaikkien periodien yhteisellä aineistolla muodostetut hinnoitteluvirheet jakaantuvat hyvin laajalti varsinkin miinuswarranttien kohdalla. Pluswarranttien kohdalla hinnoitteluvirheet jäävät malleilla hyvin lähelle toisiaan eivätkä leviä laajalle skaalalle. Tasawarranttien kohdalla minimi- ja maksimiarvot alkavat hajaantua malleilla yli 50 prosentin molempiin suuntiin, mutta mediaanin mukaan mitattuna jäävät nollan tuntumaan varsinkin Black-Scholes -mallia käytettäessä. Ylä- ja alakvartiilit jäävät kaikilla malleilla reilusti alle 50 prosentin. Miinuswarranttien kohdalla virheet alkavat olla räikeämpiä ja Black-Scholes ja Heston-Nandi -mallien osalta on huomattavissa pienoista alihinnoittelua. Vahvojen miinuswarranttien kohdalla kaikki mallit hinnoittelevat warrantit systemaattisesti liian alas ja varsinkin Black-Scholes -mallin kohdalla tulokset näyttävät yksiselitteisiltä. Kaikkien mallien hinnoitteluvirheiden mediaanit jäävät myös selvästi alle nollatason vahvojen miinuswarranttien kohdalla. Tulokset ovat yhteneviä aiemmassa kappaleessa esiteltyjen RMSE-hinnoitteluvirheiden kanssa, mutta antavat lisäinformaatiota virheiden suunnasta.

Kaikkien vuosien osalta hinnoitteluvirheitä kuvaavasta kuvasta 2 voidaan havaita muiden kuin pluswarranttien osalta hinnoitteluvirheiden epätasainen ja laaja jakautuminen, joten mielenkiinto siirtyy nyt vuosikohtaiseen tarkasteluun. Vuosikohtaisen tarkastelun toivotaan antavan tarkempaa informaatiota systemaattisesta ali- tai ylihinnoittelusta. Seuraavassa kuvassa 3 on kuvattu vuoden 2009 prosentuaaliset hinnoitteluvirheet.

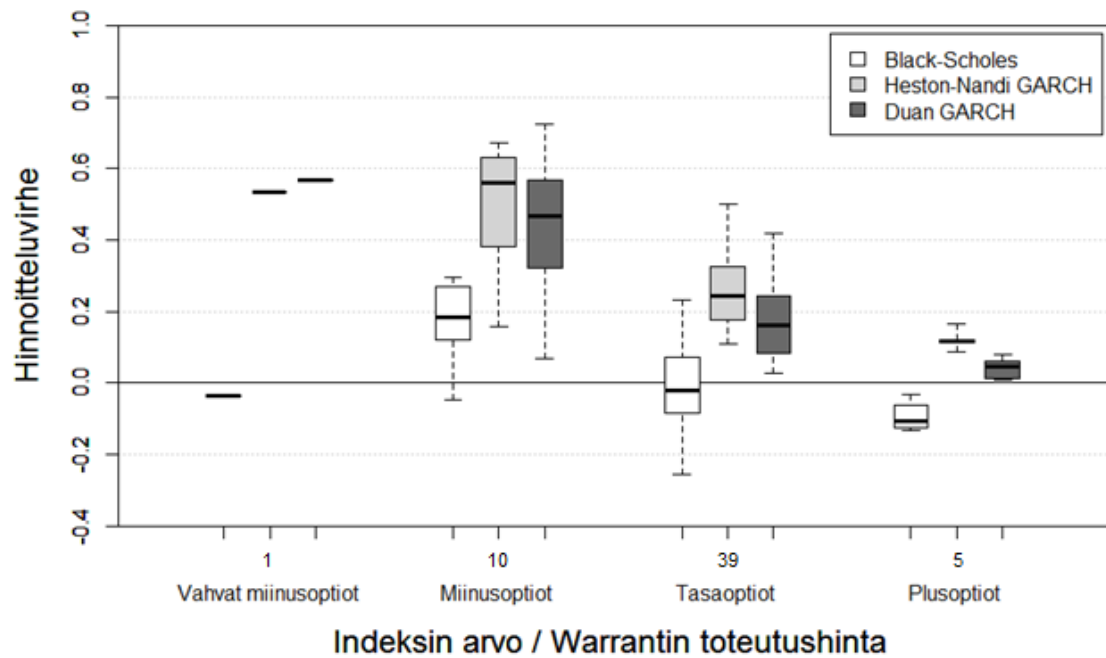


Kuva 3: Mallien prosentuaaliset hinnoitteluvirheet ennustusotoksesta vuodelta 2009. Kuviossa 1,0 = 100 %. Ryhmien havaintojen lukumäärä on ilmoitettu ryhmän nimen yläpuolella.

Kuvasta 3 nähdään, että vuoden 2009 hinnoitteluvirheet ovat jokseenkin erilaisia aiempaan kaikkien periodien yhteiseen kuvaan verrattuna. Pluswarranttien virheet ovat jälleen kaikilla malleilla hyvin lähellä nollassa, mutta muiden ryhmien kohdalla erot ovat selkeämpiä. Duanin malli vaikuttaa vuoden 2009 aineistolla mitattuna tarjoavan tarkimman mallin warranttihinnoitteluun, sillä sen mediaani on kaikissa ryhmissä suhteellisen lähellä nollassa eikä maksimi- ja minimiarvot karkaa kauaksi kvartiileista. Black-Scholes -malli vaikuttaa niin ikään onnistuvan kohtalaisesti mediaanin mukaan arvioitaessa, mutta varsinkin miinuswarranttien kohdalla maksimiarvo karkaa kauaksi muusta tasosta. On kuitenkin huomionarvoista, että Black-Scholes -malli hinnoittelee vahvat miinuswarrantit hyvin samankaltaisesti Duanin mallin kanssa, mutta käytettyjen havaintojen vähäinen määrä, kolme havaintoa, voi vaikuttaa tulosten luotettavuuteen. Heston-Nandi -malli puolestaan vaikuttaa olevan johdonmukainen hinnoittelussa kaikien ryhmien kohdalla alihinnoitellen ryhmien warrantit tasaisesti ja tässä suhteessa box-whisker -kuvatarkastelu tuo

tärkeää lisäinformaatiota RMSE-virheiden tueksi. RMSE-virheiden mukaan Heston-Nandi -malli vaikutti peittoavan Black-Scholes mallin, mutta laatikkokuvan perusteella voidaan todeta mallin olevan jopa osittain epätarkempi, joskin Black-Scholes -mallin virheet jakautuvat huomattavasti laajemmin. Duanin malli näyttää kuitenkin olevan suvereeni molempien testien mukaan vuoden 2009 osalta.

Kuvassa 4 on esitetty vastaavasti vuoden 2010 hinnoitteluvirheet toteutushinnan mukaan ryhmiteltynä.

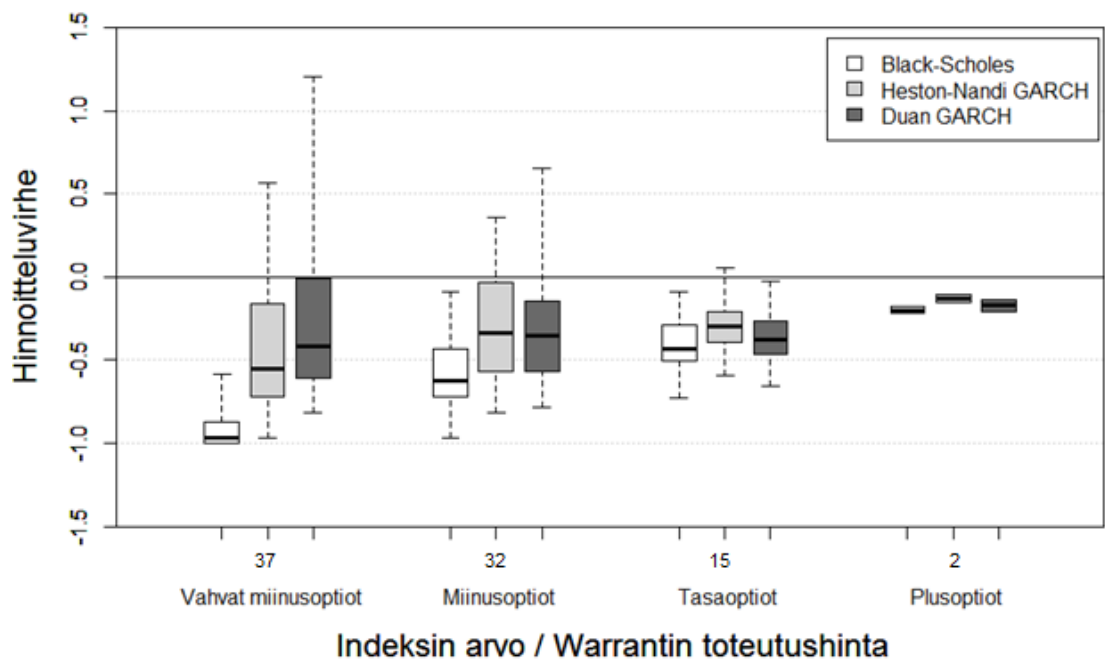


Kuva 4: Mallien prosentuaaliset hinnoitteluvirheet ennustusotoksesta vuodelta 2010. Kuviossa 1,0 = 100 %. Ryhmien havaintojen lukumäärä on ilmoitettu ryhmän nimen yläpuolella.

Vuoden 2010 osalta mallit näyttävät toimivan pääsääntöisesti aiempaa vuotta tarkemmin ja onkin hyvä huomata että kuvien skaalaus ei ole kuvien välillä yhtäläinen. Vuoden 2010 osalta vahvat miinuswarrantit -ryhmään jäi ainoastaan yksi havainto, joten se on jätetty kuvioon ainoastaan havainnollistamistarkoituksessa. Black-Scholes -malli vaikuttaa olevan malleista selvästi paras tasa- ja miinuswarranttien hinnoittelussa, mutta näyttää hieman alihinnoittele-

van pluswarrantit. Duanin malli on selkeästi tarkin pluswarranttien hinnoittelussa. Molemmat GARCH-mallit vaikuttavat ylihinnonitelevan tasa- ja miinuswarrantit kaikkien virheiden ollessa molemmilla positiivisia. Kokonaisuudessaan vuoden 2010 osalta Black-Scholes malli on vertailun paras prosentuaalisten virheiden mukaan tarkasteltuna ja tulos on linjassa myös aiempien RMSE-virheiden kanssa.

Prosentuaaliset hinnoitteluvirheet vuodelta 2011 on esitetty kuvassa 5.



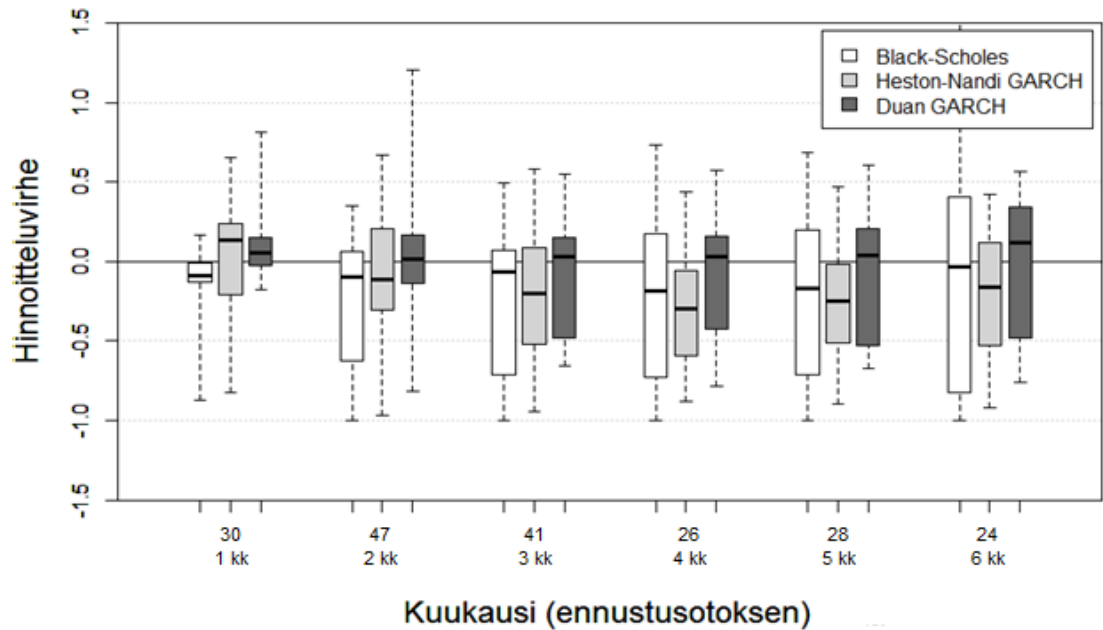
Kuva 5: Mallien prosentuaaliset hinnoitteluvirheet ennustusotoksesta vuodelta 2011. Kuviossa 1,0 = 100 %. Ryhmien havaintojen lukumäärä on ilmoitettu ryhmän nimen yläpuolella.

Vuoden 2011 kohdalla RMSE-virheiden osalta ilmeni vuosikohtaisesti selvästi suurimmat hinnoitteluvirheet, joka näyttää selittyvän kuvasta 5 tarkasteltuna osittain kaikkien mallien systemaattisella alihinnonittelulla kaikissa ryhmissä. Pluswarranttien ennustevirheet ovat jälleen kaikkien mallien osalta pienimpiä ja hyvin samansuuntaista. Heston-Nandi -malli vaikuttaa olevan kuitenkin lähinnä nollassa. Myöskään tasawarranttien kohdalla mallien välillä ei ole nähtävissä suurempia eroja Heston-Nandi -mallin ollessa jälleen lähinnä nol-

latasoa ja kaikkien mallien hinnoitteluvirheiden jäädessä reilusti -100 prosentin paremmalle puolelle. Miinuswarranttien kohdalla hinnoitteluvirheet alkavat jälleen levitä laajemmalle ja alihinnoittelu syvenee varsinkin Black-Scholes mallin osalta. Vahvojen miinuswarranttien tapauksessa hinnoitteluvirheiden maksimiarvot Duanin mallilla hyppäävät jo yli 100 prosentin, mutta mediaanin mukaan tarkasteltaessa hinnoitteluvirhe pysyy jokseenkin miinuswarranttien hinnoittelun tasolla. Heston-Nandi malli puolestaan alihinnoittelee vahvat miinuswarrantit hieman syvemmin miinuswarranttiryhmään verrattuna ja samoin tekee myös Black-Scholes -malli. Huomionarvoista on kuitenkin Black-Scholes mallin hinnoitteluvirheiden suhteellisen pieni hajonta vahvojen miinuswarranttien ryhmässä muihin malleihin verrattuna. Vuoden 2011 tulokset eivät tuoneet merkittävää lisäinformaatiota RMSE-tuloksiin verrattuna systemaattisen alihinnoittelun havaitsemisen lisäksi.

4.3.2 Hinnoitteluvirheet kuukausittain

Viimeisenä ennustusotostarkasteluna käydään vielä läpi prosentuaalisista hinnoitteluvirheistä piirretyt laatikkokuvaajat eri kuukausien välillä, mitkä on esitelty kuvissa 6, 7, 8 ja 9. Ensin käydään jälleen läpi hinnoitteluvirheet yhteensä kaikilta kolmelta vuodelta ennustusotoksesta laskettuna ja sen jälkeen pureudutaan virheisiin tarkemmin vuosi kerrallaan.

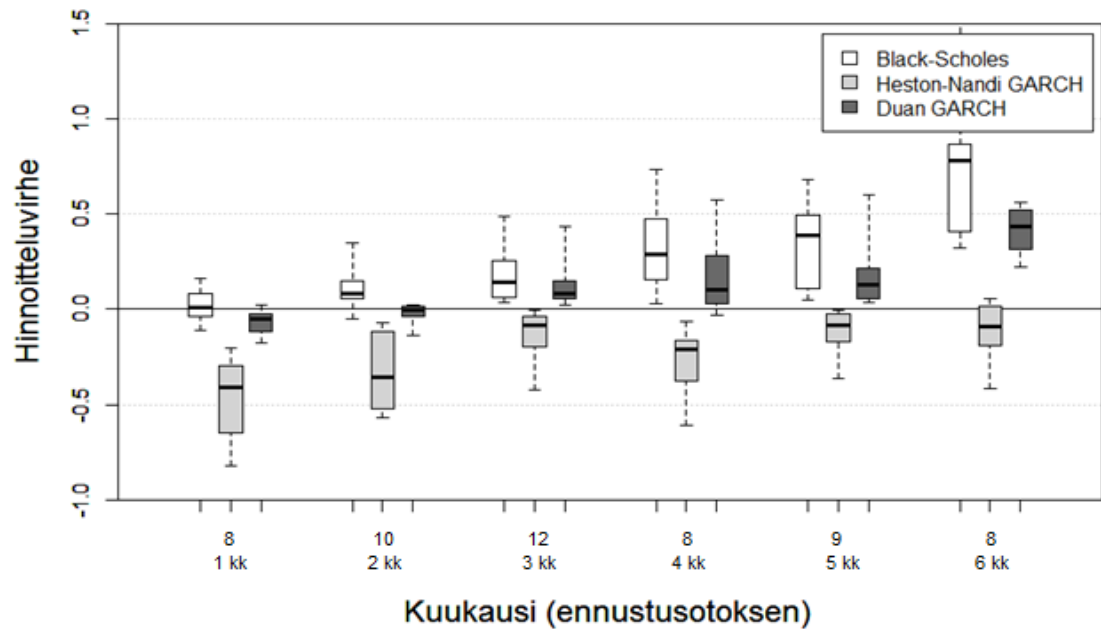


Kuva 6: Mallien prosentuaaliset hinnoitteluvirheet ennustusotoksesta vuosilta 2009-2011. Kuviossa 1,0 = 100 %. Ryhmien havaintojen lukumäärä on ilmoitettu ryhmän kuukauden yläpuolella.

Kuvasta 6 voidaan havaita, että kaikkien kolmen vuoden yhteisestä aineistosta lasketut prosentuaaliset hinnoitteluvirheet näyttävät hajautuvan melko laajalle ensimmäisestä kuukaudesta lähtien eikä kuukausien välillä ole juurikaan nähtävissä eroa virheiden skaalassa. Tulokset paljastavat kuitenkin jälleen Duanin mallin selviytyneen parhaiten ryhmän malleista, sillä hinnoitteluvirheiden mediaani lähentelee nollaa kaikkina kuukausina. Kaikkien mallien virheet ovat kuitenkin hyvin hajautuneita. Koska myös aiempien tulosten perusteella on havaittu suuret erot vuosien välillä, ei tämän kuvion tarkastelu anna vielä riittävää lisäinformaatiota. Tästä syystä siirrytään suoraan vuosikohtaiseen tarkasteluun.

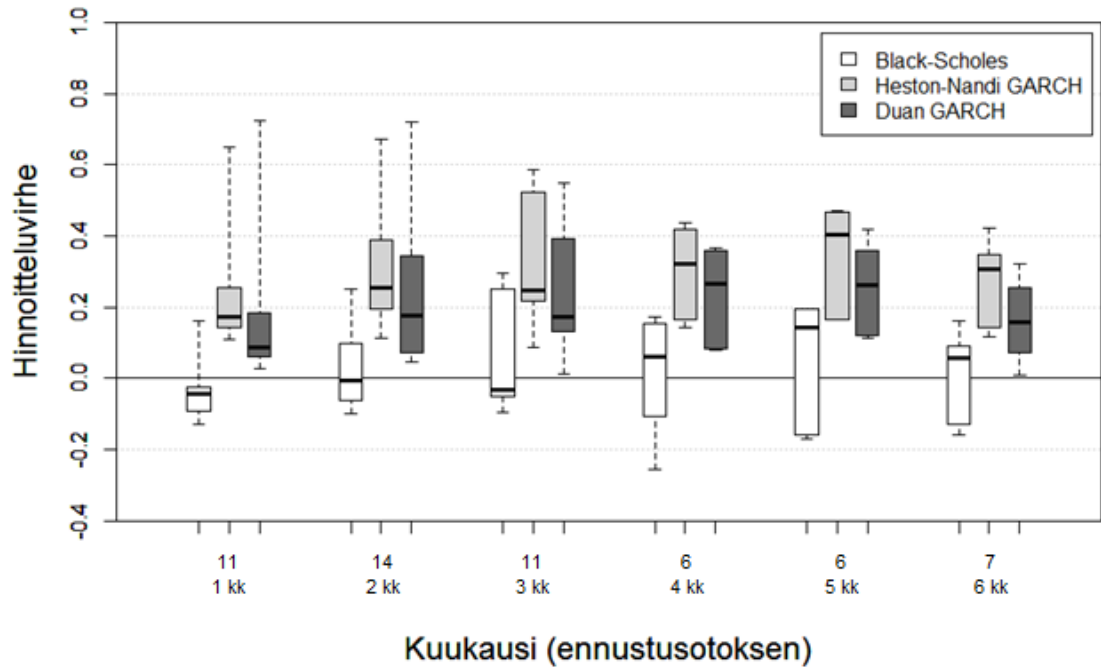
Kuvassa 7 on esitetty hinnoitteluvirheet kuukausittain vuoden 2009 osalta. Black-Scholes -malli ja Duanin malli näyttävät onnistuvan huomattavan hyvin hinnoittelussa kahden ensimmäisen kuukauden aikana, jälkimmäisen onnistuessa kohtuullisesti tänäkin kuukautena. Sen sijaan Heston-Nandi -malli

näyttää jälleen systemaattisesti alihinnoittelevan warrantit ensimmäisestä kuukaudesta lähtien. Mediaaneilla mitattuna Duanin malli on lähinnä nollatasoa vuoden 2009 osalta ja virheet ovat yllättävän pienet skaalan sisällä kaikkien kuukausien kohdalla. On myös hyvä huomata Black-Scholes -mallin nouseva ylihinnottelutrendi ajan pidentyessä.



Kuva 7: Mallien prosentuaaliset hinnoitteluvirheet ennustusotoksesta vuodelta 2009. Kuviossa 1,0 = 100 %. Ryhmien havaintojen lukumäärä on ilmoitettu ryhmän kuukauden yläpuolella.

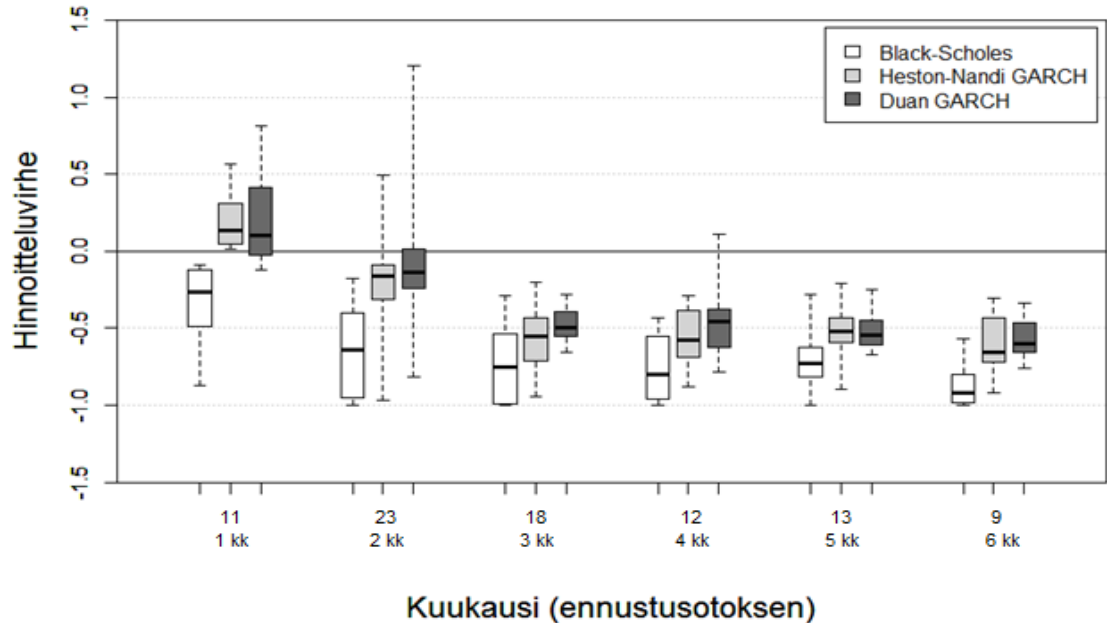
Vuoden 2010 kuukausittaiset hinnoitteluvirheet on esitelty seuraavassa kuvassa 8.



Kuva 8: Mallien prosentuaaliset hinnoitteluvirheet ennustusotoksesta vuodelta 2010. Kuviossa 1,0 = 100 %. Ryhmien havaintojen lukumäärä on ilmoitettu ryhmän kuukauden yläpuolella.

Kuten kaikkien aiempien tulosten perusteellakin, myös laatikkokuvaajista voidaan nähdä Black-Scholes mallin ylivertaisuus vuoden 2010 osalta. Mallien virheet ovat kaikkina kuukausina kyllä hyvin samankokoisia, mutta molemmat GARCH-mallit vaikuttavat ylihinnottelevan systemaattisesti warrantit kaikkien kuukausien osalta. Black-Scholes malli näyttää olevan mediaaneilla mitattuna kaikkina kuukausina lähinnä nollassa. Huomionarvoista on myös, että vuonna 2010 mallit hinnoittelevat warrantit yleisesti tehokkaammin kuin edellisenä vuotena eivätkä minimi- ja maksimiarvot nouse missään vaiheessa yli 80 prosentin. Yleisesti ottaen mallit näyttävät suoriutuvan vuoden 2010 osalta kuukausien välillä hyvin samankaltaisesti lukuunottamatta ensimmäistä kuukautta, jolloin virheet ovat selvästi pienemmät seuraaviin kuukausiin verrattuna.

Kuvassa 9 on esitelty vuoden 2011 prosentuaaliset hinnoitteluvirheet.



Kuva 9: Mallien prosentuaaliset hinnoitteluvirheet ennustusotoksesta vuodelta 2011. Kuviossa 1,0 = 100 %. Ryhmien havaintojen lukumäärä on ilmoitettu ryhmän kuukauden yläpuolella.

Vuoden 2011 osalta kahden ensimmäisen kuukauden aikana hinnoitteluvirheiden hajonta on huomattavasti suurempi aiempaan vuoteen verrattuna. Heston-Nandi -malli vaikuttaa olevan tehokkain ensimmäisen kuukauden aikana, mutta loput viisi kuukautta vaikuttaa vieneen nimiinsä Duanin malli. Tulokset ovat jälleen yhtenevät RMSE-virhetarkastelun tulosten kanssa, mutta paljastavat systemaattisen alihinnoittelun syyksi suurille RMSE-virheille neljän viimeisen kuukauden osalta. Vuonna 2011 Black-Scholes -malli suoriutui selkeästi heikoimmin, joka ilmeni myös RMSE-tarkastelun yhteydessä.

Kuukausittaisen tarkastelun perusteella voitiin selkeästi nähdä kaikkien mallien ennustetarkkuuden heikkenevän kauemmaksi ajassa mentäessä. Voidaan jälleen todeta, että vähintään kuukausittainen mallien kalibrointi on tehokkaan hinnoittelutuloksen kannalta lähes välttämätöntä, sillä mallit vaikuttivat toimivan varsin hyvin ensimmäisen kuukauden aikana kaikkina vuosina tarkasteltuina.

5 JOHTOPÄÄTÖKSET

Tutkielman tarkoituksena oli pyrkiä arvioimaan ja testaamaan suurilla markkinoilla testattujen optiohinnoittelumallien toimivuutta Suomen markkinoilla. Työn empiirinen osuus toteutettiin vertailemalla hinnoittelumallien estimoimia hintoja markkinoiden todellisiin warranttihintoihin ja näiden eroja analysoimalla pyrittiin saamaan kattava kuva kunkin mallin toiminnasta. Tulosten perusteella voitiin tehdä selvästi aikaisempien tutkimustulosten mukaisia havaintoja GARCH-mallien kyvystä ennustaa hintoja Black-Scholes -mallia paremmin varsinkin pidemmän ajan päähän. Kuukausikohtainen tarkastelu osoitti kuitenkin, että myös Black-Scholes -malli näyttää onnistuvan hinnoittelusta osittain jopa GARCH-malleja paremmin heti mallin kalibrointia seuraavana kuukautena. Tulokset vaikuttavat loogisilta, koska kyseiseen malliin on sisällytetty markkinoiden näkemys nimenomaan volatilitietin tulevasta kehityksestä implisiittisen volatilitietin kautta. GARCH-mallit osoittivat toisaalta positiivista kykyään mallintaa warranttihintoja ainoastaan historiallisen osakehintasarjan perusteella. Aiempien tutkimustulosten perusteella voitiin myös selvästi nähdä Duanin GARCH-mallin peittoavan Heston-Nandi -mallin systemaattisesti. Tutkielmassa käytetyt mallit ja teoriat toimivat hyvin asetettujen tutkimuskysymysten arvioinnissa ja tulosten perusteella voidaan sanoa, että kaikkien mallien avulla pystytään ennustamaan warranttien hintoja tarkemmin lyhyen ajan päähän mallien kalibrointihetkestä. Ennustustarkkuus heikkenee kuitenkin nopeasti ennusteperiodin pidentyessä.

Suomen warranttimarkkinat vaikuttavat hintojen ennustamisen näkökulmasta haasteellisilta vähäisen kaupankäynnin vuoksi. Tutkimuksessa käytetty aineisto oli kapea ja markkinatakaajan osto- ja myyntitarjousten keskihintojen huomattiin poikkeavan varsinaisista päivien päätöskursseista suhteellisen paljon. Mahdollisissa jatkotutkimuksissa olisi tärkeää tutkia hinnoittelumallien eroja myös päätöskursseilla. Tämä edellyttäisi, että otos sisältäisi ainoastaan sellaisia warrantteja, joita on vaihdettu juuri ennen markkinoiden sulkeutumista. Nyt käytetyn aineiston perusteella sellaisen aineiston kerääminen voi

muodostua kuitenkin ongelmalliseksi. Ehkä mielenkiintoinen huomio tutkimustulosten perusteella oli Black-Scholes -mallin hyvä menestys vuoden 2010 aineistolla. Vuosi 2010 oli kaikkien mallien kohdalla suhteellisesti paras hinnoitteluvirheiden jäädessä selvästi vuosia 2009 ja 2011 pienemmiksi. Samaan aikaan kohde-etuusindeksin kurssi on ollut tasaisessa nousussa vuoden 2009 alusta lähtien. Tulosten perusteella mallit näyttävät onnistuvan hinnoittelussa kurssien noustessa oletusten mukaisesti, mutta eivät kuitenkaan onnistuneet huomioimaan vuoden 2011 kurssilaskua hinnoittelussa.

Tulevaisuuden jatkotutkimusaiheiksi nousevat yhä kehittyneempien mallien käyttö Suomen warrantimarkkinoilla, sillä nyt testatut mallit antoivat varsin lupaavia ja ennen kaikkea aikaisempien muilla markkinoilla tehtyjen tutkimusten mukaisia tuloksia hinnoittelutarkkuudesta. Black-Scholes -mallin perusteella voidaan todeta, että warrantihinnoista saatavan markkinatiedon lisääminen vaikuttaa parantavan ennustetarkkuutta. Toisaalta myös GARCH-mallien hintaestimaatit antoivat hyviä tuloksia ja implisiittisen volatilitietiedon ja GARCH-mallien yhdistäminen on avainasemassa tulevaisuuden tutkimuskentässä. Tämänkaltaisia tutkimuksia ovat tehneet muun muassa Barone-Adesi et al. (2008), mutta aiheen tutkimus vaikuttaa olevan edelleen vähäistä. Tutkimukset pienemmillä markkinoilla ovat myös edelleen harvassa ja saatavilla olevat aineistot aiheuttavat ongelmia luotettavien tulosten saamiseksi. Tässä tutkimuksessa käsiteltiin ainoastaan ostowarranttien hintoja, joten tulevaisuudessa olisi tärkeää tutkia myös myyntiwarranttien hintoja ja niiden eroavaisuuksia ostowarrantteihin nähden. Samoin myös hintojen jakaumatarkastelut toisivat lisää informaatiota mallien tilastollisesta suoriutumuksesta ja merkitsevyydestä. Myös tulosten hyödynnettävyys sijoittajan näkökulmasta olisi mielenkiintoinen jatkotutkimusaihe.

LÄHDELUETTELO

- Bakshi, G.;Cao, C.;& Chen, Z. (1997). Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models. *Journal of Finance*, 52 (5), 2003-2049.
- Barone-Adesi, G.;Engle, R. F.;& Mancini, L. (2008). A GARCH Option Pricing Model with Filtered Historical Simulation. *Review of Financial Studies*, 21 (3), 1233-1258.
- Bates, D. S. (1991). The Crash of '87: Was It Expected? The Evidence from Options Markets. *Journal of Finance*, 46 (3), 1009-1044.
- Bates, D. S. (2003). Empirical option pricing: A retrospection. *Journal of Econometrics*, 116 (1), 387-404.
- Black, F. (1976). Studies of stock price volatility changes, Proceedings of th 1976 Meetings of the American Statistics Association. *Business and Economics Statistics Section*, 177-181.
- Black, F.;& Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81 (3), 637-654.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*, 31 (3), 307-327.
- Brooks, C. (2005). *Introductory econometrics for finance* (6 p.). Cambridge: Cambridge University Press.
- Christoffersen, P.;& Elkamhi, R. (2010). Option Valuation with Conditional Heteroscedasticity and Non-Normality. *Review of Financial Studies*, 23(5), 2139-2183.
- Christoffersen, P.;& Jacobs, K. (2004a). The Importance of the Loss Function in Option Valuation. *Journal of Financial Economics*, 72 (2), 291-318.
- Christoffersen, P.;& Jacobs, K. (2004b). Which GARCH Model for Option Valuation. *Management Science*, 50 (9), 1204-1221.

- Christoffersen, P.;Heston, S.;& Jacobs, K. (2004). Option Valuation with Conditional Skewness. *Journal of Econometrics*, 131 (1), 253-284.
- Christoffersen, P.;Jacobs, K.;& Mimouni, K. (2006). An Empirical Comparison of Affine and Non-Affine Models for Equity Index Options. *Working Paper*.
- Christoffersen, P.;Jacobs, K.;& Ornathanalai, C. (2012). GARCH Option Valuation: Theory and Evidence. *Creates Research Paper*.
- Cox, J. C.;& Ross, S. A. (1976). The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes. *Journal of Financial Economics*, 3 (1), 145-166.
- Derman, E.;& Kani, I. (1994). Riding on a Smile. *Risk*, 7 (2), 32-39.
- Derman, E.;Kani, I.;& Zou, J. Z. (1996). The Local Volatility Surface: Unlocking the Information In Index Option Prices. *Financial Analysts Journal*, 25-36.
- Duan, J.-C. (1995). The GARCH Option Pricing Model. *Mathematical Finance*, 5 (1), 13-32.
- Duan, J.-C.;& Zhang, H. (2001). Pricing Hang Seng Index options around the Asian financial crisis - A GARCH approach. *Journal of Banking & Finance*, 25 (11), 1989-2014.
- Dumas, B.;Fleming, J.;& Whaley, R. E. (1998). Implied Volatility Functions: Empirical Tests. *Journal of Finance*, 53 (6), 2059-2106.
- Dupire, B. (1994). Pricing with a Smile. *Risk*, 7 (1), 18-20.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50 (4), 987-1007.

- Engle, R. F.; & Ng, V. K. (1993). Measuring and Testing the Impact of News on Volatility. *Journal of Finance*, 48 (5), 1749-1778.
- Engström, M. (2002). Do Swedes smile? On implied volatility functions. *Journal of Multinational Financial Management*, 12 (4), 285-304.
- Heston, S. L. (1993). A Closet-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *Review of Financial Studies*, 6 (2), 327-343.
- Heston, S. L.; & Nandi, S. (2000). A Closed-Form GARCH Option Valuation Model. *Review of Financial Studies*, 13 (3), 585-625.
- Hsieh, K. C.; & Ritchken, P. (2005). An empirical comparison of GARCH option pricing models. *Review of Derivatives Research*, 8 (3), 129-150.
- Hull, J. (2005). *Options, Futures and Other Derivatives* (6th p.). New Jersey: Pearson Prentice Hall.
- Hull, J.; & White, A. (1987). The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. *Journal of Finance*, 42 (2), 281-300.
- Härdle, W.; & Hafner, C. M. (2000). Discrete time option pricing with flexible volatility estimation. *Finance and Stochastics*, 4 (2), 189-207.
- Kou, S. G. (2002). A Jump-Diffusion Model for Option Pricing. *Management Science*, 48 (8), 1086-1101.
- Lehar, A.; Scheicher, M.; & Schittenkopf, C. (2002). GARCH vs Stochastic Volatility: Option Pricing and Risk Management. *Journal of Banking and Finance*, 26 (2), 323-345.
- Merton, R. (1976). Option Pricing When the Underlying Stock Returns Are Discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3 (1), 125-144.

- Merton, R. C. (1973). Theory of Rational Option Pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (1), 141-183.
- Nikkinen, J. (2003). Normality tests of option-implied risk-neutral densities: evidence from the small Finnish market. *International Review of Financial Analysis*, 12 (2), 99-116.
- Nordén, L. (2003). Asymmetric option price distribution and bid-ask quotes: consequences for implied volatility smile. *Journal of Multinational Financial Management*, 13 (4), 423-441.
- Rubinstein, M. (1985). Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976 through August 31, 1978. *The Journal of Finance*, 40 (2), 455-480.
- Rubinstein, M. (1994). Implied Binomial Trees. *Journal of Finance*, 49 (3), 771-818.
- Siu, T.; Tong, H.; & Yang, H. (2004). On Pricing Derivatives under GARCH Models: A Dynamic Gerver-Shiu's Approach. *North American Actuarial Journal*, 8, 17-31.

LIITTEET

LIITE 1: Tutkimuksessa käytetyt ohjelmistot ja menetelmät

Käytettävät ohjelmistot

Tämän tutkimuksen tilastollisten testien ja mallien ajamiseen käytettiin R- ja MATLAB -ohjelmistoja. Aineiston käsittelyyn ja muokkaukseen sekä taulukoiden luomiseen käytettiin Microsoft Excel 2010 -ohjelmistoa, jolla ajettiin myös regressiomallit. Box-whisker -laatikkokuvaajat on muodostettu R- ohjelmistolla.

Käytetyt koodit ja paketit

Heston-Nandi GARCH-mallin mukaisien optiohintojen laskemiseen käytettiin yleisesti saatavilla olevaa R-ohjelmiston *fOptions* -pakettia. Käytetystä paketista löytyy tarvittavat koodit GARCH-parametrien estimointiin MLE-menetelmällä sekä varsinaisten optiohintojen laskemiseen tarvittavat yhtälöt.

Käytetty alkuperäinen koodi löytyy osoitteesta:

<http://cran.r-project.org/web/packages/fOptions/>

Duan GARCH-mallin mukaisten optiohintojen laskemiseen käytettiin puolestaan MATLAB-ohjelmistoa. Käytettävän koodin tarjosi Volopta-internetsivusto. Koodin perusteella pystyttiin estimoimaan GARCH-parametrit MLE-menetelmällä. Koodissa oli myös mukana optiohintojen simulointi.

Käytetty alkuperäinen koodi löytyy osoitteesta:

<http://www.volopta.com/Matlab.html>

LIITE 2: Regressioyhtälöiden tulokset

Taulukoissa on esitetty implisiittisen volatilitteen regressioyhtälöiden tulokset.

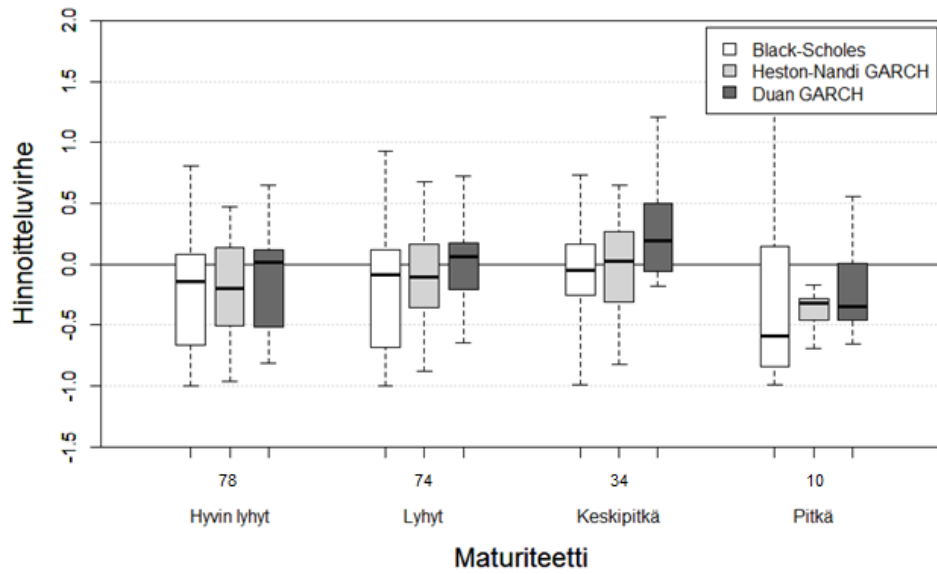
Vuosi	2009	2010	2011
Selitysaste	0,432	0,407	0,355
Korjattu selitysaste	0,359	0,347	0,263
F testi	5,920	6,727	3,860
P-arvo	<0,000	<0,000	0,007
Keskivirhe	0,030	0,033	0,021
Havainnot	45	55	41

Kertoimet	k	t testi	P-arvo	k	t testi	P-arvo	k	t testi	P-arvo
Vakio	-0,148	-0,198	0,844	-5,247	-2,708	0,009	-1,778	-2,506	0,017
S/X	1,220	0,834	0,409	11,475	3,032	0,004	4,050	2,859	0,007
(S/X) ²	-0,606	-0,840	0,406	-5,926	-3,200	0,002	-2,034	-2,878	0,007
T	-0,321	-0,474	0,638	1,697	1,836	0,072	0,078	0,361	0,721
T ²	0,552	2,180	0,035	-0,198	-1,418	0,162	-0,221	-2,921	0,006
(S/X) * T	-0,163	-0,284	0,778	-1,749	-1,974	0,054	0,107	0,473	0,639

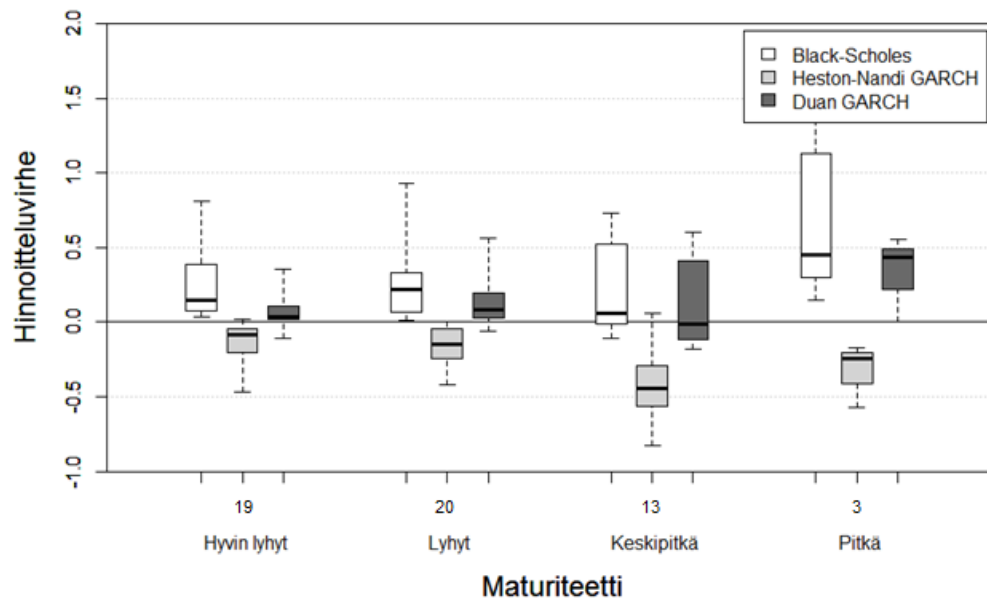
S/X = Kohde-etuuden hinta / Warrantin toteutushinta, T = maturiteetti vuosina

LIITE 3: Box-whisker kuvaajat maturiteetin mukaan

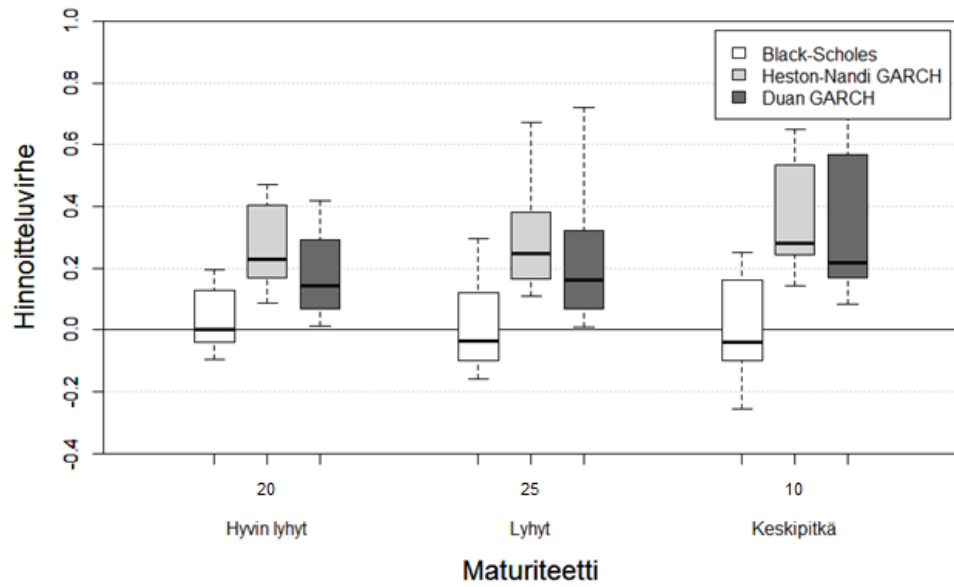
Alla olevissa box-whisker -kuvaajissa on esitetty prosentuaaliset hinnoitteluvirheet maturiteetin mukaan ryhmiteltyinä.



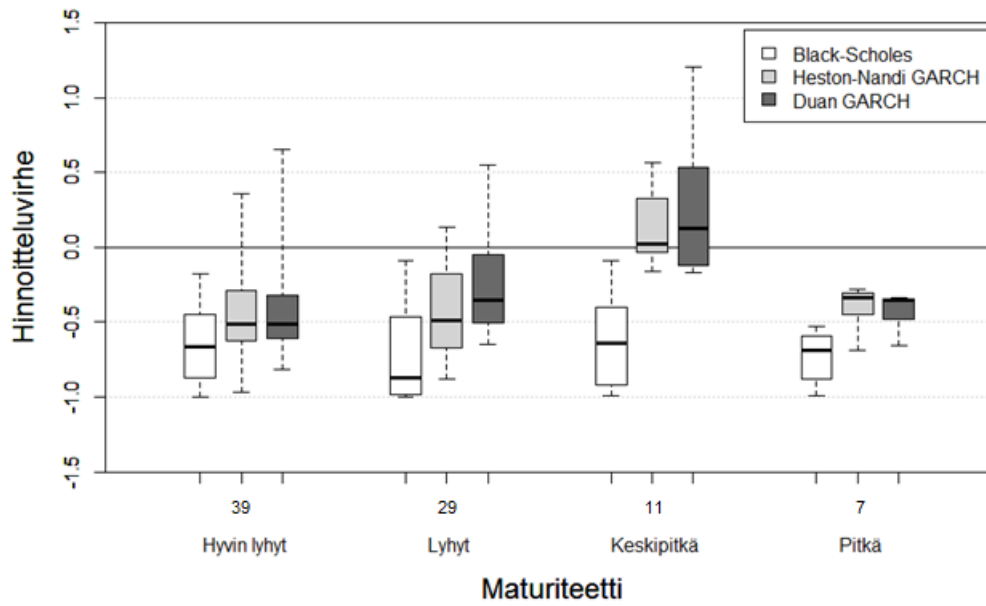
Kuva 10: Vuosilta 2009-2011 per maturiteetti



Kuva 11: Vuosi 2009 per maturiteetti



Kuva 12: Vuosi 2010 per maturiteetti



Kuva 13: Vuosi 2011 per maturiteetti