

LAPPEENRANNAN TEKNILLINEN YLIOPISTO
Teknillinen tiedekunta / LUT School of Energy Systems
LUT Kone
Koneensuunnittelu

Elias Altarriba

**SEKAELEMENTIT ABSOLUUTTISTEN SOLMUKOORDINAATTIEN
MENETELMÄSSÄ**

Työn tarkastajat:

Jari Mäkinen (TUT)
Timo Nykänen (LUT)

Työn ohjaajat:

Prof. Aki Mikkola (LUT)
TkT Marko Matikainen (LUT)

TIIVISTELMÄ

Lappeenrannan teknillinen yliopisto
Teknillinen tiedekunta
Koneensuunnittelu

Elias Altarriba

Sekaelementit absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmässä

Lisensiaatintyö

2015

87 sivua, 8 kuvaa ja 18 taulukkoa

Tarkastajat: Jari Mäkinen, apulaisprofessori, Tampereen teknillinen yliopisto
Timo Nykänen, TkT, Lappeenrannan teknillinen yliopisto

Hakusanat: Sekaelementit, solidielementit, absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmä, elementtimenetelmä, ANCF, FEM

Keywords: Mixed finite elements, solid elements, absolute nodal coordinate formulation, finite element method, ANCF, FEM

Tässä lisensiaatintyössä käsitellään sekaelementtien sovellusmahdollisuuksia absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmässä. Absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmä on uudentyyppinen lähestymistapa elementtimenetelmän elementtien koordinaattien määrittämiseksi ja sen yhtenä tavoitteena on tehostaa suuria siirtymiä tai kiertymiä sisältävien elementtien laskentatehokkuutta. Tässä työssä absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmä esitellään pääpiirteittäin sekä annetaan esimerkkejä muutamista tyypillisimmistä elementeistä lausuttuna edellä mainittujen koordinaattien perusteella.

Sekaelementeiksi kutsutaan elementtityyppejä, missä tuntemattomien muuttujien joukkoja on aina enemmän kuin yksi. Sekaelementit erottavat redusoitumattomista elementeistä siirtymäkentän sisältyminen muuttujaryhmään ja hybridielementeistä muuttujien identtiset ulottuvuudet. Sekaelementtejä käytetään esimerkiksi kokoonpuristumattomien materiaalien rakenneanalyyseissä, alentamaan elementiltä vaadittavia jatkuvuusehtoja tai mallintamaan ilmiöitä, missä fysikaaliset ominaisuudet ovat jostain syystä voimakkaasti toisistaan riippuvaisia.

Tämän lisensiaatintyön kirjoittamiseksi on tehty tutkimusta sekaelementtien mahdollisuuksista toimia absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmässä. Tutkimuksen tuloksena on saatu aikaan kaksi tässä työssä esiteltävää, varsin rajatun toimintakyvyn omaavaa sekaelementtityyppiä, joiden siirtymäkentät on määritelty globaalien koordinaattien suhteen sisältäen myös orientaatiotermit. Tutkimusaihe vaatii kuitenkin vielä paljon lisätyötä, ennen kuin sekaelementtityyppejä voidaan kauttaaltaan soveltaa absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä toteutetuissa rakenneanalyyseissä.

ABSTRACT

Lappeenranta University of Technology
Faculty of Technology
Machine Design

Elias Altarriba

Mixed Solid Elements Based on the Absolute Nodal Coordinate Formulation

Thesis of Licentiate of Science (Technology)

2015

87 pages, 8 pictures, 18 tables

Examiners: Jari Mäkinen, Associate Professor, Tampere University of Technology
Timo Nykänen, Dr. Sc. (Tech.), Lappeenranta University of Technology

Keywords: Mixed finite elements, solid elements, absolute nodal coordinate formulation, finite element method, ANCF, FEM

This thesis investigates a mixed finite element formulation based on the absolute nodal coordinate formulation, a relatively new approach that adds orientation terms making it possible to orient the coordinate system of a finite element with respect to the global frame of reference. The most important benefit is that it results in reliable finite elements that are capable of accommodating large rotations or deformations. The thesis gives a general presentation of the absolute nodal coordinate formulation and offers some examples of the finite elements.

Mixed finite elements belong to a special group of elements having more than one unknown variable. They differ from irreducible finite elements in that the displacement field is always included in mixed finite elements. They differ from hybrid elements in that the dimensions of their variables are always equal in level. Mixed finite element formulations can be used when incompressible materials are investigated, continuous requirements of the element are reduced, or there is a difficult interconnection of physical phenomena.

The work described here begins with an investigation into how mixed finite elements can best be attached based on the absolute nodal coordinate formulation. It continues with two types of mixed finite elements being attached to the absolute nodal coordinate formulation and being tested with a number of example numerical analyses. The examples reveal that more research work and investigation will be needed before mixed finite elements can be applied in a straightforward and direct manner in the absolute nodal coordinate formulation.

SISÄLLYSLUETTELO

1. Johdanto.....	1
2. Elementtiteoriat.....	8
2.1 Absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmä.....	8
2.1.1 Elementin lausuminen globaalin koordinaatiston suhteen.....	8
2.1.2 Elementin liikeyhtälöt.....	11
2.1.3 Ulkoiset voimat ja momentit.....	12
2.2 Esimerkkejä palkki- ja laattaelementeistä.....	15
2.2.1 Palkkielementti (Euler-Bernoulli).....	16
2.2.2 Palkkielementti (Timoshenko).....	19
2.2.3 Laattaelementti (Kirchhoff).....	20
2.2.4 Laattaelementti (Reissner-Mindlin).....	23
2.3 Sekaelementtimenetelmä.....	25
2.3.1 Sekaelementit elementtimenetelmässä.....	25
2.3.2 Sekaelementtien sovellusmahdollisuudet.....	27
2.3.3 Sekaelementtien numeerinen stabiilius.....	30
2.4 Esimerkkejä sekaelementeistä.....	34
2.4.1 Veubeke-Hu-Washizu-sekaelementit.....	34
2.4.2 Kokoonpuristumattomuutta analyysoivat elementit.....	37
3. Sekaelementit ja absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmä.....	42
3.1 Siirtymä-jännityselementti.....	42
3.1.1 Siirtymä-jännitys-sekaelementtikonstruktio.....	42
3.1.2 Siirtymä-jännitys-sekaelementin suorituskyky.....	47
3.2 Siirtymä-paine-elementti.....	54
3.2.1 Siirtymä-paine-sekaelementtikonstruktio.....	54
3.2.2 Siirtymä-paine-sekaelementin suorituskyky.....	59
4. Päätelmät.....	66
4.1 Tutkimuskysymys.....	66
4.2 Tasapainoehdot.....	68
4.3 Muotofunktiot ja liikeyhtälöt.....	70
4.4 Tulevaisuuden kehitysmahdollisuudet.....	72
5. Yhteenveto.....	75
Lähdeluettelo.....	77

KÄYTETYT MERKINNÄT

Latinalaiset aakkoset

A	pinta-ala
E	kimmokerroin
H	korkeus
I	jäyhyysmomentti
k	käyryyskerroin
L	pituus
M	momentti
n	vapausasteiden lukumäärä
T	kineettinen energia
U	elastinen energia
ν	Poissonin suppeumaluku
V	tilavuus
δW	virtuaalinen työ
W	paksuus

Kreikkalaiset aakkoset

Γ	lukuavaruus
Δ	suureen muutos
λ	Lamé'n parametri
μ	Lamé'n parametri
Π	funktionaali
τ	leikkausjännitys
ρ	tiheys
σ	normaalijännitys
Ω	lukuavaruus

Matriisit

B	kinemaattinen matriisi
E	kimmomatriisi
I	yksikkömatriisi
J	Jacobin matriisi
K	jäykkyysmatriisi
L	differentiaalioperaattori
M	massamatriisi
S	muotofunktio matriisi
V	jännityskentän interpolointifunktio matriisi
Z	venymäkentän interpolointifunktio matriisi

Vektorit

e	solmusiirtymävektori (ANCF)
k	käyryysvektori
f_{el}	elastisten voimien vektori
f_{ext}	ulkoisten voimien vektori
f_p	ulkoisten pintavoimien vektori
f_s	ulkoisten tilavuusvoimien vektori
r	asema- ja orientaatiovektori
u	solmusiirtymävektori (FEM)
ε	venymävektori
σ	jännitysvektori

Ylä- ja alaindeksit

el	elastinen voima
EN	Venymiä paremmin approksimoiva Vebeuke-Hu-Washizu-funktionaali
ext	ulkoinen voima
GL	Green-Lagrangen venymätensori
HR	Hellinger-Reissner-funktionaali
i	valittu elementti
p	pinta-alaan viittaava alaindeksi
s	tilavuuteen viittaava alaindeksi
VHW	Vebeuke-Hu-Washizu-funktionaali

ALKUSANAT

Haluan kiittää tämän työn valmistumista edesauttaneita tahoja. Heitä ovat muun muassa Lappeenrannan teknillisen yliopiston koneensuunnittelun professori Aki Mikkola ja tutkijatohtori Marko Matikainen. Lisäksi tohtori Oleg Dmitrochenko on antanut arvokkaita neuvoja, joiden avulla monet tässä työssä esitetyt tutkimusongelmat on saatu ratkaistua. Professori Josep M. Font-Llagunes Barcelonan UPC-yliopistosta toimi isäntänäni vuoden kestäneen tutkijavierailuni aikana. Tämä liseniaatintyö on valtaosaltaan kirjoitettu Barcelonassa, mistä kiitos hänelle.

Päärahoittaja, Suomen Akatemia, ansaitsee myös kiitokset (projekti #133154). Lisäksi tätä tutkimusta ovat rahoittaneet myös Lappeenrannan teknillinen yliopisto sekä loppuvaiheessa myös VidRoM-tutkimuskonsortio. Säätiöiden osalta toimintaa ovat olleet tukemassa myös Lappeenrannan teknillisen yliopiston tukisäätiö, Emil Aaltosen säätiö ja KAUTE-säätiö. Heille kaikille lämmin kiitos, tukenne on ollut tärkeää ja merkityksellistä.

Tämän lisäksi myös monet muut henkilöt ja tahot ansaitsevat kiitoksensa. Heidän panoksensa usein hukkuu ”verhoihin” ollen silti kuitenkin tärkeää lopputuloksen saavuttamisen kannalta. Tällaisesta listasta vain tulisi aika pitkä. Erityisesti haluan kuitenkin muistaa opintotoimiston väkeä, Sari Damsténia ja Eeva Häyristä. Teiltä on aina saanut vastauksen siihen, mitä kysytään; silloin, kun kysytään. Toivon, että jatkatte arvokasta työtänne yliopistomme jatko-opiskelijoiden parissa vielä pitkään.

Kaikki hyvin etenevä ei välttämättä ole hyvin suunniteltua, eikä kaikki hyvin suunniteltu välttämättä etene hyvin. Sellaista elämä on.

Lappeenrannassa 8.9.2015

Elias Altarriba

Elias Altarriba

1. Johdanto

Insinööritieteissä sovelletaan paljon erityyppisiä rakenneanalyyskejä (Gere ym., 1990; Craig ym., 2006; García de Jalón ym., 1994) tarkoituksena simuloida suunniteltuja tai jo olemassa olevia systeemejä. Tietotekniikan kehittymisen myötä tästä virtuaalisuunnitteluksi kutsutusta tieteenhaarasta on tullut jatkuvasti keskeisempi menetelmäkokonaisuus, minkä avulla tehostetaan monissa tapauksissa merkittävällä tavalla esimerkiksi kokonaista tuotekehitysprosessia. Tämän kehityskulun seurauksena suunnittelutyö toteutetaan usein lähes kokonaisuudessaan tietokoneavusteisesti sisältäen myös lukuisat suunniteltavalle kohteelle tehtävät rakenne- tai muun tyyppiset analyysit. Suunnittelumalleja käytetään myös CNC-koneiden ohjaukseen, jolloin virtuaalisuunnittelusta on sellaisenaan hyötyä myös valmistusprosessissa.

Rakeneanalyyskejä tehtäessä on usein tarkoituksena tarkastella tutkimuksen kohteena olevan systeemin käyttäytymistä haluttujen ominaisuuksien, voimien ja muiden fysikaalisten ilmiöiden vaikutuksen alla, tarkoituksena tehdä johtopäätöksiä systeemin soveltuvuudesta kyseisiin olosuhteisiin. Tämänkaltaisella soveltuvuustarkastelulla voidaan tarkoittaa joko täysin uuden, vielä suunnittelupöydällä olevan systeemin ominaisuuksien tarkastelua tai vaihtoehtoisesti jo olemassa olevan systeemin sisältämien osien tai ominaisuuksien toimintaa niin normaalisti vallitsevissa olosuhteissa kuin erikoistilanteissakin.

Rakenteiden analysointi voidaan toteuttaa tutkimusongelmasta riippuen monilla eri lähestymistavoilla. Esimerkiksi koneenrakennustekniikassa aiemmin, konerakenteiden ollessa huomattavasti nykyistä yksinkertaisempia, laskettiin komponenttien ominaisuuksia yleensä komponenttikohtaisesti, usein soveltaen klassisen lujuusopin analyttisiä ja differentiaalisia yhtälöitä (Gere ym., 1990; Craig ym. 2006). Nämä laskentamallit kehittyivät 1700- ja 1800-lukujen aikana perustuen Newtonin klassiseen mekaniikkaan sekä muun muassa Cauchyn ja Poissonin työhön materiaaliominaisuuksien matemaattisen mallinnuksen parissa. Tätä aiemmin suunnittelutyö perustui hyvin pitkälle kokemuseräiseen tietoon rakenteiden ja materiaalien kuormituskäyttäytymisestä erilaisissa olosuhteissa. Erityisesti koneenrakennustekniikassa yhtenä merkittävänä edistysaskeleena olivat Wöhlerin tutkimukset rautatiekaluston akseleiden väsymisestä, minkä seurauksena rakenteiden analysoinnissa alettiin huomioida myös kuormitushistoria, jolloin monet aiemmin selittämättömät vauriot voitiin ehkäistä jo suunnittelupöydällä.

Klassisen lujuusopin soveltamisen selkeänä haasteena ovat kuitenkin muodoltaan tai muilta ominaisuuksiltaan monimutkaiset rakenteet (Gere ym., 1990; Hakala, 1986). Alun perin tämäntyyppisiä ongelmia tuli vastaan muun muassa moottoritekniikassa, sekä erityisesti ilma-alusten kehitystyössä, missä yhtenä tärkeänä tarkastelukokonaisuutena on ilma-aluksen runkorakenteen aerodynamiikka ja kestävyys. Näihin haasteisiin vastatakseen Hrennikoff (1941) ja Courant (1943) esittelivät uudenlaisen lähestymistavan, missä tarkasteltavana olevan systeemin ominaisuuksia määrittävän jatkuvan funktion arvojoukkoa diskretisoidaan, eli paloittellaan äärellisiin tarkasteluväleihin käyttäen valittua jakoväliä, eli verkkoa.

Hrennikoffin ja Courantin esittelemä idea on nimetty sittemmin äärellisten elementtien menetelmäksi (Hakala, 1986; Bathe, 1996; Cook ym., 2001; Zienkiewicz ym., 2000a). Tämä rakenneanalyttinen lähestymistapa perustuu osittain Rayleigh-Ritzin teoriaan (Bremer, 2008), missä systeemiä mallintavien kantafunktioiden joukosta valittu tuntemattomien muuttujien suhteen diskretoitu lineaarikombinaatio sijoitetaan ratkaistavaa ongelmaa parhaiten mallintavaan funktionaaliin. Sijoituksen jälkeen funktionaalin ääriarvoja approksimoidaan tuntemattomien diskreettien muuttujien suhteen. Toinen merkittävä elementtimenetelmään vaikuttanut teoria on Galerkinin (Zienkiewicz ym. 2000a) esittelemä, samankantaisiin painofunktioihin perustuva lähestymistapa osittaisdifferentiaaliyhtälöiden tehokkaaksi ratkaisemiseksi. 1900-luvun jälkipuoliskolla nopeasti kehittyneen tietotekniikan mahdollistaessa merkittävästi tehokkaammat numeeriset analyysit, kehittyi elementtimenetelmästä kaupalliseen käyttöön kelpaavia sovelluksia 1970-lukuun mennessä.

Elementtimenetelmällä on mahdollista simuloida myös mallinnettavien monikappalesysteemien dynamiikkaa (Géraldin ym., 2001; Shabana, 2010), mutta tähän tarkoitukseen se ei kuitenkaan aina ole tehokkain mahdollinen lähestymistapa (Schiehlen, 1997; Shabana, 1997b). Asia korostuu erityisesti simuloitaessa erittäin jäykkien kappaleiden dynaamisia systeemejä, missä elementtimenetelmä voi aiheuttaa tuloksiin liikaa numeerista epätarkkuutta ja on usein myös laskennallisesti tarpeettoman raskas. Myös reunaehtojen asettaminen jäykkien kappaleiden dynaamisia, usein erityyppisiä niveliä sisältäviä systeemejä ajatellen voi olla tapauksesta riippuen monimutkaista ja hankalasti toteutettavaa (Shabana, 2010). Näiden haasteiden ratkaisemiseksi on dynamiikan mallintamiseen omaksuttu yleensä toinen, monikappaledynamiikaksi (Schiehlen, 1997; Shabana, 1997b; Shabana, 2010) kutsuttu lähestymistapa.

Monikappaledynamiikka on laaja teoriakokonaisuus, mikä on alun perin kehitetty jäykkien kappaleiden fysiikan simulointiin, mutta sittemmin kyseistä teoriajoukkoa on laajennettu mahdollistamaan myös muun muassa joustavuuden mallintaminen (García de Jalón ym., 1994; Géraldin ym., 2001; Bremer, 2008; Shabana, 2010). Monikappaledynamiikan teoreettisen perustan ovat alun perin luoneet Newtonin klassinen fysiikka ja Eulerin menetelmät systeemin rajoitteiden ja nivelien määrittämiseksi. Myöhemmin d'Alembert (1743) esitteli monikappaledynamiikassa keskeisen virtuaalisen työn teorian ja Lagrange (1788) edelleen käytössä olevan ratkaisumallin rajoitetun systeemin dynamiikan laskemiseksi. Tämän jälkeen monikappaledynamiikan teoriakokonaisuutta on kehitetty ja täydennetty useaan otteeseen sisällyttämällä siihen muun muassa ominaisuuksiltaan erilaisia rajoitteiden määrittelymenetelmiä (Shabana, 2010), kontaktimallinnustyökaluja (García de Jalón ym., 1994), joustavuuden mallinnusta, erilaisia integrointimenetelmiä (Géraldin ym., 2001; García de Jalón ym., 1994), sekä lukuisia koordinaattisysteemejä (García de Jalón ym., 1994). 1980-luvulle tultaessa monikappaledynamiikasta on tullut keskeinen dynamiikan analysointimenetelmä myös kaupallisissa ohjelmistoissa.

Ajateltaessa sekä elementtimenetelmän että monikappaledynamiikan teoriakokonaisuuksille sovelluskohteiden asettamia vaatimuksia, voitaisiin listaa helposti kasvattaa loputtomiin. Myös keskeisimmistä vaatimuksista voidaan kiistellä (Géraldin ym., 2001; García de Jalón ym., 1994; Wriggers, 2008), mutta muutamat tärkeät ominaisuudet voitaneen listata täten:

Elementtimenetelmä

- Lukkiutumattomuus
- Taivutustarkkuus
- Verkosta riippumaton laskentatarkkuus
- Elementtiyhtälöiden yksinkertaisuus
- Laskentatehokkuus

Monikappaledynamiikka

- Rajoitteet ja reunaehdot
- Nivelet ja liitokset
- Joustavuus ja muodonmuutokset
- Kiertymien dynamiikka
- Dynamiikkayhtälöiden yksinkertaisuus
- Laskentatehokkuus

Osin nämä vaatimukset ovat yhteneviä, kuten on laita esimerkiksi laskentatehokkuuden ja yhtälöiden numeerisen ratkaistavuuden suhteen. Verkosta riippuvat tekijät ja lukkiutumisen ilmiö ovat elementtimenetelmän ongelmia siinä missä kiertymien ja erityyppisten nivelrajoitteiden määrittäminen painottuu enemmän monikappaledynamiikkaan.

Puhuttaessa monikappaledynamiikasta ja elementtimenetelmästä on kuitenkin syytä huomata, että osa tieteen tekijöistä katsoo elementtimenetelmän olevan nykyään osa monikappaledynamiikan teoriakokonaisuutta (Shabana, 2010; Géraldin ym., 2001; Wriggers, 2008). Tämä näkemys ei kuitenkaan ole kauttaaltaan hyväksytty johtuen osittain molempien menetelmien nopeasta kehittämisestä viime vuosikymmeninä sekä molempien teorioiden kehityshistorian erilaisuudesta. Lisäksi näiden teorioiden käyttötarkoituksessa ja sovellettavuudessa on myös merkittäviä eroavuuksia. Tämän vuoksi elementtimenetelmää usein tarkastellaan edelleen myös omana teoriakokonaisuutena (Cook ym., 2001; Castersen ym. 2009; Zienkiewicz ym., 2000a, Zienkiewicz ym., 2000b).

Kappaleen joustavuuden menestyksellä mallintaminen (Craig ym., 2006; Géraldin ym., 2001;) on teollisuuden ja tieteen tarpeita ajatellen usein vähintään yhtä tärkeä asia, kuin systeemin dynamiikan mallinnus tarkoituksenmukaisella tarkkuudella (García de Jalón ym., 1994). Tämä vaatimus on myös yhtenäinen niin elementtimenetelmälle kuin monikappaledynamiikallekin riippumatta siitä, halutaanko ne katsoa kuuluvaksi samaan teoriakokonaisuuteen vai ei. Esimerkiksi kokoonpanorobottien kehitystyössä tämä vaatimus tulee usein esille, kun suunniteltavan robotin nivelvarsien dynamiikkaan vaikuttavat yhtä lailla käyttölaitteiden tuottamat toivotut liikkeet ja niistä aiheutuva dynaaminen kohina, sekä yhtä lailla myös robotin komponenttien joustot ja niistä usein seuraavat värähtelyt (Hoekstra, 1986). Joustavuuden mallintamiseen on olemassa lukuisia eri lähestymistapoja, joita ovat esimerkiksi kelluvan koordinaatiston menetelmä, keskittyneiden massojen teoria (Shabana, 2010) ja Craig-Bampton-muotoihin perustuva lähestymistapa (Craig ym., 2006).

Joustavuuden mallintaminen kelluvan koordinaatiston menetelmällä perustuu kahden erityyppisen koordinaattijoukon soveltamiseen (Shabana, 2010). Toinen koordinaattijoukko määrittää kappaleen sijainnin ja orientaation kappaleen oman referenssikoordinaatiston suhteen, ja vastaavasti toinen koordinaattijoukoista taas näissä valituissa pisteissä tapahtuneen poikkeaman, eli siis käytännössä kappaleessa tapahtuneen muodonmuutoksen. Näiden koordinaattijoukkojen summavektorit lausutaan globaalin sijaintinsa suhteen määrittämällä kappaleen lokaalin koordinaatiston origon sijainti, ja orientaationsa suhteen käyttäen esimerkiksi Eulerin kulmiin, parametreihin tai Rodriguesin yhtälöön perustuvaa kiertomatriisia (Géraldin ym., 2001; Shabana, 2010).

Kelluvan koordinaatiston menetelmä ei kuitenkaan ole tehokas, mikäli tarkoituksena on mallintaa suuria muodonmuutoksia sisältäviä systeemejä (Shabana, 2010). Tähän ongelmaan on viimeisten 15 vuoden aikana etsitty ratkaisua absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmästä, joka on kehitetty alun perin Shabanan (1996, 1997a) tutkimuksen tuloksena simuloimaan erityisesti systeemejä, missä elementtikohtaiset muodonmuutokset ja kiertymät voivat olla poikkeuksellisen suuria. Absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmä perustuu osittain muun muassa teoriaan suurten kiertymien mallintamisesta asemavektorein (Shabana, 2010), missä absoluuttisten solmukoordinaattien tapaan elementin solmukoordinaatit lausutaan globaalin koordinaatiston origon suhteen. Tässä lähestymistavassa solmujen orientaatio määritetään pienten, virtuaalisten kiertymien avulla, minkä seurauksena singulaarisuusongelmat ovat tavallisia (Géraldin ym. 2001; García de Jalón ym., 1994; Shabana, 2010). Nämä ongelmat ilmenevät usein erityisesti palkkielementtien tapauksessa leikkausmuodonmuutosten ollessa lausuttuna Serret-Frenet-koordinaatiston (Serret, 1851; Frenet, 1852) avulla. Toisaalta on kuitenkin myös havaittu, että myös Euler-Bernoullin elementti voi usein olla taipuvainen singulaarisuuteen (Shabana, 2010). Singulaarisuusongelmat ovat yksi keskeinen syy siihen, minkä vuoksi mainitun lähestymistavan soveltaminen on harvinaista.

Absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmässä sekä elementin solmujen sijainti että niiden orientaatio lausutaan globaalin origon suhteen siten, että solmukohtainen orientaatio määritellään kyseisen solmun asemavektorin komponenttien osittaisderivaatoin globaalien koordinaattiakseleiden suhteen (Shabana, 1996). Toisin sanoen, tässä siis lasketaan muotofunktioiden kulmakertoimia globaalin koordinaatiston suhteen akselikohtaisesti. Tämän lähestymistavan ansiosta ei solmujen orientaatioiden määrittämiseksi tarvita virtuaalisia kiertymiä (Géraldin ym. 2001; García de Jalón ym., 1994), jolloin niihin liittyneistä singulaarisuusongelmista päästään eroon (Shabana, 1996; Shabana, 1997a). Absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmässä jokainen solmu saa siis asemakoordinaattiansa lisäksi lukuisia orientaatiokoordinaatteja, joiden määrään vaikuttavat valittu koordinaatisto ulottuvuuksineen sekä haluttu tarkkuus orientaation suhteen. Täysin parametrisoitu elementti sisältää orientaatiot kaikkien koordinaattiakseleiden suhteen, tosin sovelluskohteesta riippuen tätä lausuntatapaa ei kuitenkaan aina käytetä. Esimerkiksi laatat ja palkit sisältävät usein poikkeuksia.

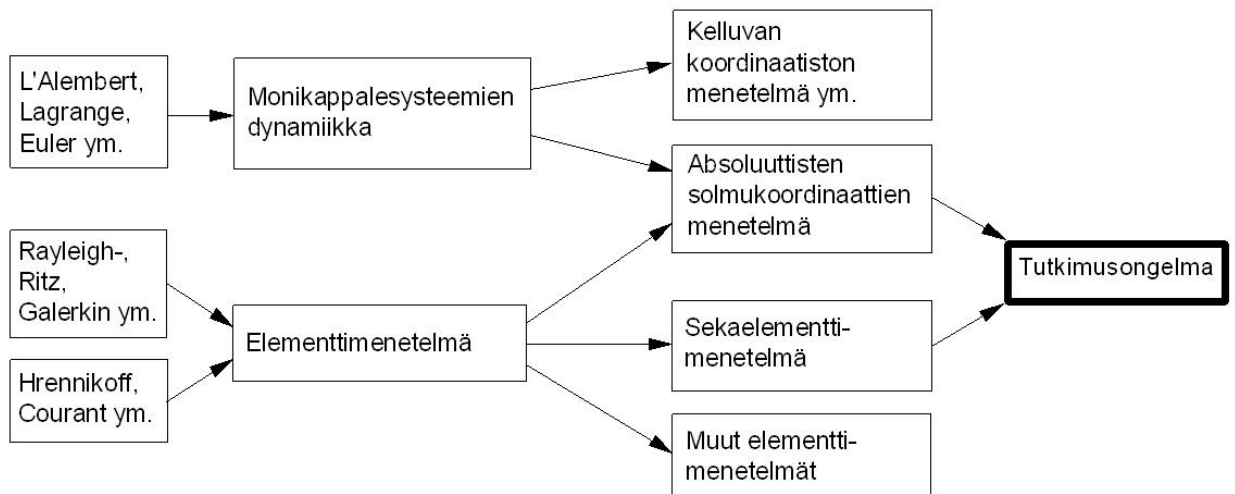
Absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmän esittelyn jälkeen tätä lähestymistapaa on täydennetty muun muassa lausumalla lukuisia eri elementtityyppejä absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä, tutkittu voimien ja momenttien laskentaa ja mallinnusta kyseisessä koordinaatistossa sekä perehdytty menetelmän yleiseen sovelluskelpoisuuteen (Shabana, 1997a; Schiehlen, 1997; Schiehlen, 2006). Toistaiseksi absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä on esitelty muun muassa erityyppisiä palkkielementtejä perustuen Euler-Bernoullin ja Timoshenkon palkkiteorioihin (Omar ym., 2001; Dmitrochenko ym., 2003; Iwai ym., 2003; Dufva ym., 2004; Dufva ym., 2005). Myös Kirchoffin ja Reissner-Mindlinin laattatyyppit (Dufva ym., 2005; Mikkola ym., 2003; Mikkola ym., 2006), sekä kuori- ja viivaelementtejä on tutkittu (Mikkola ym., 2004; Kerkkänen ym., 2006). Voimien ja momenttien mallinnuksesta ovat tehneet tutkimusta muun muassa Escalona ym. (1998), Berzeri ym. (2000), sekä Mikkola ym. (2003). Absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmää on pyritty soveltamaan myös muun tyyppistenkin ongelmien ratkaisemiseksi, kuten pietsosähköisten ilmiöiden simulointiin (Nada ym., 2012). Lisäksi menetelmää on sovellettu jännitysten analysointiin (Gerstmayr ym., 2006) ja plastisen muodonmuutoksen simulointiin (Gerstmayr ym., 2004). Laskentatehokkuuden parantamiseksi niin elementin ominaisuuksia (Gerstmayr ym., 2008; Gerstmayr ym., 2008), kuin niille soveltuvia integrointimenetelmiäkin on kehitetty (Sanborn ym., 2009). Toistaiseksi tätä menetelmää ei kaupallisissa sovelluksissa vielä kuitenkaan käytetä.

Absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmässä monentyyppiset elementit kykenevät käsittelemään huomattavan suuria muodonmuutoksia (Shabana, 1996; Shabana, 1997a; Shabana, 2008; Shabana, 2010). Esimerkiksi viivaelementin voi fysikaalisista ominaisuuksista riippuen vääntää lähestulkoon solmuun itsensä ympäri (Berzeri ym., 2000), yhden ainoan laattaelementin avulla voidaan teoriassa simuloida vaikkapa vapaasti riippuvaa lakanaa (Dmitrochenko ym., 2003; Mikkola ym., 2003) ja muun muassa hihnan käyttäytyminen hihnapyörien suhteen voidaan toteuttaa perinteiseen elementtimenetelmään nähden huomattavan pienellä elementtimäärällä (Kerkkänen ym., 2006). Suurten muodonmuutosten teoreettinen mahdollistaminen ei kuitenkaan tee menetelmästä vielä automaattisesti tarkkaa (Gerstmayr ym., 2008) mallinnettaessa suuria muodonmuutoksia sisältäviä systeemejä. Lisäksi kokemus on osoittanut, että usein tämä lähestymistapa vaatii elementtien pienestä määrästä huolimatta elementtikohtaista laskentatehoa paljon enemmän, kuin mihin on totuttu tavanomaisen elementtimenetelmän sovelluksissa.

Absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmän tarjoamat mahdollisuudet ovat pitäneet huolen siitä, että tutkimustyö kyseisen teoriakokonaisuuden parissa on katsottu tarpeelliseksi (Schiehlen, 1997; Schiehlen, 2006; Shabana, 2008). Sekaelementtien (Castersen ym., 2009; Boffi ym., 2008) kykyä toimia absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmässä on kuitenkin tähän mennessä tutkittu varsin vähäisesti ja tulokset ovat olleet toistaiseksi laihoja (Altarriba ym., 2012). On kuitenkin syytä otaksua, että sekaelementtien avulla voidaan absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä mallintaa useita sellaisia fysikaalisia ominaisuuksia, joiden mallintaminen ilman sekaelementtejä on haastavaa tai joissain tapauksissa ehkä jopa mahdotonta (Castersen ym., 2009; Zienkiewicz ym., 2000a). Näitä ilmiöitä voivat olla muun muassa kokoon puristumattomien materiaalien mallintaminen (Zienkiewicz ym., 2000a) tai monissa tapauksissa yleisesti ottaen kahdesta (tai useammasta) muuttuja-avaruudesta koostuvan systeemin simulointi. Jälkimmäisestä tilanteesta esimerkkinä voisi olla vaikkapa jonkin lämpöuunin kuorirakenteen käyttäytyminen lämpötilan tai paineen vaikutuksen alla.

Tämän työn tarkoituksena on tutkia mahdollisuuksia soveltaa sekaelementtejä absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmään. Tavoitteena on lausua kaksi tunnettua sekaelementtityyppiä, siirtymä-jännitys-, ja siirtymä-paine-sekaelementit absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä (Zienkiewicz ym., 2000a; Castersen ym., 2009). Nämä sekaelementtityypit on valittu tutkimuskohteeksi niiden suhteellisen yksinkertaisen konstruktion vuoksi. Kehitettyjä elementtejä testataan numeerisin testein ja tuloksia verrataan olemassa oleviin, tavanomaiseen elementtimenetelmään perustuviin rakenteeltaan samantyyppisiin sekaelementteihin. Valittujen sekaelementtien dynaamisia ja kinemaattisia ominaisuuksia ainoastaan sivutaan johtuen kyseisen tutkimusongelman olevan mahdollisesti niin laaja, ettei sen sisällyttäminen tähän työhön ole rajauksesta johtuvista syistä tarkoituksenmukaista itse aiheen tärkeydestä huolimatta. Pidemmän aikavälin tavoitteena voidaan pitää absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmän laajentamista soveltumaan yhä uusien ja erityyppisten ongelmien ratkaisemiseksi. Sovelluksia toivotaan muun muassa biomekaanisten systeemien simulointimahdollisuuksien parantamiseksi (Cowin ym., 2007), mikä on ollut yksi keskeinen taustatekijä yleisesti puhuttaessa absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmän kehitystyöstä. Kuitenkin myös perinteisten insinööritieteiden, kuten koneensuunnittelun työkalujen kehittämiseksi voidaan tästä projektista nähdä olevan hyötyä, erityisesti puhuttaessa simuloitavien systeemien erityistapauksista.

Kuvassa 1 havainnollistetaan yleisellä tasolla menetelmien kehityshistoriaa ja tässä työssä käsiteltyyn tutkimusongelmaan johtanutta tietä.



Kuva 1: Tutkimusongelmaan johtanut kehityshistoria

2. Elementtiteoriat

Tässä luvussa käsitellään absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmä pääpiirteittäin, käsitellen yleisiä ominaisuuksia sekä antamalla esimerkkejä absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä lausutuista elementeistä. Myös sekaelementtimenetelmää käsitellään aihekokonaisuutena selvittäen myös tämän elementtiryhmän tyypillisiä erityispiirteitä. Sekaelementtikonstruktiosta annetaan myös esimerkkejä, jotka sisältävät myös kolmannessa luvussa absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä lausuttavat sekaelementtityypit.

2.1 Absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmä

2.1.1 Elementin lausuminen globaalin koordinaatiston suhteen

Absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmä on yksi tapa määrittää elementin koordinaatisto. Tässä menetelmässä elementtien solmukoordinaatit sisältävät asema- ja orientaatiotermit, ja ne lausutaan käyttäen systeemin globaalia koordinaatistoa (Shabana, 1996; Shabana, 1997a; Shabana, 1998). Tämä lähestymistapa on kehitetty edesauttamaan ratkaisun löytymistä sellaisille elementtimenetelmällä analysoitaville ongelmille, missä tyypillisiä ilmiöitä ovat suuret kiertymät tai muodonmuutokset (Shabana, 2008).

Toisin kuin tavanomainen elementtimenetelmä, absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmä ei lähtökohtaisesti aseta rajoja elementtien taivutukselle tai kierrolle (Shabana, 1998). Absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmässä elementin jokainen solmu lausutaan globaalein asemavektorein elementin muotofunktioiden avulla siten, että

$$\mathbf{r}^i = \mathbf{S}^i(x^i, y^i, z^i)\mathbf{e}^i, \quad (2.1)$$

missä \mathbf{r} on elementin i satunnaisesti valitun pisteen sijainnin määrittävä vektori, \mathbf{S} on elementin muotofunktio­matriisi ja \mathbf{e} elementin solmukoordinaattien asemavektori. Absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmässä asemavektori sisältää informaation valitun solmun asemasta globaalin koordinaatiston suhteen, mutta tämän lisäksi myös pisteen orientaatiotermit, eli toisin sanoen kyseisen solmun muotofunktioiden akselikohtaiset kulmakertoimet suhteessa globaaliin koordinaatistoon. Tämä lähestymistapa ankkuroi siis muotofunktiot elementin Serret-Frenet-tyyppiseen (Serret, 1851; Frenet, 1852) lokaaliin koordinaatistoon. Tämänkaltaisessa koordinaatistossa orientaatio seuraa valittua käyrää siten, että sen akselit ovat akselityypistä riippuen aina joko tangentialis- tai normaaliorientaatiossa suhteessa käyrään, elementin muotofunktioiden määrittäessä tässä tapauksessa nämä käyrät. Elementin solmukoordinaattien asemavektori voidaan kirjoittaa siis tarkemmin;

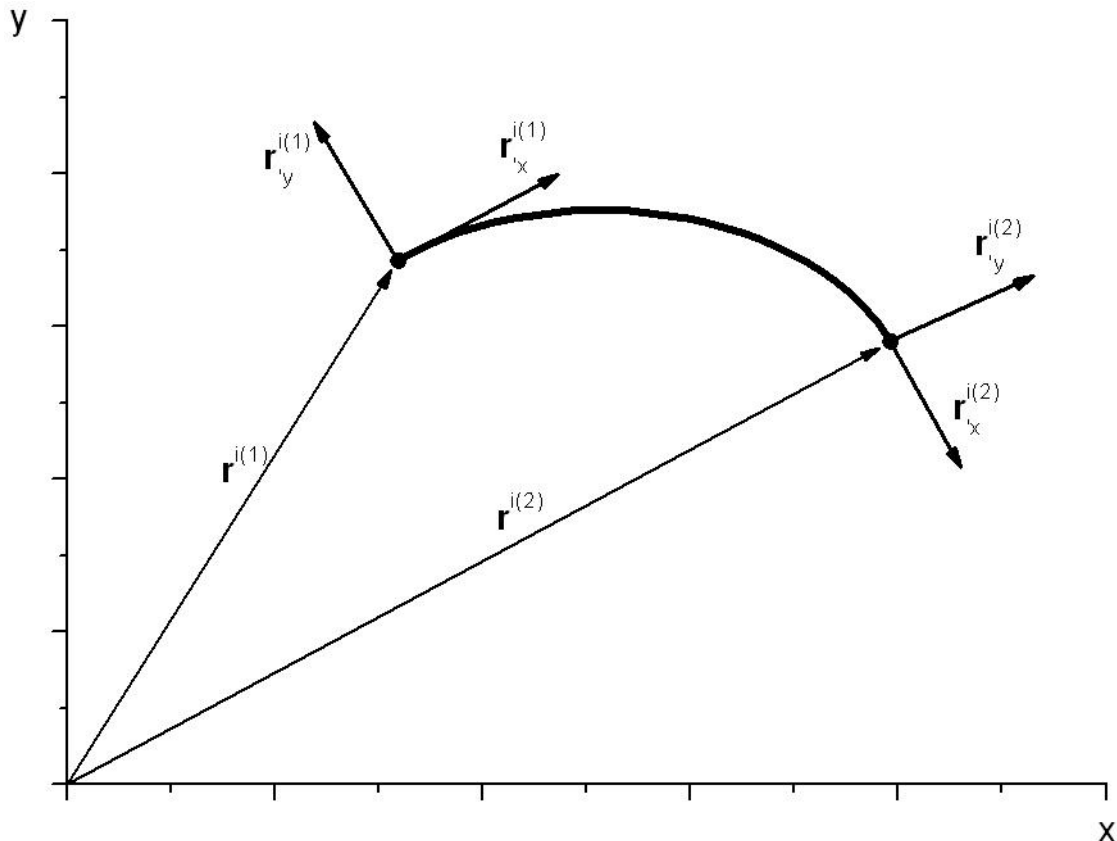
$$\mathbf{e}^{ik} = \left[\left(\mathbf{r}^{ik} \right)^T \quad \left(\frac{\partial \mathbf{r}^{ik}}{\partial x^i} \right)^T \quad \left(\frac{\partial \mathbf{r}^{ik}}{\partial y^i} \right)^T \quad \left(\frac{\partial \mathbf{r}^{ik}}{\partial z^i} \right)^T \right]^T, \quad (2.2)$$

missä elementin i solmun k sijainti määritellään asemavektorilla \mathbf{r}^{ik} ja sijainnin Serret-Frenet-orientaatio tämän vektorin derivaatoin, eli siis määrittelemällä muotofunktioiden kulmakertoimet eri koordinaattiakselien derivaatoin valitussa pisteessä. Dimensioiltaan ulottuvuuksien suhteen määräytyvä muotofunktio­matriisi määritetään seuraavasti;

$$\mathbf{S}^i = \left[s_1^i \mathbf{I}_3 \quad s_2^i \mathbf{I}_3 \quad s_3^i \mathbf{I}_3 \quad s_4^i \mathbf{I}_3 \quad \dots \quad s_n^i \mathbf{I}_3 \right], \quad (2.3)$$

missä tässä tapauksessa kolmiulotteisen elementin i muotofunktiot s_1, s_2, \dots, s_n kerrotaan 3 x 3-tyyppisellä yksikkö­matriisilla \mathbf{I}_3 .

Tätä periaatetta elementin kaikkien solmujen määrittelemisestä globaalin koordinaatiston suhteen havainnollistetaan kuvalla 2, missä yksinkertainen kaksisolmuinen viivaelementti on lausuttu absoluuttisten asemakoordinaattien suhteen. Solmuissa on nähtävissä myös orientaatiota määrittävät lokaalit Serret-Frenet-koordinaatistot. Mikä tahansa piste viivaelementissä voidaan määrittää käyttämällä globaaleja asemavektoreita.



Kuva 2: Palkkielementti absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä

Muotofunktioiden muodostamiseen ei absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmä suoraan tarjoa mitään erillistä metodiikkaa differentioitujen funktioiden vaatimusta lukuun ottamatta (Shabana, 1996; Shabana, 1997a), vaan niiden on perustuttava sovellettavan elementin matemaattiseen malliin, kuten on laita tavanomaisen elementtimenetelmänkin suhteen (Hakala, 1986). Sovellettava approksimaatio voi olla esimerkiksi tavanomainen polynomiapproksimaatio (Hakala, 1986; Shabana, 2008) tai Hermiten polynomeihin perustuva (Sanborn, 2011). Jotta kulmakertoimiin perustuvan Serret-Frenet-orientaation laskenta kuitenkin onnistuisi, pitää muotofunktioatriisin sisältää myös derivoitujen polynomiapproksimaatioiden perusteella muodostetut muotofunktiot.

2.1.2 Elementin liikeyhtälöt

Yksittäisen elementin (tai vaihtoehtoisesti koko elementtisysteemin) dynamiikka voidaan absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä määrittellä (Shabana, 2008; Shabana, 2010) Lagrangen (1788) dynamiikkaa mukailleen ilman elementin vaimennusvaikutuksen huomioimista seuraavasti;

$$\mathbf{M}^i \ddot{\mathbf{e}}^i + \mathbf{K}^i \mathbf{e}^i = \mathbf{f}_{ext}^i, \quad (2.4)$$

missä \mathbf{M} on elementin i massamatriisi, \mathbf{K} jäykkyyismatriisi ja \mathbf{f}_{ext} ulkoisten voimien vektori. Tämä yksinkertainen lähestymistapa on mahdollinen, koska absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmä ei edellytä virtuaalisten, eli pienten siirtymien tai kiertymien määrittelyä solmujen asemavektoreissa (Shabana; 2010). Elementin massamatriisi \mathbf{M} muodostetaan muotofunktio­matriisien avulla, jolloin se saa aina vakioarvoja, minkä seurauksena esimerkiksi kelluvan koordinaatiston menetelmässä käytetyn elementin keskipakovoimia suhteessa lokaaliin koordinaatistoon määrittävää neliöllistä nopeusvektoria ei tarvita (Shabana, 2010). Massamatriisi lasketaan seuraavasti;

$$\mathbf{M}^i = \int_{V^i} \rho^i \mathbf{S}^{iT} \mathbf{S}^i dV^i, \quad (2.5)$$

missä ρ on elementin i simuloiman materiaalin tiheys. Massamatriisin muodostaminen perustuu elementin kineettisen energian määritelmään (Escalona ym., 1998; Shabana, 1998; Shabana, 2008), mikä absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä määritetään yhtälöllä;

$$T = \frac{1}{2} \int_{V^i} \rho^i \dot{\mathbf{r}}^{iT} \dot{\mathbf{r}}^i dV^i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^{iT} \left(\int_{V^i} \rho^i \mathbf{S}^{iT} \mathbf{S}^i dV^i \right) \dot{\mathbf{e}}^i \Rightarrow \int_{V^i} \rho^i \mathbf{S}^{iT} \mathbf{S}^i dV^i = \mathbf{M}. \quad (2.6)$$

Massamatriisin vakiointi ei kuitenkaan merkitse myös jäykkyyismatriisin vakiointia, vaan jäykkyyismatriisi on yleensä jopa erittäin epälineaarinen (Escalona ym., 1998; Shabana, 2008). Jäykkyyismatriisin määrittäminen riippuu yleensä elementtityypistä, useissa tapauksissa se kuitenkin muodostetaan elementin venymäenergiaan perustuvilla lähestymistavoilla. Tätä asiaa käsitellään tarkemmin esimerkkien yhteydessä.

2.1.3 Ulkoiset voimat ja momentit

Absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmässä elementtiin kohdistuvat ulkoiset voimat määritellään käyttäen kahta toisistaan poikkeavaa lähestymistapaa (Mikkola ym., 2003; Shabana, 2008). Voimien määrittely voi tapahtua käyttämällä apuna elementin lokaalia koordinaattisysteemiä (Escalona ym., 1998) tai sitten vaihtoehtoisesti soveltaen kontinuumimekaniikkaan perustuvaa lähestymistapaa (Shabana, 1997a; Shabana, 2010). Elementin lokaalia koordinaatistoa apuna käyttävä lähestymistapa soveltuu muun muassa Kirchhoffin tai Reissner-Mindlinin laattateorioihin perustuvien laattaelementtien mallintamiseen ja se on lähestymistavaltaan varsin yksinkertainen ja suoraviivainen. Menetelmä perustuu virtuaalisen työn teoriaan (Shabana, 2010) ja siinä erotellaan erikseen valittuihin pisteisiin vaikuttavien voimien ja momenttien vaikutus.

Voimat ja momentit lokaalin koordinaatiston menetelmällä

Elementin lokaaliin koordinaatistoon perustuvassa lähestymistavassa ulkoiset voimat ja niiden vaikutus elementissä vaikuttaviin elastisiin voimiin määritellään yhtälöllä 2.7 (Shabana, 1997a; Shabana, 1998; Escalona ym., 1998);

$$\mathbf{f}_{ext}^{iT} \delta \mathbf{r}^i = \mathbf{f}_{ext}^{iT} \mathbf{S}^i \delta \mathbf{e}^i = \mathbf{f}_{gen}^{iT} \delta \mathbf{e}^i, \quad (2.7)$$

missä vektori \mathbf{f}_{ext} on elementin i ulkoisten voimien vektori, $\delta \mathbf{r}$ on valittujen solmujen absoluuttisen aseman ja orientaation määrittävä, voiman vaikutuksesta aiheutuvan virtuaalisen siirtymän määrittävä vektori, \mathbf{S} on elementin muotofunktio matriisi ja $\delta \mathbf{e}$ elementin solmujen virtuaalisen siirtymän määrittävä asema- ja orientaatiovektori. Kuten yhtälöstä 2.7 nähdään, elastiset voimat voidaan määrittää yleistetyssä muodossa ulkoisten voimien vektorin ja muotofunktioiden tulolla (Escalona ym., 1998). Tästä siis seuraa, että ulkoinen voima voidaan määrittää joko solmukohtaisesti tai vaihtoehtoisesti integroimalla voima vaikuttamaan elementin yli, jolloin esimerkiksi painovoiman vaikutuksen mallintaminen mahdollistuu.

Momenttien määrittäminen (Escalona ym., 1998; Shabana, 2010) valitussa solmussa toteutetaan kiertomatriisien avulla. Tässä yksinkertaistetussa esimerkissä kierto tapahtuu Eulerin kulmien teorian perusteella kahdessa ulottuvuudessa. Kiertomatriisin lausuman kiertymän α ja valitun solmun orientaation välille määritetään yhteys yhtälöllä 2.8;

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{d}} \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1^i}{\partial x} & -\frac{\partial r_2^i}{\partial x} \\ \frac{\partial r_2^i}{\partial x} & \frac{\partial r_1^i}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

missä termi d on muotoa

$$d = \left(\frac{\partial r_1^i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial r_2^i}{\partial x} \right)^2. \quad (2.9)$$

Yhtälöiden 2.8 ja 2.9 avulla voidaan ratkaista virtuaalinen kiertymä $\delta\alpha$ (Escalona ym., 1998);

$$\delta\alpha = \frac{\frac{\partial r_1^i}{\partial x} \delta - \frac{\partial r_2^i}{\partial x} \delta - \frac{\partial r_2^i}{\partial x} \delta + \frac{\partial r_1^i}{\partial x} \delta}{d}, \quad (2.10)$$

jolloin momenttien ja virtuaalisen kiertymän tulo määrittää momentin tuottaman virtuaalisen työn;

$$\delta W = M \delta\alpha. \quad (2.11)$$

Voimien lausunta kontinuumimekaniikan lähestymistavalla

Toinen lähestymistapa voimien määrittämiseksi on käyttää kontinuumimekaniikan menetelmää (Shabana, 1997a; Shabana, 2008), jolloin elementin omaa lokaalia koordinaatistoa ei tarvita ulkoisten voimien määrittämiseksi. Tämä lähestymistapa perustuu venymäenergiaperiaatteeseen (Gere ym., 1990), missä elementin venymät määritellään ANCF-sovelluksissa yleensä Green-Lagrangen venymätensorilla.

Venymäenergia määritellään yleisellä tasolla tarkasteltuna yhtälöllä 2.12 (Shabana, 2008), mutta on syytä huomioda, että energiayhtälöä ei voi sellaisenaan tässä muodossa soveltaa eri kaikille elementtityypeille;

$$U^i = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{iT} \mathbf{E}^i \boldsymbol{\varepsilon}^i dV, \quad (2.12)$$

missä $\boldsymbol{\varepsilon}$ on Green-Lagrangen symmetrisestä venymätensorista muodostettu venymävektori ja \mathbf{E} elementin kimmomatriisi. Venymätensori on muotoa (Shabana, 2008);

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{GL}^i = \frac{1}{2} (\mathbf{J}^{iT} \mathbf{J}^i - \mathbf{I}_3), \quad (2.13)$$

missä venymistä johtuvat siirtymägradientit määritetään muodostamalla asemavektorin Jacobinmatriisi elementin muotofunktioiden ja globaalien koordinaattiakseleiden suhteen;

$$\mathbf{J}^i = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_1^i}{\partial x} & \frac{\partial S_1^i}{\partial y} & \frac{\partial S_1^i}{\partial z} \\ \frac{\partial S_2^i}{\partial x} & \frac{\partial S_2^i}{\partial y} & \frac{\partial S_2^i}{\partial z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial S_n^i}{\partial x} & \frac{\partial S_n^i}{\partial y} & \frac{\partial S_n^i}{\partial z} \end{bmatrix} \mathbf{e}^i, \quad (2.14)$$

ja missä vektori \mathbf{e} on elementin i solmujen absoluuttinen asema- ja orientaatiovektori. Elementin venymäenergian avulla määritetään elastisten voimien vektori muodostamalla vastaavasti Jacobinmatriisi energian ja vektorin \mathbf{e} suhteen;

$$\mathbf{f}_{el}^i = \left(\frac{\partial U^i}{\partial \mathbf{e}^i} \right)^T. \quad (2.15)$$

2.2 Esimerkkejä palkki- ja laattaelementeistä

Tässä luvussa esitellään neljä esimerkkiä palkki- ja laattaelementeistä lausuttuna absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä. Molemmat palkkielementit lausutaan tasotapauksessa (Shabana, 1997a; Shabana, 1998), toinen palkeista noudattaa Euler-Bernoullin palkkiteoriaa ja toinen leikkausmuodonmuutokset huomioivaa Timoshenkon teoriaa (Gere ym., 1990). Palkkielementit ovat mahdollisia lausua tasotapauksen lisäksi myös kolmiulotteisessa tilassa, vaikka elementin lokaali koordinaatisto ei kolmatta ulottuvuutta sisältäisikään. Tämä metodiikka mahdollistuu muun muassa Yakoubin ym. (2001) ja Dufvan ym. (2006) julkaisemien tutkimustulosten osoittamalla tavalla.

Tässä luvussa esiteltävät laattaelementit perustuvat Kirchhoffin ja Reissner-Mindlinin laattateorioihin, joista Reissner-Mindlinin teoriaan perustuva laattaelementti kykenee mallintamaan myös leikkausmuodonmuutoksia. Nämä elementtityypit lausutaan kolmiulotteisessa avaruudessa ja ne voivat muokkautua siinä elementin ominaisuuksien tarjoamien mahdollisuuksien puitteissa, vaikka laattaelementin lokaali koordinaatisto onkin vain kaksiulotteinen. Nämä elementtityypit ovat alun perin lausuttu absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä Dmitrochenkon ym. (2003), Mikkolan ym. (2004) ja Dufvan ym. (2005) tekemän tutkimuksen tuloksena.

Muita absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä lausuttuja elementtityyppejä ovat muun muassa lineaaripalkki (Kerkkänen ym., 2005), kolmioelementit (Dmitrochenko ym., 2008) ja korkeamman asteen laatat (Mikkola ym., 2003). Absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmään soveltuvien elementtien tutkimustyö on viimeisen vuosikymmenen aikana ollut vilkasta ja jatkunee vilkkaana edelleen, mistä osoituksena ovat muun muassa lähteet (García-Vallejo ym., 2007; Dmitrochenko ym., 2008; Dmitrochenko ym., 2009; Matikainen ym., 2009; Sanborn ym., 2009; Sanborn ym., 2011; Nada ym., 2012).

2.2.1 Palkkielementti (Euler-Bernoulli)

Euler-Bernoullin palkkiteoriaa noudattavan palkkielementin solmujen globaali asemointi määritellään absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmälle ominaisella tavalla asemavektorilla \mathbf{r} ;

$$\mathbf{r}^i = \mathbf{S}^i \mathbf{e}^i, \quad (2.16)$$

missä \mathbf{e} on solmujen asemat ja orientaatiot määrittävä vektori (Berzeri ym., 2000);

$$\mathbf{e}^i = [e_1^i \quad e_2^i \quad e_3^i \quad \dots \quad e_8^i]^T, \quad (2.17)$$

ja \mathbf{S} muotofunktio­matriisi;

$$\mathbf{S}^i = [S_1^i \mathbf{I}_2 \quad S_2^i \mathbf{I}_2 \quad S_3^i \mathbf{I}_2 \quad S_4^i \mathbf{I}_2], \quad (2.18)$$

missä \mathbf{I}_2 on 2 x 2-tyyppinen yksikkö­matriisi ja palkin muotofunktiot (Shabana, 2008) ovat

$$S_1 = 1 - \left(\frac{3x}{L}\right)^2 + \left(\frac{2x}{L}\right)^3, \quad S_2 = x - \frac{4x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}, \quad (2.19)$$

$$S_3 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad \text{ja} \quad S_4 = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}.$$

Euler-Bernoullin palkkielementin venymäenergia (Berzeri ym., 2000; Shabana, 2008) voidaan määrittää kahdella toisistaan hieman poikkeavalla lähestymistavalla. Mikäli palkkielementtiä sovelletaan absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmälle ominaisiin suurten kiertymien simulointitehtäviin, on suositeltavaa käyttää elementin kaartumisominaisuuksia tarkasti määrittävää käyrystermiä (Berzeri ym., 2000). Sovellettaessa käyrystermiä ei elementille tarvitse tehdä lineaarisuusoletuksia, jolloin taipumaominaisuudet ovat kauttaaltaan epälineaarisia. Usein käyrystermin integrointi vaatii kuitenkin numeeristen integrointimenetelmien, kuten Gaussin kvadratuurien soveltamista, johtuen sen hankalasta konstruktiosta ratkaistavaksi Riemannin analyttisellä integroinnilla.

Käyryystermin voidaan määrittellä monin eri tavoin riippuen siitä, miten tarkasti sen halutaan kuvaavan suuria kiertymiä (Dmitrochenko ym., 2003; Gerstmayr ym., 2006). Yksi mahdollinen käyryystermin määritelmä on

$$k = \left| \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial x} \times \frac{\partial^2 \mathbf{r}^i}{\partial x^2} \right| \left| \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial x} \right|^{-3}, \quad (2.20)$$

missä asemavektoria \mathbf{r} osittaisderivoidaan elementin i pituusakselin suhteen. Virtuaalisen työn periaatetta noudattaen lausutaan elementin muodonmuutokset nyt yhtälöllä 2.21 (Berzeri ym., 2000; Shabana, 2008);

$$\delta W^i = \int_L E^i A^i \varepsilon_x^i \delta \varepsilon_x^i dL + \int_L E^i I^i k^i \delta k^i dL, \quad (2.21)$$

mikä johdetaan venymäenergiayhtälöksi (Berzeri ym., 2000; Shabana, 2008);

$$U^i = \frac{1}{2} \int_L E^i A^i (\varepsilon_x^i)^2 dL + \frac{1}{2} \int_L E^i I^i (k^i)^2 dL, \quad (2.22)$$

missä E on materiaalin kimmokerroin, A elementin poikkipinta-ala, ε_x pituussuuntainen venymä, I jäyhyysmomentti ja L elementin pituus. Venymäenergian perusteella määritetään elementin elastiset voimat ja niiden yhtäläisyys jäykkyysmatriisiin \mathbf{K} (Berzeri ym., 2000; Shabana, 2008);

$$\mathbf{f}_{el}^i = \left(\frac{\partial U^i}{\partial \mathbf{e}^i} \right)^T = \mathbf{K}^i \mathbf{e}^i. \quad (2.23)$$

Aiemmin mainittu, käyryystermin soveltamiseksi vaihtoehtoinen venymien lineaarisointiin perustuva lähestymistapa lähtee ajatuksesta, että venymät jaetaan sivuttais- ja pitkittäissuuntaisiin venymiin. Tämä lähestymistapa on esitelty alun perin Escalonan ym. (1998) kirjoittamassa julkaisussa. Linearisoinnissa perusajatuksena on, että tarkastellaan elementin muodonmuutoksia valitun referenssipisteen suhteen siten, että toteutuneet muodonmuutokset määritetään yhtälöllä 2.24;

$$\mathbf{d}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_x^i \\ \mathbf{d}_y^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{S}_1^i - \mathbf{S}_{10}^i) \\ (\mathbf{S}_2^i - \mathbf{S}_{20}^i) \end{bmatrix} \mathbf{e}^i, \quad (2.24)$$

missä solmun ja sille valitun referenssipisteen välinen muodonmuutosvektori \mathbf{d} sisältää x- ja y-koordinaattiakseleiden suhteen lausutut komponentit ollen täten yhtenevä myös absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmässä käytettyyn tapaan ilmaista sijainti muotofunktioiden suhteen. Näin saadaan kaksi yksikkövektoria \mathbf{a} ja \mathbf{b} elementin i lokaalin koordinaatiston suhteen määrittämään lineaarisia muodonmuutoksia:

$$\mathbf{a}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_x^i \\ \mathbf{a}_y^i \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{r}_2^i - \mathbf{r}_1^i}{|\mathbf{r}_2^i - \mathbf{r}_1^i|} \quad \text{ja} \quad \mathbf{b}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_x^i \\ \mathbf{b}_y^i \end{bmatrix} = \mathbf{c}^i \times \mathbf{a}^i, \quad (2.25)$$

missä \mathbf{c} on yksikön mittainen xy-tason suhteen muodostettu normaalivektori asemavektoreiden alaindeksien 1 ja 2 määrittellessä esimerkiksi palkin ensimmäistä ja toista päätysolmua tai vaihtoehtoisesti jotain muuta valittua referenssipistettä. Täten muodonmuutokset jaetaan vastaavasti pitkittäis- ja sivuttaissuuntaisiin, jolloin muodonmuutosta kuvaavaksi vektoriksi saadaan

$$\mathbf{d}_m^i = \begin{bmatrix} d_{pituus}^i \\ d_{sivuttais}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}^{iT} \mathbf{a}^i - x \\ \mathbf{d}^{iT} \mathbf{b}^i \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

minkä perusteella määritellään venymäenergia nyt siten, että;

$$U^i = \frac{1}{2} \int_L E^i A^i \left(\frac{\partial d_{pituus}^i}{\partial x} \right)^2 + E^i I^i \left(\frac{\partial^2 d_{sivuttais}^i}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \mathbf{e}^{iT} \mathbf{K}^i \mathbf{e}^i. \quad (2.27)$$

2.2.2 Palkkielementti (Timoshenko)

Timoshenkon leikkausmuodonmuutokset sallivaa palkkiteoriaa osittain noudattava palkkielementti on julkaistu absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä lausuttuna Omarin ja Shabanan (2001) työn tuloksena. Poikkeus leikkausmuodonmuutosten suhteen Timoshenkon teoriaan (Gere ym., 1990) verrattuna ilmenee lähinnä siinä, että tässä tapauksessa gradienttivektorein määriteltyyn leikkauspintaan voi tulla myös käyristymiä (Omar ym., 2001). Absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmän tapaan globaali asemavektori \mathbf{r} määrittää elementin i solmujen aseman;

$$\mathbf{r}^i = \mathbf{S}^i \mathbf{e}^i, \quad (2.28)$$

missä vektori \mathbf{e} on solmujen asema- ja orientaatiovektori (Omar ym., 2001);

$$\mathbf{e}^i = [e_1^i \quad e_2^i \quad e_3^i \quad \dots \quad e_{12}^i]^T, \quad (2.29)$$

ja \mathbf{S} muotofunktio­matriisi;

$$\mathbf{S}^i = [S_1^i \mathbf{I}_2 \quad S_2^i \mathbf{I}_2 \quad \dots \quad S_6^i \mathbf{I}_2], \quad (2.30)$$

sisältäen tasotapauksessa 2 x 2-yksikkö­matriisin \mathbf{I}_2 ja muotofunktiot (Shabana, 2008)

$$S_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \quad S_2 = L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3), \quad S_3 = L(\eta - \xi\eta), \quad (2.31)$$

$$S_4 = 3\xi^2 - 2\xi^3, \quad S_5 = L(-\xi^2 + \xi^3) \quad \text{ja} \quad S_6 = L\xi\eta,$$

missä $\xi = x/L$, $\eta = y/L$, termin L määriteltessä palkkielementin pituutta. Elementin venymäenergian määrittelemisen poikkeaa leikkausmuodonmuutosten takia merkittävästi Euler-Bernoullin teoriaan perustuvasta palkkielementistä. Linearisointiin perustuva lähestymistapaa ei käytännössä ole mahdollista toteuttaa ja käyrystermin soveltaminen on sellaisenaan hankalaa, sillä sen tulisi huomioida myös elementin leikkausmuodonmuutokset (Omar ym., 2001). Ratkaisu löytyy kuitenkin kontinuumimekaniikasta, missä Green-Lagrangen venymätensori määritellään yhtälöllä 2.32;

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{GL} = \frac{1}{2}(\mathbf{J}^T \mathbf{J} - \mathbf{I}_2), \quad (2.32)$$

missä \mathbf{I}_2 on 2 x 2-yksikkömatriisi ja \mathbf{J} aiemmin yhtälössä 2.14 määritelty Jacobinmatriisi. Kahdessa ulottuvuudessa lausuttuna tämä tensori määrittelee muodonmuutokset sekä x- ja y-akseleiden suhteen, sekä myös leikkausmuodonmuutoksen xy-tasossa. Venymäenergia määritellään yhtälöllä 2.33, joka tässä tapauksessa vastaa yhtälössä 2.12 esiteltyä venymäenergiayhtälöä;

$$U^i = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^{iT} \boldsymbol{\varepsilon}^i dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{iT} \mathbf{E}^i \boldsymbol{\varepsilon}^i dV, \quad (2.33)$$

missä \mathbf{E} on kimmomatriisi ja $\boldsymbol{\varepsilon}$ Green-Lagrangen symmetrisestä tensorista muodostettu venymävektori. Integrointi on tehtävä palkin tilavuuden yli, sillä toisin kuin Euler-Bernoullin palkkielementin tapauksessa, tässä energiayhtälössä ei ole erillisiä, palkin ei-pituusulottuvuuksia huomioivia kerrointermejä (Omar ym., 2001). Elementin elastiset voimat ja jäykkyysmatriisi noudattavat seuraavaa periaatetta;

$$\mathbf{f}_{el}^i = \left(\frac{\partial U^i}{\partial \mathbf{e}^i} \right)^T = \mathbf{K}^i \mathbf{e}^i. \quad (2.34)$$

2.2.3 Laattaelementti (Kirchhoff)

Kirchhoffin laattateoria ei mallinna lainkaan laatussa tapahtuvia leikkausmuodonmuutoksia. Elementti lausutaan kolmessa ulottuvuudessa, mutta sen oletetaan olevan hyvin ohut, jolloin elementin paksuuden vaikutusta sen käyttäytymiseen pidetään niin vähäisenä, että elementti oletetaan monessa suhteessa elastisilta ominaisuuksiltaan kaksiulotteiseksi. Kirchhoffin laattaelementti on lausuttu absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä Dufvan ym. (2005) tutkimuksen tuloksena ja tälle menetelmälle ominaiseen tapaan elementin solmujen globaalit asemat ja orientaatiot lausutaan seuraavasti;

$$\mathbf{r}^i = \mathbf{S}^i \mathbf{e}^i, \quad (2.35)$$

missä 36-vapausasteisen elementin i (Dmitrochenko ym., 2003; Dufva ym., 2005; Shabana, 2008) solmut määritellään yhtälöllä;

$$\mathbf{e}^i = [e_1^i \quad e_2^i \quad e_3^i \quad \dots \quad e_{36}^i]^T, \quad (2.36)$$

sisältäen asemavektorit jokaiselle solmulle x-, y- ja z-, sekä orientaatiovektorit globaalien x- ja y-akseleiden suhteen. Muotofunktio matriisi \mathbf{S} määritellään yhtälöllä;

$$\mathbf{S}^i = [S_1^i \mathbf{I}_3 \quad S_2^i \mathbf{I}_3 \quad \dots \quad S_{12}^i \mathbf{I}_3], \quad (2.37)$$

missä \mathbf{I}_3 on 3 x 3-tyyppinen yksikkövektori ja gradienttiansa suhteen elementtien yli jatkuvat muotofunktiot (Dufva ym., 2005) ovat

$$\begin{aligned} S_1 &= -(\xi - 1)(\eta - 1)(2\eta^2 - \eta + 2\xi^2 - \xi - 1), & S_7 &= -\xi\eta(1 - 3\xi - 3\eta + 2\eta^2 + 2\xi^2), \\ S_2 &= -L\xi(\xi - 1)^2(\eta - 1), & S_8 &= L\xi^2\eta(\xi - 1), \\ S_3 &= -H\eta(\eta - 1)^2(\xi - 1), & S_9 &= H\xi\eta^2(\eta - 1), \\ S_4 &= \xi(2\eta^2 - \eta - 3\xi + 2\xi^2)(\eta - 1), & S_{10} &= \eta(\xi - 1)(2\xi^2 - \xi - 3\eta + 2\eta^2), \\ S_5 &= -L\xi^2(\xi - 1)(\eta - 1), & S_{11} &= L\xi\eta(\xi - 1), \\ S_6 &= H\xi\eta(\eta - 1)^2, & S_{12} &= -H\eta^2(\xi - 1)^2(\eta - 1), \end{aligned} \quad (2.38)$$

missä $\xi = x/L$ ja $\eta = y/H$, kun L määrittää laatan pituutta ja H leveyttä. Green-Lagrangen yhtälöön perustuvaa kontinuumimekaniikan lähestymistapaa venymiä määriteltäessä muodostetaan kolmiulotteinen venymätensori (Dufva ym., 2005; Shabana, 2008);

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{GL}^i = \frac{1}{2}(\mathbf{J}^{iT} \mathbf{J}^i - \mathbf{I}_3), \quad (2.39)$$

missä \mathbf{I}_3 on 3 x 3-tyyppinen yksikkömatriisi ja Jacobinmatriisi \mathbf{J} on määritelty aiemmin yhtälössä 2.14.

Muodostettaessa symmetrisestä venymätensorista venymävektori, voidaan tulos lausua yhtälöllä;

$$\boldsymbol{\varepsilon}^i = \left[\boldsymbol{\varepsilon}_{GL(1,1)}^i \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{GL(2,2)}^i \quad 2\boldsymbol{\varepsilon}_{GL(1,2)}^i \right]^T, \quad (2.40)$$

missä alaindeksit viittaavat Green-Lagrangen venymätensorin alkioihin. Kirchhoffin laatan käyritymistä kuvaava venymävektori \mathbf{k} määritellään yhtälöllä;

$$\mathbf{k}^i = z \left[\mathbf{r}_{,xx}^{iT} \mathbf{n} \|\mathbf{n}\|^{-3} \quad \mathbf{r}_{,yy}^{iT} \mathbf{n} \|\mathbf{n}\|^{-3} \quad 2\mathbf{r}_{,xy}^{iT} \mathbf{n} \|\mathbf{n}\|^{-3} \right]^T, \quad (2.41)$$

missä asemavektoria \mathbf{r} on derivoitu alaindeksien osoittamien muuttujien suhteen ja vektori \mathbf{n} määritellään ristitulona $\mathbf{n} = \mathbf{r}_{,x} \times \mathbf{r}_{,y}$ (Dufva ym., 2005). Elementin venymäenergia saa siis muodon;

$$U^i = \frac{1}{2} \int_{V_0} \boldsymbol{\varepsilon}^{iT} \mathbf{E}^i \boldsymbol{\varepsilon}^i dV_0 + \frac{1}{2} \int_{V_0} \mathbf{k}^{iT} \mathbf{E}^i \mathbf{k}^i dV_0 \quad (2.42)$$

missä \mathbf{E} on elementin kimmomatriisi. Mikäli laattaelementti on käyristynyt jo simulaation valitussa alkutilanteessa, lausutaan elementin tilavuus seuraavasti;

$$V_0 = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right| V, \quad (2.43)$$

missä V on elementin tilavuus käyritymättömänä. Elastisten voimien ja jäykkyyismatriisin suhteet määritetään yhtälöllä 2.44 saaden näin saman muodon, kuin useassa aiemminkin esiteltyssä tapauksessa;

$$\mathbf{f}_{el}^i = \left(\frac{\partial U^i}{\partial \mathbf{e}^i} \right)^T = \mathbf{K}^i \mathbf{e}^i. \quad (2.44)$$

2.2.4 Laattaelementti (Reissner-Mindlin)

Verrattaessa Reissner-Mindlinin ja Kirchhoffin laattateoriaa, merkittävin eroavuus on Reissner-Mindlinin teorian kyky sallia elementin muodonmuutokset myös paksuussuunnassa. Tämän vuoksi Reissner-Mindlinin teoria soveltuu selkeästi Kirchhoffin laattaa paksummille laatoille. Näissä tapauksissa voi laattaelementin paksuus olla esimerkiksi 10 % neliöelementin pituudesta tai leveydestä (Mikkola ym., 2003). Tämän nelisolmuisen laatan solmujen asemat globaalissa koordinaatistossa määritellään yhtälöllä;

$$\mathbf{r}^i = \mathbf{S}^i \mathbf{e}^i, \quad (2.45)$$

missä 48-vapausasteisen elementin solmujen asemat ja orientaatiot (Mikkola ym., 2003) lausutaan vektorilla \mathbf{e} ;

$$\mathbf{e}^i = [e_1^i \quad e_2^i \quad e_3^i \quad \dots \quad e_{48}^i]^T, \quad (2.46)$$

ja muotofunktiot matriisilla \mathbf{S} ;

$$\mathbf{S}^i = [S_1^i \mathbf{I}_3 \quad S_2^i \mathbf{I}_3 \quad \dots \quad S_{16}^i \mathbf{I}_3], \quad (2.47)$$

missä \mathbf{I}_3 on 3 x 3-tyyppinen yksikkömatriisi. Reissner-Mindlinin laattateoriaan perustuvassa laattaelementissä, samoin kuin Kirchhoffinkin laattaelementissä, muotofunktioiden muodonmuutosgradientit määritetään joko jatkuviksi laattaelementin keskipinnan suhteen eri elementtien välillä tai sitten vastaavassa tapauksessa epäjatkuviksi.

Gradiennteiltaan elementtien yli jatkuvat muotofunktiot ovat muotoa (Mikkola ym., 2003);

$$\begin{aligned}
 S_1 &= (2\xi + 1)(\xi - 1)^2(2\eta + 1)(\eta - 1)^2, & S_9 &= \eta^2\xi^2(2\xi - 3)(2\eta - 3), \\
 S_2 &= L\xi(\xi - 1)^2(2\eta + 1)(\eta - 1)^2, & S_{10} &= -L\eta^2\xi^2(\xi - 1)(2\eta - 3), \\
 S_3 &= H\eta(\xi - 1)^2(2\xi + 1)(\eta - 1)^2, & S_{11} &= -H\eta^2\xi^2(\eta - 1)(2\xi - 3), \\
 S_4 &= W\zeta(\xi - 1)(\eta - 1), & S_{12} &= W\zeta\xi\eta,
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned}
 S_5 &= -\xi^2(2\xi - 3)(2\eta + 1)(\eta - 1)^2, & S_{13} &= -\eta^2(2\xi + 1)(\xi - 1)^2(2\eta - 3), \\
 S_6 &= L\xi^2(\xi - 1)(2\eta + 1)(\eta - 1)^2, & S_{14} &= -L\xi\eta^2(\xi - 1)^2(2\eta - 3), \\
 S_7 &= -H\eta\xi^2(2\xi - 3)(\eta - 1)^2, & S_{15} &= H\eta^2(\xi - 1)^2(2\xi + 1)(\eta - 1), \\
 S_8 &= -W\xi\zeta(\eta - 1), & S_{16} &= -W\eta\zeta(\xi - 1),
 \end{aligned}$$

missä $\xi = x/L$, $\eta = y/H$, $\zeta = z/W$, L on elementin pituus, H leveys ja W paksuus. Kontinuumimekaniikan Green-Lagrangen venymäteoriaa noudattaen muodostetaan venymätensori (Mikkola ym., 2003);

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{GL}^i = \frac{1}{2}(\mathbf{J}^{iT}\mathbf{J}^i - \mathbf{I}_3), \tag{2.49}$$

missä \mathbf{I}_3 on 3 x 3-tyyppinen yksikkömatriisi ja \mathbf{J} yhtälössä 2.14 esitelty Jacobinmatriisi venymäenergian saadessa muodon;

$$U^i = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{iT} \mathbf{E}^i \boldsymbol{\varepsilon}^i dV, \tag{2.50}$$

missä \mathbf{E} on kimmomatriisi ja $\boldsymbol{\varepsilon}$ Green-Lagrangen symmetrisestä venymätensorista muodostettu venymävektori. Elastiset voimat sekä jäykkyysmatriisi noudattavat yhtälöä;

$$\mathbf{f}_{el}^i = \left(\frac{\partial U^i}{\partial \mathbf{e}^i} \right)^T = \mathbf{K}^i \mathbf{e}^i. \tag{2.51}$$

2.3 Sekaelementtimenetelmä

2.3.1 Sekaelementit elementtimenetelmässä

Sekaelementeiksi kutsutaan elementtityyppejä, jotka sisältävät useamman kuin yhden muuttuja-avaruuden (Atluri ym., 1983; Zienkiewicz ym., 2000; Castersen ym., 2009). Tähän ryhmään kuuluvat elementit mahdollistavat myös monien sellaisten tutkimusongelmien tai rakenneanalyysien ratkaisemisen, mitkä voisivat olla joko mahdottomia tai ainakin erittäin haasteellisia ratkaista käyttämällä esimerkiksi tavanomaista, siirtymäperustaista elementtimenetelmää. Sekaelementtien kehitystyö on alkanut 1960-luvulla (Visser, 1969; Herrmann, 1968a; Herrmann, 1968b; Atluri ym. 1983; Zienkiewicz ym., 2000a; Zienkiewicz ym., 2000b), johtaen ensin sekaelementeille soveltuvien variaatiofunktionaalien kehittämiseen, joista tunnetuin on mahdollisesti Veubeke-Hu-Washizun funktionaali (de Veubeke, 1972). Toinen funktionaali, mitä on sekaelementtisovelluksissa käytetty paljon, on Hellinger-Reissner-funktionaali (Hellinger, 1914; Reissner, 1950). Tosin jälkimmäisen funktionaalin sovellusmahdollisuuksien rajoitteet ovat olleet tiedossa jo pitkään ja lisäksi sillä on mahdollista analysoida vain siirtymien ja jännitysten suhdetta rajoittaen sen sovellusmahdollisuuksia jo lähtökohtaisesti merkittävällä tavalla.

Sekaelementtien konstruktioita useissa tapauksissa merkittävästi rajoittavat Babushka-Brezzin (Babushka, 1973; Brezzi, 1974) ehdot ovat myös edellä mainitun pioneerityön tulosta ja monet tunnetuimmat sekaelementtikehitelmät on julkaistu pääasiassa 1970-luvun aikana (Atluri ym., 1983). Sekaelementtimenetelmää on kuitenkin rakenneanalyseissä käytetty yleensä vain erikoistapauksissa, tosin tästä huolimatta kehitystyötä sekaelementtien ympärillä on tehty suhteellisen vilkkaasti myös viimeisen vuosikymmenen aikana, minkä osoittavat muun muassa tutkimusjulkaisut (Alsafadie ym., 2010; Castersen ym., 2009; Hjelmstad ym., 2002; Hjelmstad ym., 2003; Kumar ym., 2004; Li, 2007; Santos ym., 2009; Suri, 2005).

Kaikkia elementtityyppejä, jotka sisältävät enemmän kuin yhden muuttuja-avaruuden, ei kuitenkaan kutsuta sekaelementeiksi. Useamman muuttuja-avaruuden analysoinnin mahdollistavat elementtityypit voivat olla myös redusoitumattomia tai hybridielementtejä (Zienkiewicz ym., 2000a). Useamman tuntemattoman muuttujan elementtien jaottelu mainittuihin ryhmiin toteutetaan tarkastelemalla elementtien sisältämien tuntemattomien muuttujien kenttien luonnetta ja ominaisuuksia.

Useimmissa tapauksissa redusoitumattomat elementit erotetaan sekaelementeistä siirtymäkentän periaatteella. Mikäli siirtymiä sisältävä muuttuja-avaruus kuuluu tarkasteltavaan elementtityyppiin ja siirtymien lisäksi elementillä analysoidaan myös jotain muuta fysikaalista ilmiötä, kutsutaan elementtiä yleensä sekaelementiksi. Mikäli siirtymiä ei analysoida lainkaan tai siirtymäkenttä voidaan elementistä redusoida siten, että elementti on edelleen numeerisesti stabiili ja sen avulla kyetään ratkaisemaan analysoitavia ongelmia, nimetään elementtityyppi yleensä redusoitumattomaksi. Tätä jaottelua noudatetaan usein (Babushka ym., 1983; Castersen ym., 2009; Zienkiewicz ym., 1983; Zienkiewicz ym., 2000a), mutta se on kuitenkin osin kiistanalainen (Atluri ym., 1983).

Redusoitumattomien ja sekaelementtien lisäksi myös hybridielementit (Atluri ym. 1983) sisältävät useamman kuin yhden muuttuja-avaruuden, mutta eroavat näistä kuitenkin muuttuja-avaruuksien ulottuvuusehtoja tarkasteltaessa (Atluri ym., 1983; Zienkiewicz ym., 2000a). Seka- ja redusoitumattomissa elementeissä muuttujien on aina oltava ulottuvuudeltaan samanasteisia, eli esimerkiksi siirtymä- ja jännityskentät on määriteltävä vaikkapa normaalissa kolmiulotteisessa tilassa. Hybridimenetelmissä tätä edellytystä ei lähtökohtaisesti ole, joten samalla elementillä voidaan periaatteessa mallintaa niin tilavuus- kuin kaksiulotteisia pintakohtaisiakin ilmiöitä.

Sekaelementtimenetelmän soveltaminen tulee kysymykseen, mikäli halutun analyysin tekeminen tavanomaisella siirtymämenetelmällä olisi sellaisenaan mahdotonta, analysoitava systeemi sisältää voimakkaasti toisistaan riippuvaisia tekijöitä tai tavanomaisen siirtymämenetelmän interpolointifunktioiden jatkuvuusvaatimukset olisivat vaikeita toteuttaa (Atluri ym., 1983; Zienkiewicz ym., 2000a). Rakenneanalyseissä tämänkaltaiset seikat voivat olla seurausta esimerkiksi materiaaliominaisuuksista tai muista fysikaalisista tekijöistä. Kokemus elementtianalyseistä on osoittanut, että tavanomaisten analyysien ollessa kyseessä tarvitaan sekaelementtien ominaisuuksia yleensä harvoin, sillä monissa tilanteissa niistä ei saada merkittävästi apua analyysin tarkoituksenmukaiseen toteuttamiseen, mutta sitä vastoin niistä koostuvien systeemien numeerinen ratkaiseminen vaatii usein enemmän laskentatehoa. Lisäksi sekaelementtirakenteiden numeerisista rajoituksista johtuen analysoitavaan tilanteeseen sopivia, numeerisesti vakaita elementtityyppejä on yleensä tarjolla vähemmän verrattuna esimerkiksi siirtymämenetelmään perustuviin elementtityyppeihin (Atluri ym., 1983; Zienkiewicz ym., 2000a) rajaten sekaelementtimenetelmän sovellusmahdollisuuksia entisestään.

2.3.2 Sekaelementtien sovellusmahdollisuudet

Kokoonpuristumattoman materiaalin ongelma

Kokoonpuristumattomien materiaalien analysointi on tavanomainen esimerkki sekaelementtimenetelmän sovelluskohteesta (Zienkiewicz ym., 2000a). Tämä johtuu siitä, että tavanomaisella siirtymämenetelmällä kokoonpuristumattomien materiaalien analysointi on mahdotonta, jolloin on välttämätöntä hyödyntää vaihtoehtoisia lähestymistapoja, joista sekaelementtimenetelmä on tässä tapauksessa sopiva. Siirtymämenetelmässä kokoonpuristumattomuuden ongelman ratkaisemattomuutta havainnollistetaan Lamén parametreihin perustuvalla yhtälöllä (Gere ym., 1990);

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (2.52)$$

missä E on materiaalin kimmokerroin ja ν Poissonin suppeumaluku. Kun materiaali on kokoonpuristumatonta, lähestyy suppeumaluku ν arvoa 0,5. Tässä tilanteessa Lamén λ -vakion nimittäjä lähestyy nollaa, jolloin λ -arvot kasvavat kohti ääretöntä (Gere ym., 1990). Mikäli ääretöntä lähenevät λ -arvot sijoitetaan materiaalin kimmomatriisiin;

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & & & \\ & & & \mu & & \\ & & & & \mu & \\ & & & & & \mu \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

missä muuttuja μ on myös Lamén parametri, saavat kimmomatriisin alkiot vastaavasti äärettömiä arvoja ja siirtymämenetelmä on käytännössä ratkaisematon. Elementtityypistä riippuen siirtymäperusteisen menetelmän ongelmat alkavat usein jo Poissonin suppeumaluvun ylittäessä lukeman 0,4 (Zienkiewicz ym., 2000a). Esimerkiksi lineaaristen kolmioelementtien antamat tulokset sisältävät tyypillisesti voimakkaita värähtelyjä tämän rajan ylitettyään, toisaalta toisen tyyppiset elementit, kuten lineaarista interpolointia korkeampiasteiset tilavuuselementit, saattavat olla vakaampia. Viimeistään kuitenkin Poissonin suppeumaluvun ollessa liki 0,5 muuttuvat kaikki siirtymäperusteiset elementit käyttökelvottomiksi.

Kokoonpuristumattomien materiaalien analysointiin voidaan siis käyttää tarkoituksenmukaisia sekaelementtityyppejä. Näistä ehkä tunnetuin ja käytetyin sekaelementtityyppi on vallitsevia siirtymiä ja paineita analysoiva sekaelementti (Atluri ym., 1983; Zienkiewicz ym., 2000a; Castersen ym., 2009). Kyseisessä sekaelementtityypissä vallitsevat painetermit määritellään analysoitavassa kappaleessa elementin vaikutusalueella vallitsevan deviatorisessa muodossa lausutun jännityskentän perusteella. Kokoonpuristumattomien materiaalien analysointia voidaan toki tehdä myös muuntyyppisillä sekaelementeillä, esimerkiksi tästä elementtityypistä johdetuilla kehitelmillä, joista yhdellä voidaan analysoida myös materiaalin venymiä siirtymien ja paineiden lisäksi.

Fysikaalisten ilmiöiden voimakas keskinäinen riippuvuus

Analysoitava systeemi voi sisältää fysikaalisia ominaisuuksia, jotka riippuvat toisistaan syystä tai toisesta vahvasti (Castersen ym., 2009). Mikäli asiaa tarkastellaan yleisluontoisesti, analyyseissä ilmenee itse asiassa usein tämänkaltaisia tilanteita. Tyypillinen esimerkki voisi olla vaikka jännitysvuon laskenta ulkoisen kuormituksen alla tarkasteltavassa kappaleessa (Gere ym., 1990). Tuolloin systeemissä on kaksi selkeästi toisistaan riippuvaa fysikaalista tekijää, jotka ovat siis analysoitavassa kappaleessa ilmenevät venymät ja niiden seurauksena kappaleeseen muodostuvat jännitykset. Kuitenkin tällaisessa tapauksessa yleensä käytetään tavanomaista siirtymäperusteista elementtimenetelmää muodonmuutosten ratkaisemiseksi, minkä jälkeen niiden perusteella analysoidaan kappaleessa vallitseva jännitysvuo. Sekaelementtimenetelmällä ratkaisua voi toki myös hakea, mutta siitä ei ole ainakaan toistaiseksi tullut vallitseva käytäntö johtuen muun muassa siitä, että siirtymämenetelmä itsessään on suhteellisen tarkka ja useissa tapauksissa myös laskennallisesti tehokas, eikä sekaelementtimenetelmä varsinaisesti toisi uutta arvoa ratkaisun hakemiseen.

Asia kuitenkin muuttuu, mikäli esimerkiksi vallitsevien fysikaalisten riippuvuustekijöiden seurauksena jommankumman muutos aiheuttaa myös välittömän ja ominaisuuksiltaan voimakkaan muutoksen myös toisessa tekijässä. Asia monimutkaistuu vielä enemmän, mikäli tällaisessa tilanteessa on olemassa vielä jonkinlainen epälineaarinen takaisinkytkentäilmukka. Tuolloin voidaan olla tilanteessa, missä tarvitaan useamman tuntemattoman muuttujan sisältäviä elementtejä, eli joko redusoitumattomia, hybridi- tai sekaelementtejä (Atluri ym., 1983; Boffi ym., 2008; Wriggers, 2008).

Esimerkkejä edellä mainituista tapauksista voivat olla muun muassa analysoitaessa esimerkiksi lämpövuon käyttäytymistä paineen vaikutuksen alla jossakin painekattilassa tai muussa vastaavassa. Myös erityisesti metallirakenteiden palonkestoanalyysit sisältävät usein tilanteita, missä metallimateriaalin fysikaaliset ominaisuudet muuttuvat voimakkaasti lämpövuon ylittäessä määrätyn rajan. Vastaavia tilanteita löydetään myös elementein analysoitavista kitkakontaktimalleista otettaessa huomioon myös kontaktissa muodostuvan lämpövuon vaikutus kontaktipintoihin, mikä voi monissa tapauksissa muuttaa materiaaliominaisuuksia ja sitä myötä myös kitkakontaktin tuottamaa voimaa merkittävästi.

Jatkuvuusehdot

Erityisesti laattaelementtien interpoloinnin jatkuvuusehdot voivat joskus olla hankalia toteuttaa siten, että elementti täyttää sekä vaaditut täydellisyys-, että yhteensopivuusvaatimukset niin, että samaan aikaan käytetyt interpolointipolynomit ovat mahdollisimman matala-asteisia (Atluri ym., 1983; Zienkiewicz ym., 2000a; Zienkiewicz ym., 2000b; Boffi ym., 2008). Jos esimerkiksi otetaan vaikkapa siirtymäperusteisen elementtimenetelmän Kirchhoffin laattamalli, vaaditaan interpolointifunktioilta vähintään C^1 -jatkuvuutta (Zienkiewicz ym., 2000a). Näin täytetään elementin täydellisyysvaatimukset, sisältäen jäykän kappaleen liikettä mallintavat termit ja taipumaa riittävällä tarkkuudella approksimoivat, vähintään toista astetta olevat termit. Lisäksi yhteensopivuusvaatimukset edellyttävät interpolointifunktion ja sen derivaatan jatkuvuutta elementistä toiseen, eli siis C^1 -jatkuvuutta. Tämä tilanne johtaa kuitenkin ei-toivottuihin vapausasteisiin ja mikäli jatkuvuusvaatimusta vain lievennetään, ei elementti ole enää välttämättä integroitavissa, ja ainakin siitä tulee epäyhteensopiva eli ei-konforminen elementti.

Epäyhteensopiva laattaelementti voi kuitenkin olla joissain tapauksissa kelvollinen edellyttäen tietysti, että elementti on numeerisesti stabiili. Siirtymäperusteisessa yhden muuttujan elementtimenetelmässä matalampiasteisempaan interpolointiin perustuvien elementtien kehitys on osoittautunut kuitenkin hankalaksi tehtäväksi (Cook ym., 2001; Bathe, 1996; Zienkiewicz ym., 2000a). Yksi ratkaisu tähän ongelmaan on kehittää elementin funktionaaleja siten, että ne ovat integroitavissa myös matalampiasteisten polynomien ollessa kyseessä säilyttäen samalla myös numeerisen stabiiliutensa. Tämä lähestymistapa johtaa asianmukaisten sekaelementtien soveltamiseen, sillä useiden sekaelementtityyppien jatkuvuusvaatimukset ovat lievempiä verrattuna siirtymäperusteiseen elementtimenetelmään.

Esimerkiksi aiemmin mainitun Kirchhoffin laatan Hellinger-Reissnerin tai Veubeke-Hu-Washizun funktionaaliin perustuva sekaelementtiversio edellyttää, että muuttujajoukosta vähintään yhden muuttujan interpolointi on toteutettu vähintään C^0 -jatkuvasti (Zienkiewicz ym., 2000a). Muut interpolointifunktiot voivat useimmissa tapauksissa olla epäjatkuvia, jolloin jatkuvuusehtojen täyttäminen on huomattavasti helpompaa ilman ei-toivottuja vapausasteita, kuin jos tilannetta verrataan yhden muuttujan siirtymäperusteiseen elementtimenetelmään.

2.3.3 Sekaelementtien numeerinen stabiilius

Sekaelementtien ominaisuuksia kuvaava differentiaaliyhtälöryhmä muodostetaan elementiltä vaadittavien fysikaalisten ominaisuuksien funktioiden muodostamalla variaatiofunktionaalilla (Atluri ym., 1983; Zienkiewicz ym., 2000a). Käsiteltäessä kappaleiden mekaanisia ominaisuuksia analysoivia elementtejä, tunnetuimmat variaatioperiaatteet perustuvat joko elementin potentiaalienergian minimointiin tai vaihtoehtoisesti virtuaalisen työn periaatteeseen. Sekaelementtimenetelmässä käytetään usein potentiaalienergian minimointia, sillä teoriana se soveltuu paremmin analysoimaan useiden muuttujafunktioiden keskinäisiä suhteita.

Mahdollisesti tunnetuimmat, erikseen nimetyt sekaelementtimenetelmässä sovellettavat funktionaalit lienevät Hellinger-Reissner-funktionaali (Hellinger, 1914; Reissner, 1950) ja Veubeke-Hu-Washizu-funktionaali (Washizu, 1975). Näistä Hellinger-Reissner-funktionaali on kahden tuntemattoman muuttuja-avaruuden, siirtymien ja jännitysten suhteen määrittävä funktionaali. Veubeke-Hu-Washizu-funktionaali on Hellinger-Reissner-funktionaalia kehittyneempi sen sisältäessä myös materiaalin venymien analysointiin soveltuvan muuttujakentän, minkä vuoksi tähän funktionaaliin perustuvia elementtejä usein käytetään enemmän. Näiden lisäksi tunnettu sekaelementtifunktionaali on siirtymiä ja paineita jännitysperiaatteella approksimoiva, kokoonpuristumattomien materiaalien analysointiin tarkoitettu funktionaali, mutta sitä ei ole nimetty kehittäjiensä mukaan. Itse asiassa sillä ei ole mitään erikseen vakiintunutta nimitystä.

Sekaelementtiä määrittävän funktionaalin diskretoidun differentiaaliyhtälöryhmän ratkaistavuus on koko menetelmän soveltamiskyvyn kannalta kriittinen asia (Zienkiewicz ym., 2000a; Wriggers, 2008). Sekaelementtiä määrittävistä differentiaaliyhtälöistä muodostettavat matriisit voivat useissa tapauksissa olla singulaarisia, jolloin ne eivät ole ratkaistavissa. Tämä on yksi sekaelementtimenetelmän rakenteellisista ongelmista ja tässä suhteessa sekaelementtimenetelmä myös poikkeaa paljon vastaavasta redusoitumattomien elementtien laskentamenetelmän vakioitujen gradienttitermien ehdoista, mitkä täytyvät lähes aina elementtikohtaisten jatkuvuusehtojen täytyessä (Wriggers, 2008; Zienkiewicz ym., 2000a). Myös hybridielementtimenetelmässä ratkaisun löytäminen yhtälöryhmälle on usein suoraviivaisempaa kuin sekaelementtimenetelmässä (Atluri ym., 1983).

Sekaelementtien muuttujavektorin toisiotermien lukumäärä, jotka siis voidaan matemaattisesti itse asiassa ymmärtää myös Lagrangen kertoimina, ja niitä matriisissa vastaavat yhtälöt määrittävät systeemin ratkaistavuuden. Tämän ongelman tarkemman tarkastelun alle otetaan Hellinger-Reissner-funktionaaliin perustuva siirtymien ja jännitysten ratkaisemiseen soveltuva elementtityyppi (Zienkiewicz ym., 2000a);

$$\Pi_{HR} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{iT} \mathbf{S}^i \mathbf{u}^i d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\boldsymbol{\sigma}^{iT} \boldsymbol{\sigma}^i}{\mathbf{E}^i} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^{iT} \mathbf{f}_s^i d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{u}^{iT} \mathbf{f}_p^i d\Gamma, \quad (2.54)$$

missä $\boldsymbol{\sigma}$ on elementin i jännitysvektori, \mathbf{L} differentiaalioperaattori, \mathbf{u} siirtymävektori, \mathbf{E} kimmomatriisi, sekä \mathbf{f}_s ulkoisten tilavuusvoimien ja \mathbf{f}_p ulkoisten pintavoimien vektorit. Integrointialue Ω tarkoittaa elementin integroitavia kokonaisulottuvuuksia, eli esimerkiksi tilavuuselementin tapauksessa tilavuutta ja Γ redusoitua integrointialuetta, eli esimerkiksi valittua pintaa vektorin \mathbf{f}_p määritellessä tällä alueella vallitsevat pintavoimat. Hellinger-Reissnerin funktionaaliin perustuva sekaelementti saadaan diskretisoituun muotoon muodostettaessa sekajäykkyysmatriisi elastisen energian ja tuntemattomien muuttujien Jacobin-muunnoksella. Tämän jälkeen asetetaan tuntemattomina muuttujina olevien jännityksien ja siirtymien, sekä ulkoisten voimien vektori tutunnäköiseen muotoon;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\sigma\sigma}^i & \mathbf{K}_{\sigma u}^i \\ \mathbf{K}_{u\sigma}^{iT} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\sigma}^i \\ \Delta \mathbf{u}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{ext(1)}^i \\ \mathbf{f}_{ext(2)}^i \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

missä

$$\mathbf{K}_{\sigma\sigma}^i = -\int_{\Omega} \frac{\mathbf{V}^{iT} \mathbf{V}^i}{\mathbf{E}^i} d\Omega, \quad \mathbf{K}_{\sigma u}^i = \int_{\Omega} \mathbf{V}^{iT} \mathbf{B}^i d\Omega, \quad (2.56)$$

$$\mathbf{f}_{ext(1)}^i = \mathbf{0} \quad \text{ja} \quad \mathbf{f}_{ext(2)}^i = \int_{\Omega} \mathbf{S}^{iT} \mathbf{f}_s^i d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{S}^{iT} \mathbf{f}_p^i d\Gamma,$$

missä \mathbf{V} on jännityskentän interpolointifunktio, \mathbf{B} kinemaattinen matriisi ja \mathbf{S} muotofunktio matriisi.

Yhtälöryhmä 2.55 on ratkaisematon, mikäli muuttujavektorin ensiötermejä, eli tässä tapauksessa jännitystermejä on vähemmän kuin siirtymätermejä. Tähän tulokseen päästään, kun perehdytään Babushka-Brezzin osoittamaan ehtoon (Babushka, 1973; Brezzi, 1974). Tämä ehto on johdettavissa eliminoimalla sekaelementtiyhtälöstä Schurin lausetta noudattaen ensiömuuttuja $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ (Wriggers, 2008), jolloin päästään muotoon;

$$\left(\mathbf{K}_{u\sigma}^{iT} \left(\mathbf{K}_{\sigma\sigma}^i \right)^{-1} \mathbf{K}_{\sigma u}^i \right) \Delta \mathbf{u} = -\mathbf{f}_{ext(2)}^i + \mathbf{K}_{u\sigma}^T \left(\mathbf{K}_{\sigma\sigma}^i \right)^{-1} \mathbf{f}_{ext(1)}^i, \quad (2.57)$$

jolloin edellytyksenä ratkaisun löytymiselle on, että matriisi $\mathbf{K}_{\sigma\sigma}$ ei saa olla singulaarinen (Wriggers, 2008; Zienkiewicz ym., 2000a). Muussa tapauksessa yhtälön 2.55 tuntemattomat jännitysalkiot nollautuvat tehden yhtälöstä ratkaisemattoman tai vaihtoehtoisesti mahdollistaen useat ratkaisut. Toisiomuuttujia määrittävää vektoria $\Delta \mathbf{u}$ ei myöskään voida määrittellä yksikäsitteisesti, mikäli sulkujen sisällä oleva kerroinmatriisi

$$\left(\mathbf{K}_{u\sigma}^{iT} \left(\mathbf{K}_{\sigma\sigma}^i \right)^{-1} \mathbf{K}_{\sigma u}^i \right) \quad (2.58)$$

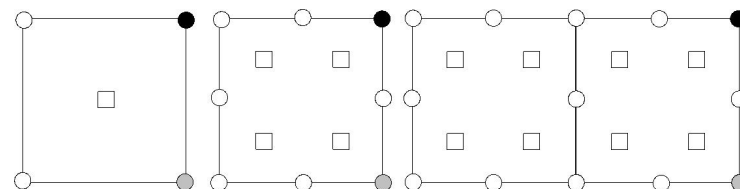
on singulaarinen. Tästä seuraa, että singulaarisuus vältetään Babushka-Brezzin ehdolla;

$$n_{\sigma} \geq n_u, \quad (2.59)$$

missä n_{σ} on jännityskenttää ja n_u vastaavasti siirtymäkenttää interpoloitavien solmujen vapausasteiden lukumäärä.

Kun Babushka-Brezzin ehto (yhtälö 2.59) on täytetty, kykenevät sekaelementille asetetut reunaehdot yleensä poistamaan matriisiyhtälön singulaarisuuden, kuten on laita myös tavanomaisen siirtymiin perustuvan elementtimenetelmän tapauksessa. Asia ei kuitenkaan välttämättä ole kaikissa tapauksissa näin, vaan singulaarisuutta ja sitä myötä ratkaisemattomuutta voi toki esiintyä, vaikka tämä ehto täytyisikin (Zienkiewicz ym., 2000a). Syytä on myös korostaa, että vallitsevan ehdon täyttäminen ei ole vain sekaelementtikohtaista, vaan myös useiden sekaelementtien systeemin on kokonaisuudessaan noudatettava Babushka-Brezzin ehtoa. Tästä seuraa, että esimerkiksi yksittäinen sekaelementti voi olla singulaarinen ja sitä myötä vailla yksikäsitteistä ratkaisua, mutta sama sekaelementti voi osana sopivan elementtiverkon muodostamaa, sopivasti rajoitettua systeemiä, ollakin ratkaistavissa (Zienkiewicz ym., 2000a).

Babushka-Brezzin tasapainoehtojen täytyminen voidaan ratkaista helposti käyttäen elementin patch-testausta. Tässä lähestymistavassa keskeistä on elementtikohtaiset edellisessä kappaleessa esitetyt muuttujakenttiä interpoloivien solmujen vapausasteiden suhteet. Myös asetetut rajoitteet luonnollisesti määrittävät, milloin elementtisysteemistä tulee ratkaistava. Kuvassa 3 on nähtävissä esimerkki kaksiulotteisen laatan patch-testauksesta. Siirtymäsolmuissa oletetaan olevan kaksi vapausastetta ja jännityssolmuissa kolme.



Ei reunaehtoja

$$n_{\sigma} = 1 \times 3 = 3$$

$$n_u = 4 \times 2 = 8$$

(hylätty)

$$n_{\sigma} = 4 \times 3 = 12$$

$$n_u = 8 \times 2 = 16$$

(hylätty)

$$n_{\sigma} = 8 \times 3 = 24$$

$$n_u = 13 \times 2 = 26$$

(hylätty)

Reunaehdot: Harmaat solmut kiinnitetty

$$n_{\sigma} = 1 \times 3 = 3$$

$$n_u = 4 \times 2 - 2 = 6$$

(hylätty)

$$n_{\sigma} = 4 \times 3 = 12$$

$$n_u = 8 \times 2 - 2 = 14$$

(hylätty)

$$n_{\sigma} = 8 \times 3 = 24$$

$$n_u = 13 \times 2 - 2 = 24$$

(hyväksytty)

Reunaehdot: Harmaat ja mustat solmut kiinnitetty

$$n_{\sigma} = 1 \times 3 = 3$$

$$n_u = 4 \times 2 - 4 = 4$$

(hylätty)

$$n_{\sigma} = 4 \times 3 = 12$$

$$n_u = 8 \times 2 - 4 = 12$$

(hyväksytty)

$$n_{\sigma} = 8 \times 3 = 24$$

$$n_u = 13 \times 2 - 4 = 22$$

(hyväksytty)

Kuva 3: Sekaelementtien patch-testaus

2.4 Esimerkkejä sekaelementeistä

2.4.1 Veubeke-Hu-Washizu-sekaelementit

Edellisessä luvussa on esitelty Hellinger-Reissner-funktionaaliin perustuva sekaelementti (Hellinger, 1914; Reissner, 1950; Zienkiewicz ym., 2000a), missä tuntemattomina muuttujina ovat siirtymät ja jännitykset. Kyseinen sekaelementti edellyttää siirtymäfunktioilta C^0 -jatkuvuutta, mutta jännityskentän interpoloinnin sitä vastoin sallitaan olevan epäjatkuva. Hellinger-Reissner-funktionaalia on laajennettu sittemmin Veubeke-Hu-Washizu-funktionaaliksi (de Veubeke, 1972; Washizu, 1975), missä edellä mainittujen muuttujakenttien lisäksi myös venymäkenttää approksimoidaan. Tämä funktionaali on muotoa;

$$\Pi_{VHW} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^{iT} \mathbf{E}^i \boldsymbol{\varepsilon}^i d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{iT} (\boldsymbol{\varepsilon}^i - \mathbf{L}\mathbf{u}^i) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^{iT} \mathbf{f}_s^i d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{u}^{iT} \mathbf{f}_p^i d\Gamma, \quad (2.60)$$

missä $\boldsymbol{\varepsilon}$ on elementin i venymävektori, \mathbf{E} kimmomatriisi, $\boldsymbol{\sigma}$ jännitysvektori, \mathbf{L} differentiaalioperaattori sekä \mathbf{f}_s ja \mathbf{f}_p ulkoisten voimien vektorit. Integrointialueet noudattavat samaa logiikkaa kuin siirtymä-jännitys-sekaelementinkin tapauksessa. Diskretisointi johtaa Veubeke-Hu-Washizu-funktionaalin matriisimuotoon (Zienkiewicz ym., 2000a);

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon}^i & \mathbf{K}_{\varepsilon\sigma}^i & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{\sigma\varepsilon}^{iT} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\sigma u}^i \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\sigma u}^i & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^i \\ \Delta \boldsymbol{\sigma}^i \\ \Delta \mathbf{u}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{ext(3)}^i \end{bmatrix}, \quad (2.61)$$

missä

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon}^i &= \int_{\Omega} \mathbf{Z}^{iT} \mathbf{E}^i \mathbf{Z}^i d\Omega, & \mathbf{K}_{\sigma u}^i &= \int_{\Omega} \mathbf{V}^{iT} \mathbf{B}^i d\Omega, \\ \mathbf{K}_{\sigma\varepsilon}^i &= - \int_{\Omega} \mathbf{Z}^{iT} \mathbf{V}^i d\Omega & \text{ja} & \mathbf{f}_{ext(3)}^i &= \int_{\Omega} \mathbf{S}^{iT} \mathbf{f}_s^i d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{S}^{iT} \mathbf{f}_p^i d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Yhtälössä 2.62 \mathbf{Z} on venymä- ja \mathbf{V} jännityskenttää interpoloiva matriisi, \mathbf{B} kinemaattinen matriisi ja \mathbf{S} muotofunktio matriisi. Babushka-Brezzin tasapainoehdot (Babushka, 1973; Brezzi, 1974; Zienkiewicz ym., 2000a) tälle sekaelementtityypille määritetään seuraavasti;

$$\begin{aligned} n_\varepsilon + n_u &\geq n_\sigma \\ n_\sigma &\geq n_u \end{aligned}, \quad (2.63)$$

missä n_ε on venymien, n_u siirtymien ja n_σ jännitysvapausasteiden elementti- tai systeemikohtaiset lukumäärät. Kuten myös Hellinger-Reissnerin funktionaaliin perustuvan sekaelementin tapauksessa, on nämäkin ehdot täytettävä sekaelementin numeerisen ratkaistavuuden lähtökohtaiseksi takaamiseksi. Koska Veubeke-Hu-Washizun funktionaali on Hellinger-Reissnerin funktionaalista muodostettu jatkokehiteelmä, nähdään myös tasapainoehdoissa samankaltaisuuksia. Tasapainoehtojen johtaminen tässä sekaelementtityypissä tapahtuu redusoimalla valittua satunnaiskerrointa käyttämällä ensin venymäkenttä sekaelementistä, minkä jälkeen jäljelle jäänyt kahden muuttujan yhtälöryhmä ratkaistaan uudelleen redusoimalla matriisia Schurin lausetta soveltaen, kuten tehdään Hellinger-Reissnerin elementinkin tasapainoehtoja määriteltäessä (Wriggers, 2008; Simo ym., 1985).

Veubeke-Hu-Washizun funktionaaliin perustuvan sekaelementin sovellusmahdollisuuksia hankaloittavat merkittävästi varsin vaativat Babushka-Brezzin ehdot, minkä seurauksena sopivien, numeerisesti tasapainoisten ja valituille analyyseille soveltuvien sekaelementtikonstruktioiden muodostaminen käy hankalaksi (Zienkiewicz ym., 2000a). Tämän johdosta mainitusta sekaelementtityypistä on kehitetty numeerisesti stabiilimpi versio, missä venymäkentän määrittely poikkeaa jonkin verran perinteisestä Veubeke-Hu-Washizu-funktionaalista. Tämä paranneltu funktionaali on muotoa (Zienkiewicz ym., 1987; Zienkiewicz ym., 2000a);

$$\Pi_{EN} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon}^i & \mathbf{K}_{\varepsilon\sigma}^i & \mathbf{K}_{\varepsilon u}^i \\ \mathbf{K}_{\sigma\varepsilon}^{iT} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{u\varepsilon}^{iT} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{uu}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{EN}^i \\ \Delta \boldsymbol{\sigma}^i \\ \Delta \mathbf{u}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{ext}^i \end{bmatrix}, \quad (2.64)$$

missä

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon}^i &= \int_{\Omega} \mathbf{Z}_{EN}^{iT} \mathbf{E}^i \mathbf{Z}_{EN}^i d\Omega, & \mathbf{K}_{\varepsilon\sigma}^i &= \int_{\Omega} \mathbf{Z}_{EN}^{iT} \mathbf{V}^i d\Omega, & \mathbf{K}_{\varepsilon u}^i &= \int_{\Omega} \mathbf{Z}_{EN}^{iT} \mathbf{E}^i \mathbf{B}^i d\Omega, \\ \mathbf{K}_{uu}^i &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^{iT} \mathbf{E}^i \mathbf{B}^i d\Omega & \text{ja} & & \mathbf{f}_{ext(3)}^i &= \int_{\Omega} \mathbf{S}^{iT} \mathbf{f}_s^i d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{S}^{iT} \mathbf{f}_p^i d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Tämän sekaelementin Babushka-Brezzin ehdot ovat muotoa (Zienkiewicz ym., 1987);

$$n_u + n_{EN} \geq n_{\sigma}, \quad (2.66)$$

missä n_u on siirtymien, n_{EN} venymien ja n_{σ} jännitysten vapausasteet. Kuten Babushka-Brezzin ehdosta nähdään, on tämän ehdon täyttäminen huomattavasti helpompaa verrattuna alkuperäisen Veubeke-Hu-Washizu-funktionaaliin perustuvan sekaelementin tasapainoehdon täyttämiseen.

Suorakaidetyyppinen elementti, mitä kehittäjiensä mukaan joissain lähteissä kutsutaan myös Simo-Rifai-suorakaiteeksi (Simo ym., 1990), on erikoistapaus yllä esitellystä, stabiilimmasta Veubeke-Hu-Washizu-kehittelystä (Zienkiewicz ym., 2000a). Simo-Rifai-sekaelementissä muuttujina ovat ainoastaan venymät ja siirtymät. Tämä versio on tarkoitettu nimensä mukaisesti tasoanalyysiin ehkäisten lukkiutumislmiötä lukuun ottamatta kokoonpuristumattomia tapauksia. Myös muita kehitelmiä esitetyistä sekaelementtityypeistä on tehty, näitä voi löytää muun muassa lähteistä (Andelfinger ym., 1993; Bischoff ym., 1999; Li, 2007; Alsafadie ym., 2010).

2.4.2 Kokoonpuristumattomuutta analysoivat elementit

Kokoonpuristumattomien materiaalien analysointi on sekaelementtimenetelmän keskeinen sovelluskohde. Hellinger-Reissner- tai Veubeke-Hu-Washizu-funktionaaliin perustuvat elementtityypit kykenevät numeerisesti käsittelemään myös kokoonpuristumattomia materiaaleja, mutta niiden laskentateho ja numeerinen tarkkuus eivät yleensä ole parhaimmillaan analysoitaessa tämäntyyppisiä materiaaleja (de Veubeke, 1972; Washizu, 1975; Atluri ym., 1983; Zienkiewicz ym., 2000a; Wriggers, 2008). Lisäksi haasteita aiheuttavat Babushka-Brezzin säännöt, jotka ovat varsin jyrkät erityisesti alkuperäistä Veubeke-Hu-Washizu-sekaelementtiä ajatellen (Zienkiewicz ym., 2000a). Muun muassa näiden syiden vuoksi kokoonpuristumattomien materiaalien analyysistä toteutetaan yleensä käyttämällä tähän tarkoitukseen sopivaa sekaelementtityyppiä, missä tuntemattomina muuttujina ovat siirtymät ja paineet. Paineentilaa tosin approksimoidaan deviatorisella jännityksellä (Zienkiewicz ym., 2000a), mikä voi joissain tilanteissa olla syytä ottaa huomioon tämän sekaelementtityypin ominaisuuksia pohdittaessa.

Siirtymät ja paineet tuntemattomina muuttujina pitävä sekaelementtityyppi perustuu erikseen nimeämättömään funktionaaliin (Herrmann, 1968; Zienkiewicz ym., 2000a);

$$\Pi_{UP} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{iT} \mathbf{E}_d^i \boldsymbol{\varepsilon}^i d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{iT} \mathbf{m} p^i d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^{iT} \mathbf{f}_s^i d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^{iT} \mathbf{f}_p^i d\Gamma \\ \int_{\Omega} \delta p^i \left[\mathbf{m}^T \boldsymbol{\varepsilon}^i - \frac{p^i}{K^i} \right] d\Omega \end{array} \right. , \quad (2.67)$$

missä $\boldsymbol{\varepsilon}$ on virtuaalisen venymän vektori, \mathbf{E}_d deviatorinen kimmomatriisi, p vallitsevan paineen termi, K puristuvuuskerroin, \mathbf{u} siirtymävektori, sekä \mathbf{f}_s ja \mathbf{f}_p ulkoisten voimien vektorit. Funktionaalissa esiintyvät integrointirajat Ω ja Γ merkitsevät integrointia joko koko avaruuden (Ω) tai sitten valitun pinnan (Γ) yli. Vektori \mathbf{m} on projektiovektori, mikä kolmiulotteisessa tapauksessa noudattaa muotoa;

$$\mathbf{m} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T . \quad (2.68)$$

Toisin kuin Hellinger-Reissner- tai Veubeke-Hu-Washizu-funktionaalien kohdalla, ei tälle funktionaalille eikä yleensäkaan kokoonpuristumattomia materiaaleja analysoivien sekaelementtien funktionaaleille ole vakiintunut mitään erisnimeä (Zienkiewicz ym., 2000a; Wriggers, 2008). Sama pätee myös moniin lämpövuota approksimoiviin sekaelementtityyppeihin. Funktionaalin diskretisointi Lagrangen kerrointen menetelmällä johtaa helpommin käsiteltävään matriisimuotoon (Herrmann, 1968);

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^i & \mathbf{K}_{up}^i \\ \mathbf{K}_{pu}^{iT} & -\mathbf{K}_{pp}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^i \\ \Delta \mathbf{p}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{ext(1)}^i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.69)$$

missä painevektorin $\Delta \mathbf{p}$ voidaan nähdä olevan matemaattisessa mielessä myös Lagrangen kerroinvektori. Diskretisoidun muodon alimatriisit ovat;

$$\mathbf{K}_{uu}^i = \int_{\Omega} \mathbf{B}^{iT} \mathbf{E}_d^i \mathbf{B}^i d\Omega, \quad \mathbf{K}_{up}^i = \int_{\Omega} \mathbf{B}^{iT} \mathbf{m} \mathbf{V}_p^i d\Omega, \quad (2.70)$$

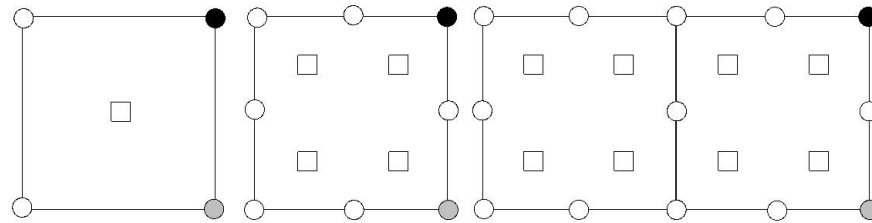
$$\mathbf{K}_{pp}^i = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{V}_p^{iT} \mathbf{V}_p^i}{K^i} d\Omega \quad \text{ja} \quad \mathbf{f}_{ext(1)}^i = \int_{\Omega} \mathbf{S}^{iT} \mathbf{f}_s^i d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{S}^{iT} \mathbf{f}_p^i d\Gamma,$$

missä \mathbf{B} on kinemaattinen matriisi, \mathbf{V}_p painekentän interpolointimatriisi ja \mathbf{S} muotofunktiomatriisi. Tämä sekaelementtityyppi täyttää Babushka-Brezzin tasapainoehdon, kun siirtymäsolmujen vapausasteiden määrä on suurempi kuin painekenttää interpoloivien vapausasteiden lukumäärä. Tämä osoitetaan yhtälöllä (Herrmann, 1968; Zienkiewicz ym., 2000a);

$$n_u \geq n_p, \quad (2.71)$$

missä n_u on siirtymien ja n_p paineiden vapausasteiden lukumäärä. Tämän tasapainoehdon toteuttaminen on huomattavasti helpompaa, kuin esimerkiksi Hellinger-Reissner-, tai Veubeke-Hu-Washizu-funktionaaleihin perustuvien sekaelementtien tapauksissa. Siirtymäsolmuja on yleensä helpompi lisätä tarvittaessa ja koska interpolointikentän jatkuvuusehdot koskevat ainoastaan niitä, saavutetaan numeerinen stabiilius yleensä suhteellisen helposti.

Stabiiliusehtoja havainnollistetaan kuvilla 4 ja 5, joista erityisesti kuvasta 4 havaitaan selkeästi, että tämääntyyppiset sekaelementit vastaavilla reunaehdoilla verrattuna esimerkiksi Hellinger-Reissner-sekaelementin patch-testien tuloksiin ovat huomattavasti toimivampia.



Ei reunaehtoja

$$n_p = 1 \times 1 = 1$$

$$n_u = 4 \times 2 = 8$$

(hyväksytty)

$$n_p = 4 \times 1 = 4$$

$$n_u = 8 \times 2 = 16$$

(hyväksytty)

$$n_p = 8 \times 1 = 8$$

$$n_u = 13 \times 2 = 26$$

(hyväksytty)

Reunaehdot: Harmaat solmut kiinnitetty

$$n_p = 1 \times 1 = 1$$

$$n_u = 4 \times 2 - 2 = 6$$

(hyväksytty)

$$n_p = 4 \times 1 = 4$$

$$n_u = 8 \times 2 - 2 = 14$$

(hyväksytty)

$$n_p = 8 \times 1 = 8$$

$$n_u = 13 \times 2 - 2 = 24$$

(hyväksytty)

Reunaehdot: Harmaat ja mustat solmut kiinnitetty

$$n_p = 1 \times 1 = 1$$

$$n_u = 4 \times 2 - 4 = 4$$

(hyväksytty)

$$n_p = 4 \times 1 = 4$$

$$n_u = 8 \times 2 - 4 = 12$$

(hyväksytty)

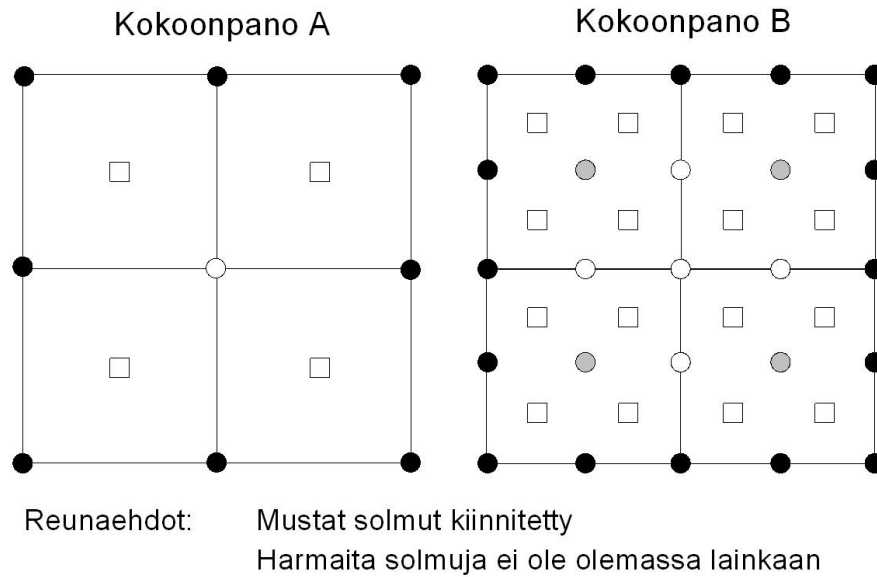
$$n_p = 8 \times 1 = 8$$

$$n_u = 13 \times 2 - 4 = 22$$

(hyväksytty)

Kuva 4: Siirtymä-paine-elementin patch-testaus

Koska kyseessä on kuitenkin painekenttää simuloiva sekaelementti, voidaan sitä käyttää myös painekentän yleiseen analysointiin. Tällaisissa tapauksissa voidaan törmätä kuitenkin tilanteeseen, missä elementtisysteemille asetetaan reunaehdoiksi reunasolmujen kiinnittäminen kauttaaltaan. Tällaisissa tilanteissa, erityisesti mikäli elementtejä on tarkoitus syystä tai toisesta käyttää melko vähän, voivat tasapainoehtojen asettamat rajat kuitenkin tulla vastaan varsin nopeasti (ks. kuva 5). Tämänkaltaisissa tilanteissa nimittäin reunaehdot koskettavat usein ainoastaan siirtymäsolmuja ja erityisesti yksinkertaisilla elementeillä asetetut reunaehdot helposti vähentää systeemin siirtymävapausasteiden määrää liian pieneksi verrattuna painevapausasteiden määrään, jolloin Babushka-Brezzin ehto ei tässä tilanteessa enää täyty. Tämä ongelma on kuitenkin korjattavissa viimeistään tihentämällä elementtiverkkoa riittävästi. Toinen vaihtoehto on käyttää sekaelementtejä, joissa painetta interpoloivia solmuja on vähemmän ja siirtymäsolmuja vastaavasti enemmän (esimerkiksi Lagrange- tai Serendip-tyyppiset elementit).



Kokoonpano A

$$n_p = 4 \times 1 = 4$$

$$n_u = 1 \times 2 = 2$$

(hylätty)

Kokoonpano B

$$n_p = 16 \times 1 = 16$$

$$n_u = 5 \times 2 = 10$$

(hylätty)

Reunaehdot: Mustat solmut kiinnitetty
Harmaat solmut olemassa, ei rajoitteita

Kokoonpano A

$$n_p = 1 \times 1 = 1$$

$$n_u = 4 \times 2 = 4$$

(hyväksytty)

Kokoonpano B

$$n_p = 16 \times 1 = 16$$

$$n_u = 9 \times 2 = 18$$

(hyväksytty)

Kuva 5: Siirtymä-paine-elementtikokoonpanojen patch-testaus

Kokoonpuristumattomille materiaaleille soveltuvasta siirtymä-paine-elementistä on kehitetty myös venymiä approksimoiva sekaelementtikonstruktio. Tätä sekaelementtityyppiä kutsutaan joissain lähteissä myös B-Bar-elementiksi (Zienkiewicz ym., 2000a). Kyseessä on siis kolmen tuntemattoman muuttujakentän sekaelementtityyppi, missä tuntemattomina muuttujina ovat siirtymät, paineet ja venymät. Tämän sekaelementtityypin fysikaaliset ominaisuudet määrittävä funktioaali voidaan kirjoittaa muodossa;

$$\Pi_{UPE} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^{iT} \mathbf{E}_d^i \boldsymbol{\varepsilon}^i + \varepsilon_V^i K^i \varepsilon_V^i d\Omega + \int_{\Omega} p^i (\mathbf{m}^T \boldsymbol{\varepsilon}^i - \varepsilon_V^i) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^{iT} \mathbf{f}_s^i d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{u}^{iT} \mathbf{f}_p^i d\Gamma, \quad (2.72)$$

missä $\boldsymbol{\varepsilon}$ on venymävektori ja ε_V volymetrinen venymän termi.

Yhtälön 2.72 muut symbolit ovat esitelty muiden sekaelementtityyppien yhtälöissä. Funktionaalille ei ole mitään erityistä nimeä ja diskretisoitaessa se ratkaistavaan matriisimuotoon saadaan yhtälö;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^i & \mathbf{K}_{up}^i & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{pu}^{iT} & \mathbf{0} & -\mathbf{K}_{ZP}^i \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K}_{ZP}^{iT} & \mathbf{K}_{ZZ}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^i \\ \Delta \mathbf{p}^i \\ \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_V^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{ext(1)}^i \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{ext(3)}^i \end{bmatrix}, \quad (2.73)$$

missä

$$\mathbf{K}_{ZP}^i = \int_{\Omega} \mathbf{Z}_V^T \mathbf{V} d\Omega \quad \text{ja} \quad \mathbf{K}_{ZZ}^i = \int_{\Omega} \mathbf{Z}_V^T K \mathbf{Z}_V d\Omega, \quad (2.74)$$

missä \mathbf{Z}_V on volymetristä venymää approksimoiva interpolointimatriisi. Muut yhtälön 2.73 alimatriisit, joita ei ole esitelty yhtälössä 2.74, ovat identtisiä siirtymä-paine-elementtityypin vastaavien alimatriisien kanssa. Tämän sekaelementtiversio selkeänä etuna on mahdollisuus volymetrisen venymän approksimoituyhtälön eliminointiin, minkä seurauksena tästä sekaelementistä muodostuu siirtymä-paine-sekaelementti. Tämä mahdollistaa myös saman Babushka-Brezzin tasapainoehdon soveltamisen, kuin siirtymä-paine-sekaelementinkin tapauksessa (Zienkiewicz ym., 2000a). Tästä seuraa, että sopivien elementtikonstruktioiden löytäminen helpottuu, kun erikseen ei tarvitse huomioida volymetrisen venymäkentän numeerista stabiiliutta verrattuna muihin muuttujakenttiin.

Koska sekaelementtejä käytetään paljon kokoonpuristumattomien materiaalien tutkimiseen, on niiden parissa tehty myös paljon jatkokehitystä verrattuna tässä työssä esiteltyihin perusratkaisuihin. Esimerkiksi sekaelementtityypille tehokkaita iterointi- ja integrointimenetelmiä on etsitty muun muassa Zienkiewiczin ym. (1984) tutkimuksissa, numeerista stabiilisuutta niin painekentän kuin yleensäkin elementtikonstruktion suhteen on kirjoitettu julkaisuja esimerkiksi Malkusin ym. (1978), Brezzin ym. (1984), Oñaten (1998) ja Zienkiewiczin ym. (1991) työn tuloksena.

3. Sekaelementit ja absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmä

3.1 Siirtymä-jännityselementti

3.1.1 Siirtymä-jännitys-sekaelementtikonstruktio

Siirtymät ja jännitykset tuntemattomina muuttujina sisältävä sekaelementtityyppi (Zienkiewicz ym., 2000a) on esitelty absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä lausuttuna tilavuuselementtinä ACMD 2012 konferenssissa (Altarriba ym., 2012). Tämä elementti on valittu ensimmäiseksi tutkimuskokeiluksi sen ominaisuuksien suhteellisen yksinkertaisuuden vuoksi. Jännitykset ja siirtymät ovat toisistaan riippuvia suureita, niiden soveltamista rakenneanalyysiin on tutkittu paljon ja tavanomaiseen elementtimenetelmään perustuva sekaelementti on tulosten vertailemiseksi helppo kehittää. Valittu sekaelementti perustuu Hellinger-Reissner-funktionaaliin (Hellinger, 1914; Reissner, 1950) ja se on esitelty tarkemmin luvussa 2.3.3.

Absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmässä elementistä valittu satunnainen piste lausutaan yhtälöllä (Shabana, 1996; Shabana, 2008; Shabana, 2010);

$$\mathbf{r}^i = \mathbf{S}^i \mathbf{e}^i, \quad (3.1)$$

missä \mathbf{S} on elementin i muotofunktio matriisi ja \mathbf{e} elementin solmujen asema- ja orientaatiovektori. Koska tässä tapauksessa mallinnettavaksi on valittu kahdeksan siirtymäsolmua sisältävä tilavuuselementti, määritetään solmujen asemat ja orientaatiot seuraavasti;

$$\mathbf{e}^i = \left[r_{1x}^i \quad r_{1y}^i \quad r_{1z}^i \quad \frac{\partial r_{1x}^i}{\partial x} \quad \frac{\partial r_{1y}^i}{\partial x} \quad \frac{\partial r_{1z}^i}{\partial x} \quad \frac{\partial r_{1x}^i}{\partial y} \quad \dots \quad \frac{\partial r_{8z}^i}{\partial z} \right]^T. \quad (3.2)$$

Valitun sekaelementtikonstruktion muotofunktiot asetetaan muotofunktio matriisiin vinottain ulottuvuusriippuvaisten yksikkö matriisien (tässä tapauksessa siis 3 x 3) avulla;

$$\mathbf{S}^i = \left[S_1^i \mathbf{I}_3 \quad S_{1x}^i \mathbf{I}_3 \quad S_{1y}^i \mathbf{I}_3 \quad S_{1z}^i \mathbf{I}_3 \quad S_2^i \mathbf{I}_3 \quad \dots \quad S_{8z}^i \mathbf{I}_3 \right]. \quad (3.3)$$

Absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmän mukaan valitun sekaelementin siirtymäsolmut lausutaan siis absoluuttisen, eli globaalin koordinaatiston origon suhteen riippumatta sekaelementin asemasta tai orientaatiosta valitussa koordinaatistossa tai elementtikokoonpanossa. Sekaelementin ollessa kyseessä haasteeksi kuitenkin nousee jännityskentälle valittava koordinaatisto. Absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmä nimityksensä perusteella tietysti vaatisi, että myös jännitykset tulisi lausua globaalin origon suhteen kaikissa tilanteissa. Tällainen lähestymistapa aiheuttaisi kuitenkin hankaluuksia, sillä jännitykset ovat fysikaalisena suureena erittäin riippuvaisia elementissä tapahtuvista muodonmuutoksista. Vaikka niiden lausunta globaalin origon suhteen voitaisiin matemaattisesti toteuttaaakin, muuttuisi näin toimittaessa niiden selkeä ilmaiseminen analysoijalle hankalaksi. Esimerkiksi Euler-Bernoullin palkin taivutustapauksessa on selvää, että palkissa vallitseva taivutusjännitys on suunnaltaan vastakkainen palkin neutraaliakselin molemmiin puolin (Gere ym., 1990). Mikäli mainittu jännityskenttä mallinnetaan analysoitavan palkin lokaalin koordinaatiston suhteen, mitä tuolloin myös neutraaliakselin voidaan olettaa noudattavan, on simuloinnin tulosten käsittely analysoijalle selkeää. Jos jännityskenttää approksimoidaan taas globaalin origon suhteen, on tulosten tulkinta hankalaa jännitystermien ollessa lausuttuna palkin suhteen satunnaisessa asemassa olevien globaalien koordinaattiakselien suhteen. Jännitysgradientin voisi toki etsiä jännityskentän kasvusuuntaa valituissa pisteissä, mutta on syytä muistaa, että jokainen laskentaprosessi vaatii sekä laskentatehoa että aiheuttaa erityyppisiä, kumuloituvia numeerisia virheitä lopputulokseen. Valitaan siis tässä tapauksessa jännitykset lausuttaviksi sekaelementin lokaalin koordinaatiston suhteen.

Sekaelementin kinemaattinen matriisi (Zienkiewicz ym., 2000a) määritellään yhtälöllä;

$$\mathbf{B}^i = \mathbf{L}\mathbf{S}^i, \quad (3.4)$$

missä muotofunktio matriisi \mathbf{S} kertova matriisi \mathbf{L} on systeemin differentiaalioperaattori (Cook ym., 2001; Bathe, 1996; Zienkiewicz ym., 2000a). Mikäli sekaelementissä ilmenevät muodonmuutokset oletetaan lineaarisiksi, lausutaan venymävektori seuraavasti;

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^i = \mathbf{B}^i \mathbf{e}^i. \quad (3.5)$$

Systeemin epälinearisointi voidaan teoriassa toteuttaa kinemaattisen matriisin epälinearisoinnilla (Cook ym., 2001; Bathe, 1996). Tässä tutkimuksessa ei näin ole kuitenkaan toimittu systeemin yksinkertaistamiseksi tutkimuksellisista syistä. On kuitenkin syytä huomioida, että tulevilla tutkimuksilla on tähän seikkaan syytä kiinnittää huomiota. Lineaaristen venymien mallinnuksen sisältävän elementin suoritus- ja sovelluskyky on kuitenkin huomattavan rajallinen verrattuna epälinearisesti lausuttuihin venymiin.

Jännityskenttää interpoloivat funktiot asetetaan interpolointimatriisiin muotofunktioiden tapaan huomioiden, että tässä tapauksessa kaikki jännityskomponentit sisältäen siis normaali- että leikkausjännitykset, määritetään erikseen (Zienkiewicz ym., 2000a);

$$\mathbf{V}^i = [V_1^i \mathbf{I}_6 \quad V_2^i \mathbf{I}_6 \quad V_3^i \mathbf{I}_6 \quad \dots \quad V_{20}^i \mathbf{I}_6], \quad (3.6)$$

missä $V_{1...20}$ on jännityskenttää interpoloiva funktio ja \mathbf{I}_6 6 x 6-tyyppinen yksikkömatriisi.

Tuntemattomat jännitysmuuttujat lausutaan vektorilla;

$$\boldsymbol{\sigma}^i = [\sigma_{1x}^i \quad \sigma_{1y}^i \quad \sigma_{1z}^i \quad \tau_{1xy}^i \quad \tau_{1yz}^i \quad \tau_{1xz}^i \quad \dots \quad \tau_{20xz}^i]^T, \quad (3.7)$$

missä termit σ_{ij} ovat alaindeksissä nimetyin akselin suuntaisia normaali-jännityksiä ja τ_{ijk} vastaavia leikkausjännityksiä. Jännityskentässä tapahtuvat muutokset määritellään vektorimuodossa siirtymäkentän tapaan;

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}^i = \mathbf{V}^i \boldsymbol{\sigma}^i. \quad (3.8)$$

Hellinger-Reissner-funktionaali määrittää materiaalissa ilmenevien muodonmuutosten ja niistä seuraavien jännitysten suhteen (Hellinger, 1914; Reissner, 1950; Zienkiewicz ym., 2000a). Ulkoiset voimat huomioiden kirjoitetaan Hellinger-Reissner-funktionaali muotoon;

$$\Pi_{HR} = \int_V \left(\Delta \boldsymbol{\sigma}^{iT} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^i - \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\sigma}^{iT} (\mathbf{E}^i)^{-1} \Delta \boldsymbol{\sigma}^i \right) dV - \int_V \mathbf{r}^{iT} \mathbf{f}_s^i dV - \int_A \mathbf{r}^{iT} \mathbf{f}_p^i dA, \quad (3.9)$$

missä \mathbf{E}^{-1} on materiaalin käänteinen kimmomatriisi, ja vektorit \mathbf{f}_s ja \mathbf{f}_p määrittävät kappaleeseen vaikuttavia ulkoisia voimia.

Käänteinen kimmomatriisi (Gere ym., 1990) lausutaan seuraavasti;

$$(\mathbf{E}^i)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E^i} & -\frac{\nu^i}{E^i} & -\frac{\nu^i}{E^i} & & & \\ -\frac{\nu^i}{E^i} & \frac{1}{E^i} & \frac{\nu^i}{E^i} & & & \\ -\frac{\nu^i}{E^i} & \frac{\nu^i}{E^i} & \frac{1}{E^i} & & & \\ & & & \frac{2(1+\nu^i)}{E^i} & & \\ & & & & \frac{2(1+\nu^i)}{E^i} & \\ & & & & & \frac{2(1+\nu^i)}{E^i} \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

missä ν on materiaalikohtainen Poissonin suppeumakerroin ja E kimmokerroin. Elementin elastinen energia määritetään integroimalla funktionaalin materiaaliominaisuustermit;

$$\Pi = \int_V \left(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{iT} \Delta \boldsymbol{\sigma}^i - \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\sigma}^{iT} (\mathbf{E}^i)^{-1} \Delta \boldsymbol{\sigma}^i \right) dV, \quad (3.11)$$

jolloin elastiset voimat määritetään muodostamalla elementin elastisen energian yhtälöstä Jacobin matriisi tuntemattomien muuttujien vektorin suhteen. Tätä lähestymistapaa ovat käyttäneet muun muassa Escalona ym. (1998) ja Dmitrochenko ym. (2003);

$$\mathbf{f}_{el}^i = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}^i}, \quad (3.12)$$

missä tuntemattomien muuttujien vektori \mathbf{q} sisältää siirtymien ja jännitysten vektorit;

$$\mathbf{q}^i = \left[\boldsymbol{\sigma}^{iT} \quad \mathbf{e}^{iT} \right]^T. \quad (3.13)$$

Vastaavasti sekaelementin jäykkyysmatriisi muodostetaan elastisten voimien vektorista Jacobin matriisi tuntemattomien muuttujien vektorin suhteen;

$$\mathbf{K}^i = \frac{\partial \mathbf{f}_{el}^i}{\partial \mathbf{q}^i}. \quad (3.14)$$

Sekaelementtien numeerisen tasapainon edellytyksenä ovat Babushka-Brezzin tasapainoehtojen täyttäminen (Babushka, 1973; Brezzi, 1974; Atluri ym., 1983; Zienkiewicz ym., 2000a). Siirtymä- ja jännitysmuuttujat sisältävä Hellinger-Reissner-funktionaaliin perustuva sekaelementtityyppi edellyttää, että jännitysvapausasteita on systeemissä aina yhtä paljon tai enemmän numeerisen vakauden saavuttamiseksi;

$$n_{\sigma} \geq n_e. \quad (3.15)$$

Lausuttaessa sekaelementtityyppi absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä, ei tähän ehtoon ole havaittu tulleen muutoksia. Tämä on seurausta siitä, että tarkasteltaessa sekaelementtiyhtälöä;

$$[\mathbf{K}]^i \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\sigma}^i \\ \Delta \mathbf{e}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{ext(2)}^i \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

havaitaan jäykkyyismatriisiin \mathbf{K} noudattavan tavanomaisen elementtimenetelmän vastaavan sekaelementtityypin matriisirakennetta (Zienkiewicz ym., 2000a; Wriggers, 2008), missä siis

$$[\mathbf{K}]^i = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\sigma\sigma}^i & \mathbf{K}_{\sigma u}^i \\ \mathbf{K}_{u\sigma}^{iT} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

jolloin myös tässä tapauksessa voidaan ensiömuuttujana toimiva jännitysvektori $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ eliminoida Schurin lauseella (Wriggers, 2008), jolloin saadaan tutunnäköinen matriisiyhtälö;

$$\left(\mathbf{K}_{u\sigma}^{iT} \left(\mathbf{K}_{\sigma\sigma}^i \right)^{-1} \mathbf{K}_{\sigma u}^i \right) \Delta \mathbf{e}^i = -\mathbf{f}_{ext(2)}^i + \mathbf{K}_{u\sigma}^{iT} \left(\mathbf{K}_{\sigma\sigma}^i \right)^{-1} \mathbf{f}_{ext(1)}^i, \quad (3.18)$$

milloin yksikäsitteisen ratkaisun löytymisen edellytyksenä on tässäkin tapauksessa ehto, että matriisi $\mathbf{K}_{\sigma\sigma}$ ei saa olla singulaarinen (Wriggers, 2008; Zienkiewicz ym., 2000a). Koska absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmä vaikuttaa valittujen muuttujien osalta ainoastaan siirtymävektoriin, johtaa tämä siihen, että tämän sekaelementtityypin numeerisen stabiiliuden takaamiseksi on jännityskenttää interpoloivia solmuja oltava useissa tapauksissa paljon.

3.1.2 Siirtymä-jännitys-sekaelementin suorituskyky

Sekaelementin ominaisuuksien testaus

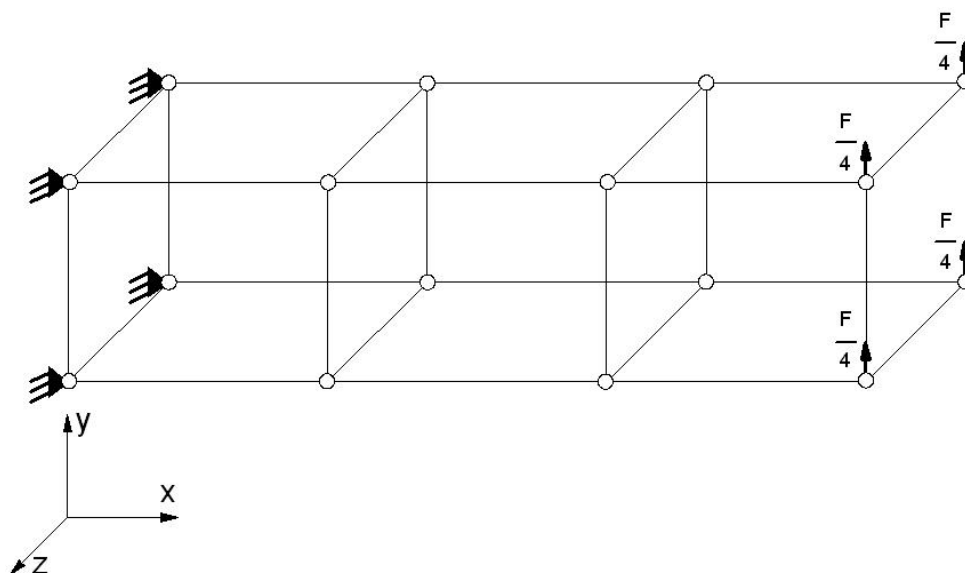
Absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä lausutun jännitykset ja siirtymät tuntemattomina muuttujina sisältävän sekaelementin ominaisuuksia testataan muutamalla yleisluontoisella numeerisella testillä. Näissä testeissä on käytetty sekaelementistä tilavuuselementtiversiota, mikä sisältää kahdeksan täysin parametrisoitua solmua (12 vapausastetta) siirtymien approksimointiin ja 20 solmua (6 vapausastetta) jännityskentän interpolointiin. Tämä sekaelementtikombinaatio täyttää Babushka-Brezzin tasapainoehdot, mutta näiden ehtojen täyttämiseksi erityisesti jännityssolmujen määrä kasvaa valitettavan suureksi. Tästä seuraa, että tällä rajoittamattomalla sekaelementillä on 216 vapausastetta, mitä voidaan erityisesti laskennallisen tehokkuuden näkökulmasta pitää huonona asiana. Tämän ja elementin lineaarisuuden vuoksi esitetään ainoastaan muutamia numeerisia esimerkkejä elementin suorituskyvystä. Esimerkeissä käytetään muuttujina taulukossa 1 määriteltyjä lukuarvoja, olettaen materiaalin olevan terästä. Pituus valitaan tarkoituksella huomattavasti leveyttä ja korkeutta suuremmaksi, tarkoituksena etsiä myös elementin suorituskyvyn rajoja, sillä tilavuuselementtikonstruktioit eivät yleensä ole tehokkaimmillaan dimensioiden ollessa suuruusluokaltaan huomattavasti toisistaan poikkeavia (Cook ym., 2001; Hakala, 1986).

Taulukko 1: Numeerisissa testeissä käytetyt suureet

Suure	Arvo
Pituus	1 m
Leveys, korkeus	0,1 m
Kimmokerroin	207 GPa
Ulkoinen voima	100 kN
Leikkauskerroin	82 GPa

Ulokepalkkisysteemin rakenteeksi valitaan kuvan 6 mukainen ulokepalkki, missä reunaehdoiksi valitaan vasemman päädyn siirtymäsolmujen kiinnittäminen kuvitteelliseen seinään. Näissä solmuissa olevat orientaatiotermit jätetään vapaiksi, jolloin elementin kyky taipua on parempi (Shabana, 2008). Mikäli orientaatiotkin kiinnitettäisiin, olisi ulokepalkki ikään kuin betonoitu seinään siten, että taipumat olisivat merkittäviä vasta kauempana kiinnitetystä päädyistä.

Absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmä mahdollistaa myös orientaatioiden osittaisen kiinnittämisen, mutta tässä tapauksessa sillä ei havaittu saavutettavan merkittäviä etuja verrattuna orientaatioiden vapaaksi jättämiseen. Ulkoinen voima jaetaan ulokepalkin vapaan päädyn siirtymävapausasteille vaikuttaen positiivisen y-akselin suuntaan. Näin voidaan toimia, sillä lineaarisen sekaelementin ollessa kyseessä taipumien on oltava pieniä, jolloin arvioidaan tästä voimavektorivalinnasta muodostuva virhe vähäiseksi. Voimat voitaisiin myös määrittellä esimerkiksi integroimalla voima elementin tilavuuden yli, jolloin siitä tulisi esimerkiksi painovoimaan verrattava, kauttaaltaan ulokepalkkiin vaikuttava voima. Tätä on myös kokeiltu, mutta toistaiseksi selvittämättömästä syystä näissä tapauksissa systeemi pyrki lukkiutumaan taivutuksessa.



Kuva 6: Ulokepalkkikonaisuus

Ulokepalkin taivutus

Verkotettaessa ulokepalkki 1...10 sarjaan asetettuun elementtiin, saadaan tuloksiksi taulukossa 2 esitetyt taipumat. Taipuma-arvo määritellään ulokepalkin neljän vapaan pään ulkoisen voiman vaikutuksen alla olevan solmun laskennallisen y-akselin suuntaisen siirtymän keskiarvona. Solmuissa tapahtuu ulokepalkin taipuessa myös siirtymää x-akselin suuntaan, mutta nämä tulokset riittävät osoittamaan taipuman konvergoinnin suhteessa tavanomaisessa koordinaatistossa lausuttavaan 20-siirtymä-, ja jännityssolmuiseen sekaelementtiin.

Taulukko 2: Tulokset taivutuskokeesta (m, y-suunta)

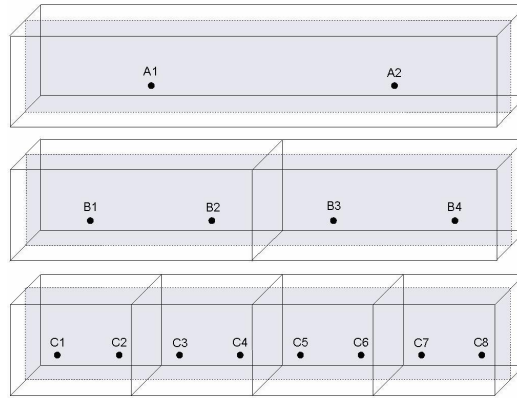
Elem. lkm	ANCF (20/8)- sekaelementti	FEM (20/20)- sekaelementti
1	0,0174323	0,0152810
2	0,0183770	0,0189201
3	0,0194456	0,0198428
4	0,0197242	0,0203238
5	0,0201507	0,0206817
6	0,0205232	0,0209867
7	0,0208692	0,0212603
8	0,0211998	0,0215099
9	0,0215190	0,0217384
10	0,0218275	0,0219474

Vertailuelementiksi on valittu serendip-tyyppinen 20/20-sekaelementti sen parempien taipumisominaisuuksien takia (Zienkiewicz ym., 2000a). Jos näitä tuloksia verrataan ulokepalkin taipumista analyttisesti approksimoivaan lujuusyhtälöön (Gere, 1990),

$$\Delta u_y = \frac{f_{ext} L^3}{3EI} + \frac{f_{ext} L}{k_s GA}, \quad (3.19)$$

saadaan tulokseksi 0,01944562 metriä olettaen, että $k_s = 1$. Taulukon 2 tuloksista havaitaan siis, että muutamalla elementillä ollaan varsin lähellä tuota tulosta, minkä jälkeen elementtien lukumäärän kasvaessa myös virhettä kumuloituu jatkuvasti lisää. Tästä virheestä päästään eroon, kun elementtejä lisätään useampia myös ulokepalkin sivu- tai paksuussuunnassa.

Jännityskenttää interpoloitaessa hankaluudeksi muodostuu laskettujen jännityssolmujen antamien tulosten suuri määrä (120 kpl / elementti). Tuloksien paremman käsiteltävyyden takaamiseksi muodostetaan kolme elementtikombinaatiota samasta ulokepalkista (kuva 7), missä ensimmäisessä on yksi elementti (solmut A1 ja A2), toisessa kaksi elementtiä (solmut B1...B4) ja kolmannessa neljä (solmut C1...C8). Näin arvioidaan elementtiverkon tihentämisen vaikutusta sekaelementtien jännityskentän käyttäytymiseen. Valitut solmut sijaitsevat elementtikombinaatioiden keskilinjalla.



Kuva 7: Jännitysten laskentapisteiden valinta

Tulokset jännitysten laskennasta on nähtävissä taulukoissa 3, 4 ja 5. Taulukoissa on ilmoitettu tulokset kaikkien normaaliakseleiden suhteen sekä leikkausjännitys xy-tason suhteen. Leikkausjännitykset tässä tapauksessa yz- ja xz-tasojen suhteen ovat vähäisiä, minkä vuoksi niiden sisältämät tulokset jätetään merkitsemättä.

Taulukko 3: Jännityslaskennan tulokset valituissa pisteissä (yksi elementti)

Jännitys (MPa)		σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}
A1	ANCF	209,80	1,07	2,32	1,92
	FEM	158,13	-1,64	15,64	-4,97
A2	ANCF	85,06	0,09	1,16	12,43
	FEM	134,54	-3,15	-7,41	6,79

Taulukko 4: Jännityslaskennan tulokset valituissa pisteissä (kaksi elementtiä)

Jännitys (MPa)		σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}
B1	ANCF	250,47	-0,96	15,33	-3,38
	FEM	230,88	-5,73	20,61	-11,81
B2	ANCF	182,13	5,10	2,18	9,87
	FEM	202,53	5,28	-4,02	5,08
B3	ANCF	96,46	-6,23	-5,47	13,13
	FEM	87,74	-9,29	-6,73	9,26
B4	ANCF	46,06	0,48	2,28	7,46
	FEM	66,27	1,76	3,42	3,90

Taulukko 5: Jännityslaskennan tulokset valituissa pisteissä (neljä elementtiä)

Jännitys (MPa)		σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}
C1	ANCF	254,90	-3,59	25,83	-20,62
	FEM	252,63	-9,19	28,99	-25,43
C2	ANCF	238,23	1,54	8,77	10,50
	FEM	223,34	-9,86	-11,06	6,91
C3	ANCF	205,17	-2,09	-2,84	17,13
	FEM	205,29	0,62	-0,94	15,84
C4	ANCF	169,98	2,02	-0,84	7,78
	FEM	180,41	3,81	0,39	7,50
C5	ANCF	126,81	-1,87	-1,44	10,77
	FEM	123,22	-2,89	-2,10	4,87
C6	ANCF	92,80	2,06	0,14	8,54
	FEM	98,90	3,25	2,13	6,96
C7	ANCF	54,79	-1,65	0,17	10,28
	FEM	50,37	-2,77	-1,75	7,22
C8	ANCF	20,00	-1,84	2,95	9,23
	FEM	25,63	-1,53	2,96	6,69

Taulukoiden 3, 4 ja 5 antamien tulosten perusteella jännitykset absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä ja tavanomaisen koordinaatiston suhteen lausutun sekaelementin välillä lähenevät, kun elementtien määrää lisätään. Tämä ei ole mikään yllättävä tieto, sillä voidaan olettaa, että esimerkiksi vain yhdellä tilavuuselementillä suoritettu laskenta sisältää aina merkittävästi virhettä (Hakala, 1986; Cook ym., 2001; Bathe, 1996). Reunaehdoilla on myös epäilemättä vaikutusta tuloksiin, erityisesti niiden solmujen antamiin jännityksiin, jotka ovat lähellä ulokepalkin jompaakumpaa päätä. Näin voitaneen selittää erityisesti neljän elementin tapauksessa pisteessä C1 havaittu poikkeuksellisen suuri jännitys z-akselin suhteen. Muuten jännitysten suuruusluokka on y- ja z-akselien suhteen sen verran pieni, että voidaan olettaa numeerisella virheellä olevan todennäköisesti osuutta asiaan.

Ulokepalkin venytys

Pituussuuntainen venymä vastaavassa ulokepalkissa samoilla elementeillä lasketaan käyttäen 1...6 sekaelementtiä. Analyytinen referenssitulos lasketaan yhtälöllä;

$$\Delta u_x = \frac{FL}{EA}, \quad (3.20)$$

ja taulukossa 1 annetuilla suureilla tulos on 48,309 mikrometriä (Gere ym., 1990). Tulokset ovat nähtävissä taulukossa 6. Tämän jälkeen numeerinen virhe kumuloituu jatkuvasti elementtien määrää kasvatettaessa.

Taulukko 6: Venytystestin tulokset

Elem. lkm	ANCF (20/8)- sekaelementti	FEM (20/20)- sekaelementti
1	48,987	49,243
2	50,084	49,684
3	51,564	51,334
4	52,901	52,357
5	54,381	53,523
6	55,915	54,608

Ulokepalkin venytystestissä lasketut jännitykset on esitelty taulukoissa 7, 8 ja 9. Tässä tapauksessa jännitykset keskittyvät x-akselin suuntaiseen normaalijännitykseen ja tuloksien voidaan olettaa olevan kauttaaltaan lähellä 10 megapascalin referenssiarvoa. Muiden akseleiden suuntaiset jännitykset ovat todennäköisesti lähinnä numeerista virhettä, vaikkakin Poissonin suppeuman seurauksena voidaan jännityksiä olettaa esiintyvän myös muiden akseleiden suhteen. Lisäksi reunaehtoien aiheuttamaa vaikutusta tuloksiin ei pidä unohtaa.

Taulukko 7: Jännityslaskennan tulokset valituissa pisteissä (yksi elementti)

Jännitys (MPa)		σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}
A1	ANCF	9,87	0,06	0,11	0,58
	FEM	9,39	0,02	0,26	0,73
A2	ANCF	9,88	0,01	0,02	-0,67
	FEM	9,76	-0,28	-0,34	-0,75

Taulukko 8: Jännityslaskennan tulokset valituissa pisteissä (kaksi elementtiä)

Jännitys (MPa)		σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}
B1	ANCF	9,62	0,01	0,22	1,04
	FEM	9,38	-0,03	0,23	1,10
B2	ANCF	10,09	0,10	0,17	0,23
	FEM	9,70	-0,43	-0,42	0,35
B3	ANCF	9,67	0,03	0,04	-0,28
	FEM	9,89	0,40	0,32	-0,35
B4	ANCF	9,91	-0,02	-0,01	-1,10
	FEM	9,79	-0,25	-0,24	-1,12

Taulukko 9: Jännityslaskennan tulokset valituissa pisteissä (neljä elementtiä)

Jännitys (MPa)		σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}
C1	ANCF	8,93	0,09	0,54	2,08
	FEM	8,40	-0,46	-0,11	2,20
C2	ANCF	9,37	0,25	0,42	0,12
	FEM	8,83	-0,26	-0,26	0,20
C3	ANCF	10,09	-0,01	-0,03	-0,33
	FEM	10,33	0,41	0,29	-0,51
C4	ANCF	10,23	0,02	-0,02	-0,12
	FEM	10,18	-0,09	-0,08	-0,19
C5	ANCF	9,90	-0,21	-0,25	0,08
	FEM	10,20	-0,10	-0,06	0,18
C6	ANCF	10,47	0,24	0,29	0,48
	FEM	10,26	0,01	0,01	0,61
C7	ANCF	8,93	0,75	0,95	-0,42
	FEM	8,93	0,58	0,55	-0,31
C8	ANCF	9,07	-0,34	-0,30	-2,19
	FEM	8,95	-0,72	-0,77	-2,25

3.2 Siirtymä-paine-elementti

3.2.1 Siirtymä-paine-sekaelementtikonstruktio

Kokoonpuristumattomien materiaalien analyysi voidaan toteuttaa sekaelementtityypillä, missä tuntemattomina muuttujina ovat siirtymät ja elementin valituissa interpolointipisteissä vaikuttava paine. Tämä elementtityyppi perustuu painekentän ja siirtymäkentän muutoksien analysointiin olettamalla vallitsevat paineet ja venymät jännityksien deviatoriseksi muodoksi (Herrmann, 1968; Zienkiewicz ym., 2000a; Wriggers, 2008).

Deviatorinen muoto venymävektorista lausutaan määrittämällä erikseen volymetrinen ja deviatorinen venymä (Herrmann, 1968; Zienkiewicz ym., 2000a). Tämä toteutetaan siten, että;

$$\boldsymbol{\varepsilon}^i = \boldsymbol{\varepsilon}_d^i + \frac{1}{3} \varepsilon_v^i \mathbf{I}_d = \boldsymbol{\varepsilon}_d^i + \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^i) \mathbf{I}_d, \quad (3.21)$$

missä $\boldsymbol{\varepsilon}_d$ on deviatorinen venymävektori ja ε_v on volymetrinen venymän termi, joka voidaan käsittää myös venymävektorin jälkeen. Deviatorinen projektiomatriisi \mathbf{I}_d lausutaan muodossa;

$$\mathbf{I}_d = \mathbf{I}_6 - \frac{1}{3} \mathbf{m} \mathbf{m}^T, \quad (3.22)$$

missä \mathbf{I}_6 on kolmiulotteisessa tapauksessa 6 x 6-tyyppinen yksikkömatriisi ja \mathbf{m} vastaavassa tapauksessa leikkaustermit redusoidu vektoriksi (Zienkiewicz ym., 2000a);

$$\mathbf{m} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T. \quad (3.23)$$

Materiaalin volymetrinen venymä määritetään vallitsevan paineen ja materiaalikohtaisen puristuskertoimen suhteella. Koska kokoonpuristumattoman materiaalin ollessa kyseessä puristuskerroin käytännössä lähestyy ääretöntä, saisi volymetrinen venymä tällaisissa tapauksissa käytännössä aina nollaa lähestyviä arvoja. Toinen lähestymistapa volymetrinen venymän määrittämiseksi on redusoida venymävektorista vektorin \mathbf{m} avulla leikkaustermit.

Olettamalla nämä kaksi eri lähestymistapaa kuitenkin yhteensopiviksi päädytään yhtälöön;

$$\varepsilon_V^i = \frac{p^i}{K^i} = \mathbf{m}^T \boldsymbol{\varepsilon}^i, \quad (3.24)$$

missä materiaalikohtainen puristuskerroin K lausutaan muodossa (Gere ym., 1990);

$$K^i = \frac{E^i}{3 - 6\nu^i}. \quad (3.25)$$

Painekenttää approksimoidaan siis jännitysteorialla, mutta koska paine ei kuitenkaan fyysikaalisena ilmiönä ole samalla tavalla koordinaatistoriippuvainen kuin jännitys, oletetaan tässä lähestymistavassa normaalijännitysten keskiarvon approksimoivan vallitsevaa painetta riittävällä tarkkuudella. Tämä kirjoitetaan muodossa;

$$p^i = \frac{1}{3}(\sigma_x^i + \sigma_y^i + \sigma_z^i) = \frac{1}{3} \mathbf{m}^T \boldsymbol{\sigma}^i, \quad (3.26)$$

missä termit σ_i määrittävät normaalijännitykset alaindekseillä nimetyiden koordinaattiakseleiden suhteen ja vastaavasti jännitysvektori $\boldsymbol{\sigma}$ niin normaali- kuin leikkausjännityksetkin valitussa pisteessä. Yhtälöiden 3.21, 3.22, 3.23 ja 3.24 avulla voidaan deviatoriset venymät ja jännitykset kirjoittaa nyt muotoon (Herrmann, 1968; Zienkiewicz ym., 2000a; Wriggers, 2008);

$$\boldsymbol{\varepsilon}_d^i = \boldsymbol{\varepsilon}^i - \frac{1}{3} \mathbf{m} \varepsilon_V^i \Leftrightarrow \left(\mathbf{I}_6 - \frac{1}{3} \mathbf{m} \mathbf{m}^T \right) \boldsymbol{\varepsilon}^i = \mathbf{I}_d \boldsymbol{\varepsilon}^i, \quad (3.27)$$

ja

$$\boldsymbol{\sigma}_d^i = \mathbf{I}_d \boldsymbol{\sigma}^i = 2G^i \mathbf{I}_0 \boldsymbol{\varepsilon}_d^i = 2G^i \left(\mathbf{I}_0 - \frac{1}{3} \mathbf{m} \mathbf{m}^T \right) \boldsymbol{\varepsilon}^i = \mathbf{E}_d^i \boldsymbol{\varepsilon}^i, \quad (3.28)$$

missä materiaalikohtainen liukumoduuli G määritetään yhtälöllä (Gere ym., 1990);

$$G^i = \frac{E^i}{2 + 2\nu^i}, \quad (3.29)$$

ja diagonaalimatriisi \mathbf{I}_0 yhtälöllä;

$$\mathbf{I}_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Sijoittamalla absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä lausutut asema- ja orientaatiovektorit elastisen materiaalin siirtymien ja jännitysten suhdetta määrittävään Hellinger-Reissner-funktionaaliin (Hellinger, 1914; Reissner, 1950), päädytään muotoon;

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{iT} \boldsymbol{\sigma}^i dV - \int_V \delta \mathbf{e}^{iT} \mathbf{f}_s^i dV - \int_A \delta \mathbf{e}^{iT} \mathbf{f}_p^i dA = 0. \quad (3.31)$$

Siirtymä-paine-approksimaatioon päästään olettamalla jännityskentän noudattavan sääntöä;

$$\boldsymbol{\sigma}^i = \mathbf{E}_d^i \boldsymbol{\varepsilon}^i + \mathbf{m} p^i, \quad (3.32)$$

missä \mathbf{E}_d on kimmomatriisin deviatorinen muoto, jolloin venymiä approksimoidaan dimensioittain yhteensopivasti deviatorisina jännityksinä määritetyn painevektorin kanssa (Zienkiewicz ym., 2000a). Paineenttävektori $\mathbf{m} p$ määritellään volymetrinen ja deviatorisen venymän perusteella, perustuen yhtälöön 3.24. Tämä lähestymistapa johtaa muotoon;

$$\varepsilon_V^i = \frac{1}{3} \mathbf{m} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^i) = \frac{1}{3} \mathbf{m} \varepsilon_V^i = \mathbf{m} p^i. \quad (3.33)$$

Sijoittamalla nämä yhtälöt Hellinger-Reissner-funktionaaliin ja muodostamalla volymetrinen venymän yhtälöistä (3.24 ja 3.33) heikko muoto, päädytään tasapainoehtoon:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{iT} (\mathbf{E}_d^i \boldsymbol{\varepsilon}^i + \mathbf{m} p^i) dV - \int_V \delta \mathbf{e}^{iT} \mathbf{f}_s^i dV - \int_A \delta \mathbf{e}^{iT} \mathbf{f}_p^i dA &= 0 \\ \int_V \delta p^i \left(\mathbf{m}^T \boldsymbol{\varepsilon}^i - \frac{p^i}{K^i} \right) dV &= 0 \end{aligned} \right. \quad (3.34)$$

Siirtymä-jännitys-sekaelementin tapaan voidaan myös siirtymä-paine-sekaelementin venymävektorin katsoa olevan riippuvainen absoluuttisten koordinaattien asema- ja orientaatiovektorista \mathbf{e} siten (Zienkiewicz ym., 2000a), että kyseisen vektorin differentiointi koordinaattiakselien suhteen johtaa akselikohtaisten venymien määrittämiseen;

$$\boldsymbol{\varepsilon}^i = \mathbf{L}\mathbf{e}^i, \quad (3.35)$$

missä matriisi \mathbf{L} on differentiaalioperaattori (Hakala, 1986; Bathe, 1996; Cook ym., 2001);

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T. \quad (3.36)$$

Tätä standardimuotoista differentiaalioperaattoria voidaan käyttää sellaisenaan, sillä funktionaali 3.34 sisältää leikkaustermit venymävektorista redusoivat tekijät, eli vektorin \mathbf{m} sekä deviatorisen muodon kimmomatriisista \mathbf{E}_d . Vastaavasti kuin tavanomaisenkin elementtikoordinaattien tapauksessa, annetaan absoluuttisten solmukoordinaattien perusteella lausutuille siirtymille sekä paineen muutoksille approksimaatiot, joiden oletetaan olevan liki yhtäpitäviä Galerkinin testifunktioiden suhteen (Zienkiewicz ym., 2000a), joten;

$$\mathbf{e}^i \approx \hat{\mathbf{e}}^i = \mathbf{S}^i \Delta \mathbf{e}^i \quad \text{ja} \quad p^i \approx \hat{p}^i = \mathbf{V}_p^i \Delta \mathbf{p}^i, \quad (3.37)$$

missä matriisi \mathbf{S} on absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmän muotofunktio matriisi, joka solmukohtaisten muotofunktioiden suhteen kolmiulotteisessa tapauksessa on muotoa;

$$\mathbf{S}^i = \left[S_1^i \mathbf{I}_3 \quad S_{1x}^i \mathbf{I}_3 \quad S_{1y}^i \mathbf{I}_3 \quad S_{1z}^i \mathbf{I}_3 \quad S_2^i \mathbf{I}_3 \quad \dots \quad S_{nz}^i \mathbf{I}_3 \right], \quad (3.38)$$

ja matriisi \mathbf{V}_p on vastaavasti painekentän interpolointiin tarkoitettu matriisi;

$$\mathbf{V}_p^i = \left[V_1^i \quad V_2^i \quad V_3^i \quad \dots \quad V_n^i \right]. \quad (3.39)$$

Sijoittamalla yhtälöt 3.37, 3.38 ja 3.39 sekaelementin tasapainofunktionaaliin (Herrmann, 1968; Zienkiewicz ym., 2000a), saadaan funktionaali johdettua muotoon;

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_V (\mathbf{L}\mathbf{S}^i \hat{\mathbf{e}}^i)^T (\mathbf{E}_d^i \mathbf{L}\mathbf{S}^i \Delta \mathbf{e}^i + \mathbf{m}\mathbf{V}_P^i \Delta \mathbf{p}^i) dV - \mathbf{f}_{ext}^i = 0 \\ \int_V (\mathbf{V}_P^i \hat{\mathbf{p}}^i)^T \left(\mathbf{m}^T \mathbf{L}\mathbf{S}^i \Delta \mathbf{e}^i - \frac{\mathbf{V}_P^i \Delta \mathbf{p}^i}{K^i} \right) dV = 0 \end{array} \right. \quad (3.40)$$

Funktionaalia saadaan yksinkertaistettua lausumalla kinemaattinen matriisi differentiaalioperaattorin ja muotofunktioiden tulona (Hakala, 1986);

$$\mathbf{B}^i = \mathbf{L}\mathbf{S}^i, \quad (3.41)$$

jolloin saadaan muodostettua funktionaaliin kaksi itsenäistä muuttujakenttää, jotka ovat painemuutokset $\Delta \mathbf{p}$ ja siirtymämuutokset $\Delta \mathbf{e}$. Tämä muoto on nähtävissä yhtälössä 3.42;

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_V \hat{\mathbf{e}}^{iT} \mathbf{B}^{iT} \mathbf{E}_d^i \mathbf{B}^i \Delta \mathbf{e}^i + \hat{\mathbf{e}}^{iT} \mathbf{B}^{iT} \mathbf{m}\mathbf{V}_P^i \Delta \mathbf{p}^i dV - \mathbf{f}_{ext}^i = 0 \\ \int_V \hat{\mathbf{p}}^{iT} \mathbf{V}_P^{iT} \mathbf{m}^T \mathbf{B}^i \Delta \mathbf{e}^i - \frac{\hat{\mathbf{p}}^{iT} \mathbf{V}_P^{iT} \mathbf{V}_P^i \Delta \mathbf{p}^i}{K^i} dV = 0 \end{array} \right. \quad (3.42)$$

Tämän funktionaalin diskretisointi helpommin käsiteltävään matriisimuotoon (Herrmann, 1968; Atluri ym., 1983; Zienkiewicz ym., 2000a), missä testifunktiot ja muuttujat esitetään eri vektoreissa, kirjoitetaan seuraavasti;

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}^i \\ \hat{\mathbf{p}}^i \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ee}^i & \mathbf{K}_{ep}^i \\ \mathbf{K}_{pe}^{iT} & \mathbf{K}_{pp}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{e}^i \\ \Delta \mathbf{p}^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{ext(1)}^i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) = 0, \quad (3.43)$$

missä sekajäykkyysmatriisin alimatriisit ovat;

$$\mathbf{K}_{ee}^i = \int_V \mathbf{B}^{iT} \mathbf{E}_d^i \mathbf{B}^i dV, \quad \mathbf{K}_{ep}^i = \int_V \mathbf{B}^{iT} \mathbf{m}\mathbf{V}_P^i dV \quad \text{ja} \quad \mathbf{K}_{pp}^i = \int_V \frac{\mathbf{V}_P^{iT} \mathbf{V}_P^i}{K^i} dV. \quad (3.44)$$

Diskretisoidun matriisiyhtälön 3.43 sisältämät differentiaaliyhtälöt määrittävät siis poikkeaman, mikä syntyy muuttujavektorissa ulkoisen voiman vaikutuksesta. Koska näiden yhtälöiden sisältämät solmut ovat lausuttu absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmän mukaan, lausutaan syntyvä poikkeama siirtymien suhteen yhtälöllä;

$$\mathbf{r}^i = \mathbf{S}^i (\mathbf{e}_0^i + \Delta \mathbf{e}^i), \quad (3.45)$$

missä \mathbf{e}_0 on sekaelementin absoluuttisten koordinaattien sijaintivektorin alkuasema ja $\Delta \mathbf{e}$ yhtälöllä 3.43 määritellyn siirtymän poikkeamaa määrittävä vektori. Yhtä lailla vastaava tarkastelu voidaan tehdä myös painekenttää approksimoiville tuloksille. Tämä elementtityyppi edellyttää niin absoluuttisilla solmukoordinaateilla kuin tavanomaisellakin elementtimenetelmällä lausuttuna, että Babushka-Brezzin tasapainoehto on muotoa (Zienkiewicz ym., 2000a);

$$n_e \geq n_p, \quad (3.46)$$

missä n_e on asemakoordinaattien ja n_p painekentän vapausasteiden lukumäärä.

3.2.2 Siirtymä-paine-sekaelementin suorituskyky

Tuntemattomina muuttujina siirtymä- ja painekentät sisältävä sekaelementtityyppi on tarkoitettu erityisesti kokoonpuristumattomien materiaalien analysointiin (Zienkiewicz ym., 2000a; Wriggers, 2008). Ideaalisesti kokoonpuristumattoman materiaalin tiheys ei muutu puristustilanteessa, vaan kappaleen tilavuuden uudelleenmuotoutuminen ulkoisen voiman vaikutuksen alla kompensoi voimasta suoraan aiheutuvat muutokset (Gere ym., 1990).

Siirtymä-paine-sekaelementti on kuitenkin matemaattisesti kykenevä käsittelemään myös tavanomaisia, kokoonpuristuvia materiaaleja. Tämän vuoksi on päädytty johtopäätökseen, missä valittua sekaelementtiä testataan simuloimalla analysoitavaa systeemiä niin kokoonpuristumattomana, että kokoonpuristuvanakin. Vertailuja tehdään tavanomaiseen koordinaatistoon perustuvan 20/20-sekaelementin antamiin tuloksiin. Kyseisen sekaelementin molempia, sekä siirtymä- että painekenttää mallinnetaan 20-solmuisilla serendip-tyyppisillä alielementeillä (Bathe, 1996; Cook ym., 2001).

Tämä elementtityyppi on valittu vertailukohdaksi siirtymiltään kahdeksansolmuisen sekaelementin sijaan sen parempien taipumisominaisuuksien takia. Koska absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä voidaan yksittäisillä elementeillä päästä tarkempiin tuloksiin taipumien suhteen, on perusteltua verrata tuloksia taipumisten approksimointien suhteen suorituskykyisempiin elementteihin. Muussa tapauksessa erityisesti vain muutamien elementein toteutetut testit voisivat helposti olla tuloksiltaan mitäänsanomattomia.

Ulokepalkin taivutus

Taivutustesti toteutetaan (taulukko 10), kuten luvussa 3.1.2 siirtymä-jännitysekaelementinkin tapauksessa. Ulokepalkin fyysiset mitat ja materiaalivalinnat ovat vastaavia kuin taulukossa 1 esitetyt lukuarvot. Ulokepalkki on kiinnitetty toisesta päästään seinään siten, että absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä toteutettuna vain kyseisten solmujen asemakoordinaatit ovat kiinnitetty. Tavanomaisen sekaelementin ollessa kyseessä reunaehtoina ovat vastaavasti kaikkien vastaavien asemasolmujen kiinnittäminen. Ulokepalkki on verkotettu pitkittäissuuntaisesti siten, että palkki koostuu 1...10 sekaelementistä. Näin approksimoidaan myös tilavuuselementtien laskentatarkkuutta elementtikohtaisten ulkoisten mittojen muuttuessa määrättyyn rajaan asti optimaalisemmiksi. Laskenta suoritetaan asettamalla Poissonin suppeumakertoimeksi sekä 0,3 että 0,5. Ulkoinen voima vaikuttaa vapaan pään kulmissa sijaitseviin solmuihin, kuten on laita myös siirtymä-jännityselementin suhteen. Analyyttisen lujuusopin mukaan pitäisi palkin taipua vapaasta päästään 0,01945 metriä (ks. yhtälö 3.19) (Gere ym., 1990).

Taulukko 10: Tulokset taivutuskokeesta (m)

Elem. lkm	ANCF (20/8/0,3)	FEM (20/20/0,3)	ANCF (20/8/0,5)	FEM (20/20/0,5)
1	0,0231836	0,0242456	0,0143947	0,0139110
2	0,0281965	0,0299713	0,0164754	0,0164287
4	0,0311253	0,0323102	0,0175871	0,0183372
6	0,0325071	0,0333779	0,0180127	0,01875399
8	0,0335812	0,0341720	0,0182759	0,01893381
10	0,0345313	0,0348007	0,0184920	0,01903360
20	0,0378841	0,0364474	0,0193108	0,01921109
40	0,0408893	0,0372217	0,0201967	0,01928242
60	0,0423970	0,0373984	0,0205770	0,01930750

Erityisesti Poissonin suppeumaluvun ollessa 0,3 havaitaan ulokepalkin käyttäytyvän ylielastisesti. Sekä absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä, että tavanomaiseen koordinaatistoon perustuva sekaelementti antaa selvästi ylisuuria arvoja taipumille, vaikka simulaatio olisi toteutettu vain yhdellä elementillä, jolloin mittojen ollessa tilavuuselementeille epäsoveliaita virhettä tulisikin löytyä. Kuitenkin sen jatkuva kasvaminen elementtiverkon tihentyessä viittaa ylielastisuusominaisuuksiin. Tämän vahvistaa näiden tuloksien vertaaminen Poissonin suppeumaluvulla 0,5 toteutetun simuloinnin antamiin tuloksiin. Tuolloin molempien sekaelementtityyppien antamat tulokset lähenevät verkon tihentyessä kohti analyttisen lujuusyhtälön antamaa arvoa. Paine kenttää approksimoitaessa tulokset ovat luettavissa taulukoista 11..13. Valitut solmut noudattavat samaa lähestymistapaa, kuin jännitystenkin approksimointi luvussa 3.1.2.

Taulukko 11: Painelaskennan tulokset valituissa pisteissä (yksi elementti)

Paine (MPa)	ANCF	FEM	ANCF	FEM
	20/8/0,3	20/20/0,3	20/8/0,5	20/20/0,5
A1	67,57	67,90	62,38	194,21
A2	37,45	45,46	29,16	-163,16

Yhden sekaelementin taivutustapauksessa havaitaan myös tulosten taulukoissa 12 ja 13 vahvistama ilmiö, missä kokoonpuristumattoman materiaalin tapauksessa laskennallisen painekentän tulokset ovat lukuarvoiltaan lähes satunnaisia. Osittain tähän epäilemättä vaikuttavat asetettujen reunaehtojen muodostama häiriö. Lisäksi oletetaan, että paineen ollessa todellisuudessa kuitenkin deviatorinen jännitystila, voi deviatoristen tekijöiden keskiarvo vaihdella tällaisessa tapauksessa paljon. Tämän vahvistaa myös yleisesti ottaen 20-solmuisen alielementin solmukohtaiset tulokset, missä paineen suunta saattoi vaihdella myös vierekkäisten solmujen kohdalla.

Taulukko 12: Painelaskennan tulokset valituissa pisteissä (kaksi elementtiä)

Paine (MPa)	ANCF	FEM	ANCF	FEM
	20/8/0,3	20/20/0,3	20/8/0,5	20/20/0,5
B1	98,14	96,51	91,73	-283,63
B2	68,85	78,79	-79,09	309,34
B3	30,88	24,65	156,80	141,93
B4	19,83	27,35	19,11	9,58

Taulukko 13: Painelaskennan tulokset valituissa pisteissä (neljä elementtiä)

Paine (MPa)	ANCF	FEM	ANCF	FEM
	20/8/0,3	20/20/0,3	20/8/0,5	20/20/0,5
C1	105,32	115,52	182,33	147,20
C2	91,29	83,94	-610,69	-192,22
C3	76,30	75,06	518,47	425,78
C4	65,70	67,76	-360,69	-268,86
C5	45,73	44,88	496,12	-21,32
C6	36,26	41,06	284,36	-181,11
C7	19,83	16,86	572,99	159,16
C8	8,47	10,35	-94,73	150,90

Ulokepalkin venytys

Ulokepalkin venytystestin tarkoituksena on tarkastella sekaelementin käyttäytymistä luonteeltaan suoraviivaisessa kuormitustapauksessa. Näin voidaan paremmin selvittää sekaelementin numeerisen suorituskyvyn mahdollisesti sisältävät virheet tai muut outoudet. Taivutustestiin verrattuna venytystestin pitäisi aina antaa luonteeltaan mahdollisimman yksikäsitteisiä tuloksia. Muusa tapauksessa on vahvasti syytä olettaa, että myös taivutustestin tulokset voivat olla lähtökohtaisesti epäluotettavia.

Sekaelementin venytystä testattaessa simuloinnin lähtöarvot ovat samat kuin taivutustestissäkin. Testaus suoritetaan niin kokoonpuristuvalla (Poissonin suppeumakerroin 0,3) kuin kokoonpuristumattomallekin materiaalille. Koska ulokepalkin venytyksessä voidaan olettaa sarjaan asetettujen elementtien tuottaman virheen kumuloituvan elementtien määrän kasvaessa, suoritetaan laskenta ulokepalkille, joka on jaettu verkolla 1...6 sekaelementtiin. Reunaehdot ovat samat kuin taivutustapauksessakin ja ulokepalkin venyminen on luettavissa taulukosta 14. Tulokset ovat mikrometrejä ja analyttisen lujuusopin antama referenssitulos on $48,31 \mu\text{m}$ (Gere ym., 1990).

Taulukko 14: Venytystestin tulokset (μm)

Elem. lkm	ANCF (20/8/0,3)	FEM (20/20/0,3)	ANCF (20/8/0,5)	FEM (20/20/0,5)
1	79,88	78,60	48,59	37,80
2	79,69	79,74	49,28	43,10
3	82,11	83,10	49,83	45,60
4	84,24	85,20	51,18	46,83
5	86,51	87,45	51,47	47,58
6	88,80	89,52	52,62	48,07

Venytyksestä vahvistaa taivutustapauksen yhteydessä havaitun ylielastisuusongelman, mikäli materiaali ei ole kokoonpuristumaton. Tällaisessa tapauksessa jo yksi elementti venyy suhteettoman paljon, virheen kumuloituessa sarjassa olevien elementtien määrän kasvaessa. Poissonin suppeumaluvun ollessa 0,5 ei vastaavaa ylielastisuutta ole havaittavissa, vaikkakin kumuloitumisvirheestä ei eroon päästäkään. Käytännössä se vaatii tiheämpää verkkoa myös palkin leveys- ja korkeussuunnissa. Painekehtän antamat tulokset ovat esitelty taulukoissa 15...17, ja niiden antamat tulokset vahvistavat taipumistapauksessa havaitun ongelman. Kokoonpuristumattoman materiaalin ollessa kyseessä laskennallinen painekehä on lukuarvoiltaan satunnainen.

Taulukko 15: Painelaskennan tulokset valituissa pisteissä (yksi elementti)

Paine (Mpa)	ANCF (20/8/0,3)	FEM (20/20/0,3)	ANCF (20/8/0,5)	FEM (20/20/0,5)
A1	3,81	3,37	3,43	-10,26
A2	3,75	3,39	3,14	-0,15

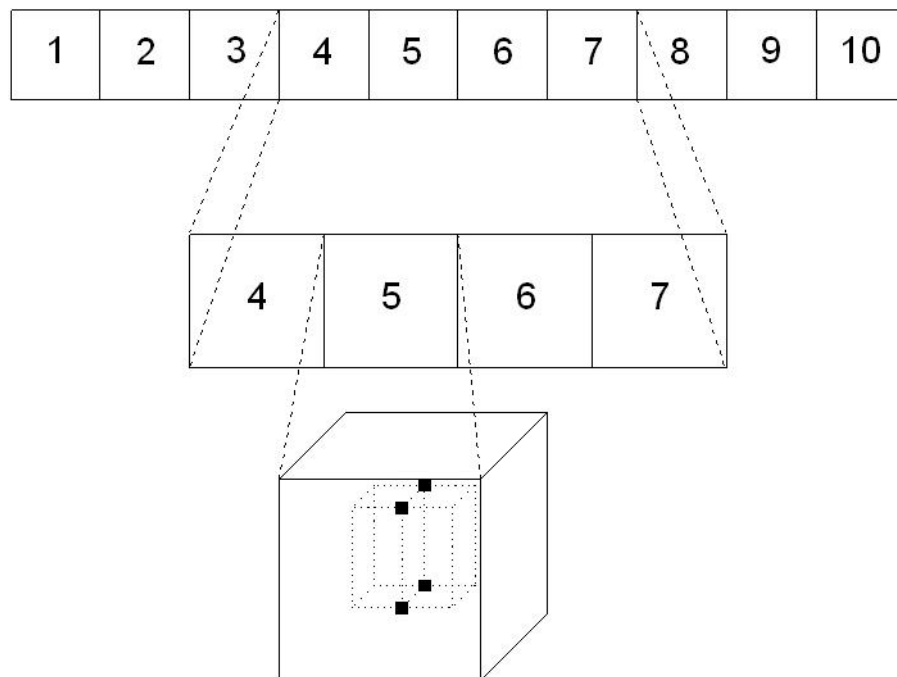
Taulukko 16: Painelaskennan tulokset valituissa pisteissä (kaksi elementtiä)

Paine (Mpa)	ANCF (20/8/0,3)	FEM (20/20/0,3)	ANCF (20/8/0,5)	FEM (20/20/0,5)
B1	3,71	3,32	3,25	-36,24
B2	3,96	3,19	0,41	32,63
B3	3,61	4,08	5,90	-36,07
B4	3,78	3,47	3,28	32,08

Taulukko 17: Painelaskennan tulokset valituissa pisteissä (neljä elementtiä)

Paine (Mpa)	ANCF (20/8/0,3)	FEM (20/20/0,3)	ANCF (20/8/0,5)	FEM (20/20/0,5)
C1	3,56	2,41	3,08	-0,27
C2	3,71	2,72	-7,01	-17,24
C3	3,85	4,40	13,74	-117,47
C4	3,92	3,84	-3,16	140,51
C5	3,54	3,81	10,37	-24,44
C6	4,31	4,02	3,44	43,36
C7	3,87	3,51	3,54	-188,00
C8	3,18	2,62	2,59	165,92

Taulukoiden 15...17 tuloksia tarkasteltaessa voidaan tehdä useita johtopäätöksiä testeissä käytettyjen sekaelementtien suorituskyvystä. Näissä taulukoissa esitetyt tulokset vahvistavat myös taivutustapauksessa havaitun painekentän approksimoinnin epätarkkuuden. Koska reunaehtojen oletetaan vaikuttavan ainakin jollain tasolla häiritsevästi tuloksiin, minimoidaan niiden vaikutusta tarkastelemalla tuloksia venytys- ja taivutustapauksessa 10-elementtisen ulokepalkin keskivaiheilla. Valitaan painekenttää interpoloiviksi solmuiksi elementtien 4...7 alielementin keskiolosmut, jotka ovat kuvassa 8 merkitty mustin laatikoin.



Kuva 8: Tarkasteltavien elementtien valinta

Asetetaan Poissonin suppeumaluvuksi arvo 0,49, jolloin materiaali on lähes kokoonpuristumatonta. Muuten materiaalin ja ulokepalkin fysikaaliset ominaisuudet ovat samat kuin edellisissäkin testeissä. Tulokset on nähtävissä taulukossa 18.

Taulukko 18: Painelaskennan tulokset valituissa pisteissä(kaksi elementtiä)

	Venytytys		Taipuma	
	ANCF 20/8/0,49	FEM 20/20/0,49	ANCF 20/8/0,49	FEM 20/20/0,49
Siirtymä	59,84	55,07	0,0216999	0,0205031
Paine (4)	3,36	3,37	±66,12	±63,12
Paine (5)	3,18	3,32	±53,90	±54,46
Paine (6)	3,17	3,32	±44,86	±44,87
Paine (7)	3,48	3,30	±35,02	±34,95

Kuten taulukon 18 tuloksista havaitaan, voidaan tuloksia nyt pitää kauttaaltaan järkevinä. Ulokepalkin vapaan pään siirtymä ulkoisen voiman vaikutuksen seurauksena noudattaa aiemmin laskettujen tulosten odotuksia, venytystapauksessa on havaittavissa virheen kumuloitumista ja taivutustapauksessa taipumaa voidaan pitää oletettuna. Venytystapauksen antamat tulokset paineille ovat kaikissa neljässä solmussa lukuarvoiltaan hyvin samankaltaisia, numeerista eroavuutta on havaittavissa vasta viidennen desimaalin jälkeen. Pyörityksen vuoksi voidaan siis taulukkoon 18 laittaa vain yksi arvo kuvaamaan vallitsevaa painetta kaikissa neljässä solmussa. Taivutustapauksessa painearvon etumerkki riippuu siitä, kummalla puolella ulokepalkin neutraaliakselia kyseinen painearvo on laskettu. Muutoin numeeriselta tarkkuudeltaan lukuarvot ovat venytystapauksiin verrattavia. Myös muut painekenttää interpoloivat solmut antavat vastaavia, järkeviä lukuarvoja. Tehdään siis johtopäätös, että ideaalisesti kokoonpuristumattoman materiaalin painekentän analysointia ei ole järkevää toteuttaa edes tämäntyyppisillä sekaelementeillä. Siirtymien laskenta sitä vastoin onnistuu kyllä suhteellisen hyvällä tarkkuudella.

4. Päätelmät

4.1 Tutkimuskysymys

Sekaelementit ovat ryhmä elementtityyppejä, joilla voi olla tulevaisuudessa paljonkin merkitystä rakenneanalyysissä tehtäessä (Castersen ym., 1999; Zienkiewicz ym., 2000a; Kumar ym., 2004; Wriggers, 2008). Insinööritieteiden kehitys on toistaiseksi johtanut tietokoneavusteisen analysoinnin jatkuvaan kasvuun tuotteiden suunnitteluvaatimusten yksityiskohtaistuessa samaan aikaan, kun tuotantokustannusten minimointi on kasvanut yhä oleellisemmaksi seikaksi globalisoituvilla markkinoilla. Myös tietokoneiden laskentatehon eksponentiaalinen kasvu mahdollistaa yhä monimutkaisempien analyysien toteuttamisen ilman kalliita taloudellisia sijoituksia tietotekniikkaan. On siis perusteltua olettaa, että myös sekaelementtimenetelmää saatetaan käyttää tulevaisuudessa yhä enemmän verrattuna nykytilanteeseen (Bischoff ym., 1999; Boffi ym., 2008; Castersen ym., 2009).

Sekaelementtien lausuntaa absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä voidaan pitää kuitenkin haastavana ja moniulotteisena tutkimuskysymyksenä (Altarriba ym., 2012). Tämä johtuu muun muassa absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmän perusluonteesta, missä siirtymäsolmut lausutaan asemiensa ja orientaatioidensa perusteella globaalien koordinaatiston suhteen riippumatta siitä, mitä elementillä tehdään tai mikä sen asema on tarkasteltavassa systeemissä (Shabana, 1996; Shabana, 2008). Kuitenkin monien muiden muuttuja-avaruuksien lausuminen globaalien koordinaatiston suhteen ei ole mahdollista ollen seurausta joko muuttuja-avaruuksien sisältämien fysikaalisten ominaisuuksien erityispiirteistä, tai sitten näiden ominaisuuksien riippuvuuksista suhteessa vallitseviin siirtymiin (Atluri ym., 1983; Zienkiewicz ym., 2000a; Zienkiewicz ym., 2000b; Hjelmstad ym., 2002; Kumar ym., 2004).

Valittaessa tilavuuselementit sekaelementin perusrakenteeksi on mainittuja ongelmia jonkin verran helpompi lähestyä (Altarriba ym., 2012). Tilavuuselementit lausutaan kolmiulotteisessa avaruudessa, jolloin myös valitun elementtityypin sisältämä toinen muuttuja-avaruus noudattaa yleensä kolmiulotteista tilaa (Zienkiewicz ym., 2000a; Zienkiewicz ym., 2000b; Wriggers, 2008; Castersen ym., 2009). Tilavuuselementit muistuttavat ominaisuuksiltaan myös hyvin paljon tavanomaisia materiaalfysiikan kappaleita, missä on iso ero verrattuna fysikaalisiin erityistapauksiin, kuten palkkeihin tai laattoihin (Hakala, 1986; Cook ym., 2001).

Siirtymien kolmiulotteisuuden etuna on myös toisiomuuttuja-avaruuden ulottuvuuksien vastaavuus. Tällöin jos siis toisioavaruudeksi on valittu esimerkiksi jännityskenttä, sisältää tämä kenttä sekä normaali-, että leikkausjännitystermit jokaisen koordinaattiakselin suhteen. Tässä on suuri ero, jos tilannetta verrataan esimerkiksi usein siirtymiltään lokaalisti yksiulotteisiksi määriteltyihin palkkielementteihin (Hakala, 1986), jolloin haasteeksi nousee muun muassa juuri ensiö- ja toisiomuuttujien ulottuvuusvaatimukset (Zienkiewicz ym., 1983; Wriggers, 2008).

Absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmän yksi keskeinen vahvuusalue on suurten siirtymien ja kiertymien suhteellisen tehokas mallintaminen (Shabana, 1996; Shabana, 2008). Jos ajatellaan tilavuuselementtejä erityisesti elementtikohtaisten suurten kiertymien mallintamisessa, ne ovat fysikaalisesti kaikkea muuta kuin paras mahdollinen elementtityyppivalinta tämän kaltaisiin simulointeihin (Bathe, 1996; Cook ym., 2001). Tilavuuselementit ovat ominaisuuksiltaan lähtökohtaisesti parhaimmillaan simulointitilanteissa, jolloin kiertymät ovat pieniä ja simuloitavan kappaleen materiaalin paksuus tai muu vastaava tähän verrattava kappaleen tilavuusulottuvuus on keskeisessä asemassa simuloinnin onnistumisen kannalta (Hakala, 1986; Bathe, 1996; Cook ym., 2001). Rakenne-elementit, eli esimerkiksi palkki- ja laattasovellukset ovat ominaisuuksiltaan huomattavasti paremmin suuria kiertymiä mallintavia elementtityyppejä, ja niistä onkin saatu hyviä kokemuksia absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmää käytettäessä (Berzeri ym., 2000; Mikkola ym., 2003; Dmitrochenko ym., 2003; Dufva ym., 2004).

Absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmän yhtenä erityispiirteenä on solmuorientaatioiden laskenta. Jotta sekatilavuuselementeille voitaisiin löytää mielekkäitä sovelluskohteita, on ehkä syytä pohtia enemmän orientaatiotietojen hyötykäyttöä analyysin tavoitteiden kannalta. Tällaisiin tutkimuskysymyksiin ei absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmää ole aiemmin sovellettu, mutta voidaan ehkä otaksua, että orientaatiosta voi olla hyötyä esimerkiksi kontaktimallinnuksissa, erityisesti polymeerikitkatapauksissa, missä kontaktipinnan fyysinen muoto ja sen muutokset vaikuttavat merkittävästi sekä hystereesistä adheesiokomponenttien orientaatioon ja tätä myötä myös toteutuvan kitkavoiman suuruuteen (Berger ym., 2000; Persson, 1998; Persson ym., 2003). Kumiteollisuus voisi siis esimerkiksi olla yksi teollisuuden osa-alue, missä tämänkaltaisista analyysisovelluksista saatettaisiin olla kiinnostuneita.

4.2 Tasapainoehdot

Sekaelementtien numeerinen stabiilius on keskeinen kysymys ensinnäkin elementin differentiaaliyhtälöryhmän ratkaisemiseksi yksikäsitteisesti, sekä laskennallisen numeerisen ratkaisun saattamiseksi riittävälle tarkkuudelle (Zienkiewicz ym., 2000a). Stabiilisuutta määrittävät, käytännössä patch-testauksella ratkaistavat (Zienkiewicz ym., 1986; Zienkiewicz ym., 1988; Zienkiewicz ym., 1988; Zienkiewicz ym., 1991) Babushka-Brezzin tasapainoehdot (Babushka, 1973; Brezzi, 1974) hankaloittavat kuitenkin merkittävästi käyttökelpoisten sekaelementtityyppien kehittämistä, puhutaan sitten tavanomaiseen koordinaatistoon perustuvista tai absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä lausutuista sekaelementeistä.

Tämän tutkimusprojektin antaman tiedon perusteella tehdään johtopäätös, että tätä ongelmaa ei absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmä ainakaan muuta yhtään helpommaksi (Altarriba ym., 2012). Päinvastoin, mainitussa menetelmässä siirtymää mallintavien koordinaattien lukumäärä on jo lähtökohtaisesti suuri, kun niihin sisällytetään sekä elementin solmujen asemakoordinaatit että orientaatiotermit.

Erityisesti täysin parametrisoidulle (Shabana, 2008) kolmiulotteiselle elementille solmukohtaisten koordinaattitermien määrä kasvaa kahteentoista, mikä on nelinkertainen lukumäärä verrattuna tavanomaiseen koordinaatistoon perustuvalla lausuntatavalle. Välittömänä seurauksena ilmenee ainakin sekaelementtikohtaisten tasapainoehtojen lausuma vaatimus (Zienkiewicz ym., 1986; Zienkiewicz ym., 2000a), jolloin useissa tapauksissa valitun toisen muuttuja-avaruuden on sisällettävä huomattava määrä vapausasteita. Sekaelementtimenetelmän identtinen ulottuvuusvaatimus johtaa siihen, että usein ainoa tapa ratkaista tämä ongelma on lisätä kenttää interpoloivien solmujen määrää riittävästi (Zienkiewicz ym., 2000a). Tästä seuraa sekaelementin konstruktion monimutkaistuminen, laskentatehon lisääntynyt tarve, sekä analyysissä saadun datan määrän eksponentiaalinen kasvu laadun kustannuksella.

Tasapainoehdot täyttävistä sekaelementtikonstruktioista on löydettävissä esimerkkejä muun muassa luvuista 2.3.3 ja 2.4.2, sekä muun muassa lähteistä (Atluri ym., 1983; Castersen, 2008; Wriggers, 2008; Zienkiewicz ym., 2000a; Zienkiewicz ym., 2000b; Boffi ym., 2008). Kuten mainittuja esimerkkejä tarkastelemalla havaitaan, yksittäisen sekaelementin patch-testauksen läpäiseminen ei vielä tarkoita muodostetun sekaelementtisysteemin patch-testauksen läpäisemistä. Erityisesti tämä ongelma ilmenee usein siirtymä-paine-sekaelementeillä, jolloin reunaehdoiksi asetetaan usein lukuisien siirtymäsolmujen kiinnittämisiä, jolloin systeemin siirtymävapausasteiden lukumäärä voi laskea alle Babushka-Brezzi-ehtojen salliman rajan. Asiaan voidaan toki hakea ratkaisua käyttämällä sekaelementeissä useampia interpolointisolmuja siirtymäkentän approksimointiin ja tarvittaessa tihentämällä elementtiverkkoa riittävästi reunaehtojen kiinnittämien solmujen suhteen tavoitteena koko elementtisysteemin patch-testin läpäiseminen. Verkon tihentäminen kuitenkin vaatii enemmän laskentatehoa ja tämän seurauksena myös systeemin ratkaisemisesta saadun datan määrä kasvaa huomattavasti sisältäen usein merkittävästi myös epäkelvää numeerista dataa muun muassa reunaehdoista syntyvän häiriön seurauksena.

Babushka-Brezzin ehdosta saadaan myös lisätietoa siitä, minkä tyyppiset elementit olisivat numeerisesti tehokkaita. Mainitun ehdon perusteella suoritettu patch-testaus määrittää lähinnä muuttujakenttien vapausasteiden keskinäisen suhteen yksikäsitteisen numeerisen ratkaisun löytymiseksi, mutta tämän löydyttyä ei patch-testauksella voida selvittää ratkaisun todennäköistä tarkkuutta. Tähän haasteeseen saadaan apua käyttämällä Babushka-Brezzin tasapainoehdon avulla muodostettavaa vapausasteindeksiä, mikä ratkaistaan esimerkiksi siirtymä-paine-sekaelementin ollessa kyseessä yhtälöllä 4.1 (Atluri ym., 1983; Zienkiewicz ym., 1986; Zienkiewicz ym., 1988; Zienkiewicz ym., 2000a; Wriggers, 2008);

$$\beta = \frac{n_e}{n_p}, \quad (4.1)$$

missä n_e on siirtymävapausasteiden ja n_p painevapausasteiden lukumäärä. Mikäli $\beta < 1$, ei yksikäsitteistä numeerista ratkaisua ole olemassa ja tilanne on täten sama kuin hylätyn patch-testin tapauksessa. Usein saavutettavat ratkaisut ovat tarkimpia, kun β -arvo on 2...3. Suuremmilla luvuilla ratkaisun löytyminen vaatii enemmän laskentatehoa tulosten tarkkuuden kärsiessä ja usein myös konstruktiosta riippuen reunaehtojen häiritsemien tai muun tähän verrattavan syyn seurauksena kelvotonta dataa antavien solmujen määrä kasvaa.

4.3 Muotofunktiot ja liikeyhtälöt

Sekaelementtien soveltamisen yksi peruste on mahdollisuus redusoida elementtiin kohdistuneita vaatimuksia muotofunktioiden jatkuvuudelle (Atluri ym., 1983; Zienkiewicz ym., 2000a; Castersen ym., 2009). Tästä on etua esimerkiksi lineaaristen kolmioelementtien tapauksessa, jolloin C^1 -jatkuvuudesta voidaan luopua käyttämällä sekaelementtimenetelmää. Kuitenkin silloin, kun sovelletaan kolmiulotteisia tilavuuselementtejä käy usein niin, että muotofunktioiden asteluku kasvaa helposti korkeaksi (Hakala, 1986; Bathe, 1996; Cook ym., 2001). Näin on erityisesti silloin, jos halutaan elementin olevan kykenevä muodonmuutoksiin myös harvalla verkolla.

Tässä työssä esiteltyjen kolmiulotteisten, kahdeksan siirtymäsolmua sisältävien absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä lausuttujen sekaelementtien muotofunktiot ovat yhdeksättä astetta (Altarriba ym., 2012). Näin korkea-asteisten muotofunktioiden käyttö voi aiheuttaa ongelmia numeerisen stabiliteetin suhteen erityisesti suuremmilla taipumilla. Usein jo kuutiomuodoilla voi olla taipumusta epästabiilisuuteen (Bathe, 1996; Cook ym., 2001). Lisäksi sekaelementtien kohdalla hyvin korkeasta siirtymien interpoloinnista voi seurata ongelmia myös suhteessa toiseksi muuttuja-avaruudeksi valitun kentän interpoloinnin tarkkuuteen, erityisesti silloin, jos tämän toisen muuttujan interpolointifunktiot ovat huomattavasti siirtymiä approksimoivia muotofunktioita matalampi-asteisia (Zienkiewicz ym., 2000a; Zienkiewicz ym., 2000b; Boffi ym., 2008; Wriggers, 2008). Näin tullaan tilanteeseen, missä toinen muuttujakentistä ei etenkään suuremmilla muodonmuutoksilla yksinkertaisesti kykene seuraamaan toisen muuttujakentän muutoksia. On siis mahdollista, että suuri aste-ero voi olla yksi potentiaalinen ongelmalähde tämäntyyppisille sekaelementeille.

Sekaelementtien kinemaattiset ja dynaamiset ominaisuudet sisältävät haasteita, jotka ovat seurausta kahden eri muuttuja-avaruuden keskinäisestä yhteensovittamisesta. Siirtymiä määrittävät solmut kykenevät useimmissa tapauksissa mallintamaan elementin kinematiikkaa vastaavalla tavalla kuin tavanomaisessakin elementtimenetelmässä. Tämän voidaan olettaa pätevän myös absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä lausuttuihin elementteihin. Oletettaessa elementti jäykäksi, voidaan siirtymäsolmujen käyttäytymistä verrata johonkin muuhun kinematiikkateoriaan, esimerkiksi kelluvan koordinaatiston menetelmään, tulosten osoittaessa liikeyhtälöt yhtäläisiksi (Altarriba ym., 2012).

Tämänkaltaisen lähestymistavan ongelmana on kuitenkin elementin oletaminen jäykäksi, jolloin toiseksi muuttujaksi valittu kenttä ei kykene antamaan nollasta poikkeavia arvoja. Sekaelementin käyttötarkoitusta ajatellen tällainen lähestymistapa on siis perustellusti järjetön, ellei sitten haluta vain ja ainoastaan keskittyä siirtymäkentän kinematiikan mahdollistamisen tarkasteluun. Koko sekaelementtikonstruktion kinemaattinen tarkastelu muuttuu taas huomattavasti haastavammaksi riippuen myös vahvasti valitusta sekaelementtityypistä ja toisen (tai kolmannen) muuttujakentän ominaisuuksista.

Dynaamiset ilmiöiden mallintaminen toteutetaan sekaelementtimenetelmässä tavanomaiseen elementtimenetelmään verrattavalla lähestymistavalla käyttäen erillisiä massa- ja jäykkyysmatriiseja. Esimerkiksi jännitys-siirtymämenetelmässä tämä yhtälö kehitetään muotoon (Atluri ym., 1983);

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \ddot{\boldsymbol{\sigma}}^i \\ \Delta \ddot{\mathbf{u}}^i \end{bmatrix} + \mathbf{K}^i \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\sigma}^i \\ \Delta \mathbf{u}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{ext}^i \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

missä \mathbf{M} on sekaelementin i massamatriisi, $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ jännitysvektori, $\Delta \mathbf{u}$ siirtymävektori, \mathbf{K} sekakonstruktion jäykkyysmatriisi ja \mathbf{f}_{ext} ulkoisten voimien vektori. Tämä yhtälö mallintaa siis jännitys-siirtymä-sekaelementin dynamiikkaa, mutta siirtymä-paine-sekaelementin yhtälö muodostetaan samalla periaatteella. Jos tämän yhtälön toimintaa ajatellaan absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmässä, missä massamatriisi on vakio jäykkyysmatriisin ollessa useissa tapauksissa erittäin epälineaarinen, on yhtälön kyky mallintaa dynamiikkaa mahdollisesti kiistanalainen. Asiaa on tämän tutkimuksen ohessa myös tarkasteltu ja tehty muun muassa ominisarvoanalyysyjä sekä siirtymä-jännitys-, että siirtymä-paine-sekaelementeille, mutta tulokset eivät ole vastanneet odotuksia. On siis mahdollista, että sekaelementtien kinematiikka ja dynamiikka absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmässä vaatii myös osin uudentyypisiä tekniikoita mainittujen ilmiöiden mallintamiseen. Tutkimuskysymyksenä tämä on kuitenkin jo sen verran laaja asia, että se on päätetty rajata tästä työstä pois.

4.4 Tulevaisuuden kehitysmahdollisuudet

On perusteltua olettaa, että absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä on tulevaisuudessa sijansa myös kaupallisissa simulointiohjelmistoissa, jolloin menetelmän katsotaan myös saavuttaneen sellaisen tason, että sitä hyödynnettäneen tieteen lisäksi myös teollisuuden palveluksessa. Tämä kuitenkin edellyttää absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmältä vielä paljon kehittymistä. Yksi tällainen kehitysaskel voisi mahdollisesti olla tässäkin työssä käsitelty tutkimusongelma, eli sekaelementtien lausuminen absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä. Muita tähän kysymykseen läheisesti liittyviä jatkotutkimuksen aiheita ovat muun muassa redusoitumattomien ja hybridielementtien lausuminen absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä. Näistä erityisesti hybridielementtejä voidaan pitää mielenkiintoisena tutkimuskohteena, sillä toisin kuin sekaelementit, sallivat hybridielementit muuttujakenttien sisältämien ulottuvuuksien erilaisuuden, jolloin myös niiden sovellusmahdollisuuksien voisi kuvitella olevan sekaelementtikonstruktioita laajempia.

Absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmä on kehitetty tavoitteena parantaa suurten siirtymien ja kiertymien mallintamisen tehostamista. Tähän tavoitekehykseen sijoitettuna tilavuuselementit sopivat kieltämättä huonosti, mutta toisaalta tilavuuselementtien etuja ovat niiden fysikaalisten ominaisuuksien suhde todellisiin kappaleisiin sekä useissa tapauksissa niiden numeerinen vakaus myös sekaelementtikonstruktiona. Tästä seuraa, että myös muuttujakenttien ulottuvuudet ovat yleensä jo lähtökohtaisesti samaa astetta, jolloin sekaelementtiteorian soveltaminen sellaisenaan on käyttökelpoinen. Tutkimusprojektin ensimmäisenä askeleena on kaikki tämä siis perusteltua, mutta sovellusmahdollisuuksien parantamiseksi on sekaelementtityyppejä kuitenkin valittava kehitettäväksi myös muista elementtijoukoista.

Sekalaattojen (Zienkiewicz ym., 1987; Aldefinger ym., 1993; Zienkiewicz ym., 2000b) lausuminen absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä voisi olla mahdollisesti tämän tutkimuksen seuraava askel. Laattaelementeistä on kehitetty myös sekaelementtikonstruktioita, jotka soveltuvat muun muassa Kirchhoffin ohuiden laattojen ja Reissner-Mindlinin laattojen analysointiin. Tutkimusjulkaisuja ovat tästä kysymyksestä tuottaneet jo varsin varhaisessa vaiheessa muun muassa Herrmann (1968), de Veubeke (1968) ja Visser (1969).

Vahvasta pioneerityöstä huolimatta laattasovellukset sekaelementtikonstruktiona ovat kuitenkin monissa tapauksissa jääneet toistaiseksi teoriatasolle niissä ilmenneiden soveltuvuusongelmien vuoksi (Zienkiewicz ym., 2000b). Useat sekaelementtilaattojen tyypit ovat Babushka-Brezzin ehdon suhteen hankalia toteuttaa, vaikeuksien ilmetessä jo soveliaiden interpolointifunktioiden etsinnässä tai sitten viimeistään analysoitaessa systeemejä, jolloin reunaehdot voivat herkästi tehdä elementtisysteemistä epävakaa. Lisäksi haasteita on tuottanut laattojen liittäminen muuntityypisiin elementteihin. Tämän vuoksi monet niistä sekalaattatyypeistä, mitkä ovat Babushka-Brezzin ehdon mukaan numeerisesti vakaita ja siten sovelluskelpoisia, saattavat olla käytännössä sovelluskelvottomia yhteensopivuuden puutteiden takia muuten kuin erikoistapauksissa (Zienkiewicz ym., 2000b).

Erityyppisiä palkkeja mallintavien sekaelementtikonstruktioiden (Zienkiewicz ym., 2000b; Hjelmstad ym., 2003; Li, 2007; Santos ym., 2009; Alsafadie ym., 2010) kohdalla haasteet keskittyvät usein ei-siirtymäkenttää approksimoiviin muuttujiin. Monissa tapauksissa tämä on seurausta siitä, että palkkielementti yksinkertaistaa suhteellisen paljon palkin todellisia fysikaalisia ominaisuuksia, jolloin ollaan konfliktissa sekaelementtiteorian ulottuvuusvaatimusten kanssa. Palkkielementtityyppiä on kuitenkin useita erilaisia, jolloin yksinkertaistuskin on toteutettu aina elementtityypistä riippuen. Euler-Bernoullin palkkia analysoitaessa jännitykset huomioivalla sekaelementtimenetelmällä ongelmaksi nousee jännityskenttä. Tämä yksiulotteinen palkkityyppi jättää huomioimatta palkin pitkittäissuuntaiset venymät ja leikkausmuodonmuutokset, jolloin erityisesti pitkittäissuuntaisten venymien puuttuminen kyseenalaistaa myös laskennallisen jännityskentän paikkaansa pitävyyden. Lisäksi toinen haaste löydetään elementin kaksisolmuisuudesta: Jos jännityksiä interpoloidaan samoista solmuista kuin siirtymiä, tai edes palkin neutraaliakselilta, ovat jännitykset teoreettisesti Euler-Bernoullin palkin ollessa kyseessä nolli. Mikäli jännitysten interpolointikenttää laajennetaan toisen ulottuvuuden suuntaan, ei palkkimalli ole enää kauttaaltaan yksiulotteinen, jolloin sekaelementtimenetelmän sijaan olisi käytettävä hybridimenetelmiä. Timoshenkon teoriaa käytettäessä, jolloin myös leikkausmuodonmuutos huomioidaan, tämä asia hankaloituu entisestään. On siis mahdollista, että yleisistä tapauksista puhuttaessa useamman muuttujan analysointikysymystä olisi palkeista puhuttaessa sekaelementtien sijaan kannattavampaa lähestyä hybriditeorialla (Atluri ym., 1983).

Tilavuuskonstruktion perustuvien sekaelementtien sovellusmahdollisuuksia pohdittaessa voisi olla järkevämpää, että suurten kiertymien mallintamisen sijaan keskitytään suoraan pohtimaan orientaatiotermien tarjoamien mahdollisuuksien hyödyntämistä. Teoreettisesti niistä voisi olla apua erikoistapauksissa, missä solmun aseman lisäksi keskeistä on tuntea solmuun liittyvän muotofunktion orientaatio. Tämänkaltaisia tilanteita voidaan löytää esimerkiksi kontaktimalleista, joissa kontaktista muodostunut kitka on syystä tai toisesta merkittävässä asemassa.

Esimerkiksi Coulombin kitkateoriassa, joka on kitkateorioista yksinkertaisin mutta samalla usein myös eniten käytetty, kitkapinnan orientaatio suhteessa kitkan ilmenemisen mahdollistavaan ulkoiseen voimaan on erittäin keskeinen kysymys. Asia monimutkaistuu entisestään, jos kitka on luonteeltaan ja ominaisuuksiltaan syystä tai toisesta Coulombin kitkasta poikkeava, esimerkiksi polymeerimateriaalien kontaktissa muodostuvaa kitkaa (Grosch, 1963; Berger ym., 2000; Persson, 1998; Persson ym., 2003). Tuolloin on tyypillistä, että polymeerikitkan hystereesikomponentin määrittelemiseksi on kitkapintojen muodonmuutosten oltava mahdollisimman tarkkaan tunnettuja. Myös adheesiokomponentti riippuu usein, erityisesti karkeammilla kitkapinnoilla myös kitkapintojen muodonmuutoksista.

Polymeerikitkasovelluksien ehkä tunnetuin tutkimusalue on kumimateriaalien kitkaominaisuuksien tutkiminen (Grosch, 1963). Esimerkiksi rengasteollisuudessa ollaan tästä kysymyksestä hyvinkin kiinnostuneita, mutta vastaavia sovelluskohteita löytyy usein myös biomekaniikasta. Ihmisen kävelyä simuloitaessa tämäntyyppisiin kysymyksiin voidaan törmätä muun muassa kainalosauvojen kumisten päiden kitkakontaktianalyyseissä, vastaavasti jalkinekävelyn analysointi vaatii usein polymeerikitkan huomioonottamista. Kumisaappaiden lisäksi nykyään myös muiden jalkineiden pohjamateriaalit ovat joko kumia tai ominaisuuksiltaan kumimaista muovia. Kokoonpuristumattoman kumimateriaalin analysointiin siis tarvitaan esimerkiksi siirtymä-paine-sekaelementtiä ja vastaavasti absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmän tarjoamien solmujen orientaatiotietojen avulla voidaan polymeerikitkakontaktia mahdollisesti lähestyä uudella tavalla.

Erilaiset maaperäanalyysit ovat myös osa-alue, missä sekaelementin kyvystä mallintaa kokoonpuristumattomia materiaaleja ja solmujen sisältämistä orientaatiotiedoista voi mahdollisesti olla apua (Moresi ym., 2003; Mancktelow, 1999). Kivimateriaalit ovat usein ominaisuuksiltaan kokoonpuristumattomia ja esimerkiksi mannerlaattojen kontakteissa ovat elementin orientaatiotiedot usein merkittävässä asemassa kontaktia mallinnettaessa, kuvattiin tuo kontakti sitten millä tahansa kitkateorialla. Toistaiseksi tämänkaltaisia simulointeja on toteutettu käyttäen kerrostyyppisiä elementtirakenteita ja maaperän ominaisuuksia ajatellen näistä tuskin päästäänkään täysin eroon, mutta mahdollisesti sekaelementtien ja absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmän soveltamisella voidaan ehkä saada simulointia parannettua ainakin kontaktien osalta. Joka tapauksessa, tämä mainittu osa-alue on tutkimuskysymyksenä niin suuri, että liikaa ennakkospekulaatiota mahdollisesti tulevaisuudessa tehtävien tutkimusten saavutuksista ei ole syytä tehdä.

5. Yhteenveto

Tässä liseniaatintyössä käsiteltiin sekaelementtimenetelmää ja sen soveltuvuutta absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmään. Kaksi suhteellisen yleistä sekaelementtityyppiä, mitkä olivat jännitys- ja siirtymäkentät sekä siirtymä- ja painekentät sisältävät elementtityypit, esiteltiin lausuttuna absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä. Lisäksi työssä pohdittiin etuja ja haasteita, mitä absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmä näille elementtityypeille asettaa.

Tämän työn johdannossa esiteltiin monikappaledynamiikan ja elementtimenetelmän teorioiden taustoja, sekä kartoitettiin yleisluontoisesti sitä tietä, mikä johti elementtimenetelmään sisältyvän absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmän kehittämiseen. Toisessa luvussa perehdyttiin tarkemmin absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmään ja annettiin esimerkkejä eri fysikaalisten tekijöiden lausumisesta absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä. Myös muutamia elementtityyppejä esiteltiin. Absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmän lisäksi toisessa luvussa käsiteltiin myös sekaelementtimenetelmää. Sekaelementtimenetelmän katsottiin sisältävän sellaisia usean muuttujakentän analyysiin soveltuvia elementtityyppejä, joissa siirtymäkenttä kuuluu aina sekaelementtiä määrittävään funktionaaliin erotuksena redusoitumattomista elementeistä.

Sekaelementtien todettiin eroavan hybridielementeistä siten, että sekaelementeissä kaikki muuttujakentät ovat aina ulottuvuuksiltaan samanasteisia. Hybridielementtimenetelmässä tällaista ehtoa ei todettu olleen. Sekaelementeille tyypillisiä Babushka-Brezzin tasapainoehtoja käsiteltiin ja todettiin, että numeerisesti tasapainoisten ja simuloitavan kohteen fysikaalisten ominaisuuksien laskentaan soveliaiden sekaelementtityyppien kehittäminen on usein haastavaa.

Kolmannessa luvussa esiteltiin kaksi tavanomaista sekaelementtityyppiä lausuttuna absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä. Nämä sekaelementit olivat tyypiltään siirtymä-jännitys- ja siirtymä-paine-muuttujia analysoivia elementtejä. Näiden elementtien osalta oli kuitenkin todettava, että niiden soveltuvuus absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmään ei ole paras mahdollinen. Ne eivät kykene käsittelemään suuria kiertymiä, mihin absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmä on pääasiassa suunniteltu. Kuitenkin, sen kaltaisissa erikoistapauksissa, missä on tarpeen tietää solidielementtien solmujen orientaatiot, voi näistä elementeistä olla hyötyä.

Päätelmissä pohdittiin kolmannessa luvussa esiteltyjen elementtien ominaisuuksia ja mahdollisuuksia sekä tarkasteltiin mahdollisuuksia sekaelementtien soveltamisesta myös laatta- tai palkkiteorioihin siten, että solmujen asemat ja orientaatiot määritellään absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmällä toisen muuttujakentän perustuessa elementin omaan lokaaliin koordinaatistoon. Erityisesti palkkielementti todettiin jo lähtökohtaisesti hankalaksi toteuttaa johtuen palkkielementin erityisominaisuuksista. Sekalaattojen katsottiin olevan vähän helpompi tutkimuskohde, mutta myös aiemmat tutkimukset sekalaatoista osoittavat, että mikäli itse sekalaattaelementti saadaan numeerisesti tasapainoiseksi, saattavat sen sovellusominaisuudet olla siitä huolimatta rajalliset johtuen laattojen huonosta yhteensopivuudesta muihin elementtityyppeihin nähden.

Tämän lisensiaatintyön tuloksena voitiin siis todeta, että sekaelementtien soveltaminen absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmään on tutkimisen arvoinen aihe. Kuitenkin, yleisluontoisena lopputuloksena päädyttiin siihen, että sekaelementtien soveltaminen absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmässä usein käytettyihin rakenne-elementteihin, kuten palkki- ja laattateorioihin, voi osoittautua haastavaksi. Siksi hybridielementtiteoriaa on ehkä syytä myös pitää osana tutkimussuunnitelmia, mikäli tutkimusta tämän aiheen parissa jatketaan.

Lähdeluettelo

1. Alsafadie, R., Hjjaj, M., Battini, J.M., 2010. Corotational Mixed Finite Element Formulation for Thin-Walled Beams with Generic Cross-Section. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. **199**(49-52), pp. 3197-3212.
2. Andelfinger, U., Ramm, E., 1993. EAS-Elements for Two-Dimensional, Three-Dimensional, Plate and Shell Structures and their Equivalence to HR-Elements. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. **36**(8), pp. 1311-1337.
3. Altarriba, E., Dmitrochenko, O.N., Mikkola, A.M., 2012. Mixed Finite Element Formulation Using the Absolute Nodal Coordinate Formulation. The 6th Asian Conference on Multibody Dynamics (ACMD 2012), August 26-30, Shanghai, China.
4. Atluri, S.N., Gallagher, R.H., Zienkiewicz, O.C., 1983. Hybrid and Mixed Finite Element Methods. Chichester: John Wiley & Sons Inc.
5. Babushka, I., 1973. The Finite Element Method with Lagrange Multipliers. *Numerische Mathematik*, vol. **20**(3), pp. 179-192.
6. Babushka, I., Osborn, J.E., 1983. Generalized Finite Element Methods and Their Relations to Mixed Problems. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, vol. **20**(3), pp. 510-536.
7. Bathe, K.J., 1996. Finite Element Procedures. Enlewood Cliffs: Prentice Hall.
8. Berger, H.R., Heinrich, G., 2000. Friction Effects in the Contact Area of Sliding Rubber: a Generalized Schallamach Model. *KGK Kautschuk Gummi Kunststoffe*, vol. **53**(4), pp. 200-205.
9. Berzeri, M., Shabana, A.A., 2000. Development of Simple Models for the Elastic Forces in the Absolute Nodal Coordinate Formulation. *Journal of Sound and Vibration*, vol. **235**(4), pp. 539-565.

10. Bischoff, M., Ramm, E., Braess, D., 1999. A Class of Equivalent Enhanced Assumed Strain and Hybrid Stress Finite Elements. *Computational Mechanics*, vol. **22**(6), pp. 443-449.
11. Boffi, D., et al., 2008. Mixed Finite Elements, Compatibility Conditions and Applications: Lectures given at the C.I.M.E summer school held in Cetraro, Italy, June 26-July 1, 2006. Berlin: Springer Corporation.
12. Bremer, H., 2008. Elastic Multibody Dynamics, a Direct Ritz Approach. Berlin: Springer Science+Business Media.
13. Brezzi, F., 1974. On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle Point Problems Arising from Lagrangian Multipliers. *Revue Française d'automatique, informatique, recherché opérationnelle, analyse numérique*, vol. **8**(2), pp. 129-151.
14. Brezzi, F., Pitkäranta, J., 1984. On the Stabilization of Finite Element Approximations of the Stokes Equations. In W. Hackbusch (editor), *Efficient Solution of Elliptic Problems, Notes on Numerical Fluid Mechanics*, volume 10. Wiesbaden: Vieweg.
15. Castersen, C., Wriggers, P., 2009. Mixed Finite Element Technologies. Wien: Springer Vienna.
16. Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., Witt, R.J., 2001. Concepts and Applications of Finite Element Analysis. New York: John Wiley & Sons Inc.
17. Courant, R., 1943. Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. **49**(1), pp. 1-23.
18. Cowin, S.C., Doty, S.B., 2007. Tissue Mechanics. New York: Springer Science+Business Media.
19. Craig, R.R., Kurdila, A.J., 2006. New Jersey: Fundamentals of Structural Dynamics, 2nd edition. John Wiley & Sons Ltd.

20. D'Alembert, J., 1743. *Traité de dynamique*, Paris.
21. de Veubeke, F., 1968. An Equilibrium Model for Plate Bending. *International Journal of Solids and Structures*, vol. **4**(4), pp. 447-468.
22. de Veubeke, F., 1972. A New Variational Principle for Finite Elastic Displacements. *International Journal of Engineering Science*, vol. **10**(9), pp. 745-763.
23. Dmitrochenko, O.N., Pogorelov, D.YU., 2003. Generalization of Plate Finite Elements for Absolute Nodal Coordinate Formulation. *Multibody System Dynamics*, vol. **10**(1), pp. 17-43.
24. Dmitrochenko, O.N., Mikkola, A.M., 2008. Two Simple Triangular Plate Elements Based on the Absolute Nodal Coordinate Formulation. *Journal of Computational and Nonlinear dynamics*, vol. **3**(4), 9 pages.
25. Dmitrochenko, O.N., Hussein, B.A., Shabana, A.A., 2009. Coupled Deformation Modes in the Large Deformation Finite Element Analysis: Generalization. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, vol. **4**(2), 10 pages.
26. Dufva, K.E., Sopanen, J.T., Mikkola, A.M., 2004. A Two-Dimensional Shear Deformable Beam Element Based on the Absolute Nodal Coordinate Formulation. *Journal of Sound and Vibration*, vol. **280**(3-5), pp. 719-738.
27. Dufva, K.E., Shabana, A.A., 2005. Analysis of Thin Plate Structures Using the Absolute Nodal Coordinate Formulation. *Journal of Multi-Body Dynamics*, vol. **219**(part K), pp. 345-355.
28. Dufva, K.E., Sopanen, J.T., Mikkola, A.M., 2005. Three-Dimensional Beam Element Based on a Cross-Sectional Coordinate System Approach. *Nonlinear Dynamics*, vol. **43**(4), pp. 311-327.

29. Dufva, K.E., Kerkkänen, K., Maqueda, L.G., Shabana, A.A., 2007. Nonlinear Dynamics of Three-Dimensional Belt Drives Using the Finite Element Method. *Nonlinear Dynamics*, vol. **48**(4), pp. 449-466.
30. Escalona, J.L., Hussien, H.A., Shabana, A.A., 1998. Application of the Absolute Nodal Coordinate Formulation to Multibody System Dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, vol. **214**(5), pp. 833-851.
31. Frenet, F., 1852. Sur les courbes à double courbure. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, tome **17**, p. 437-447.
32. García de Jalón, J., Bayo, E., 1994. Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems, the Real-Time Challenge. New York: Springer-Verlag.
33. García-Vallejo, D., Mikkola, A.M., Escalona, J.L., 2007. A New Locking-Free Shear Deformable Finite Element Based on Absolute Nodal Coordinates. *Nonlinear Dynamics*, vol. **50**(1-2), pp. 249-264.
34. Géraldin, M., Cardona, A., 2001. Flexible Multibody Dynamics, a Finite Element Approach. Chichester: John Wiley & Sons Ltd.
35. Gere, J.M., Timoshenko, S.P., 1990. Mechanics of Materials. Boston: PWS Publishing Company.
36. Gerstmayr, J., 2003. Strain Tensors in the Absolute Nodal Coordinate and the Floating Frame of Reference Formulation. *Nonlinear Dynamics*, vol. **34**(1-2), pp. 133-145.
37. Gerstmayr, J., 2004. The Absolute Nodal Coordinate Formulation with Elasto-Plastic Deformations. *Multibody System Dynamics*, vol. **12**(4), pp. 363-383.
38. Gerstmayr, J., Matikainen, M.K., 2006. Analysis of Stress and Strain in the Absolute Nodal Coordinate Formulation. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, vol. **34**(4), pp. 409-430.

39. Gerstmayr, J., Irschik, H., 2008. On the Correct Representation of Bending and Axial Deformation in the Absolute Nodal Coordinate Formulation with an Elastic Line Approach. *Journal of Sound and Vibration*, vol. **318**(3), pp. 461-487.
40. Gerstmayr, J., Matikainen, M.K., Mikkola, A.M., 2008. A Geometrically Exact Beam Element Based on the Absolute Nodal Coordinate Formulation. *Multibody System Dynamics*, vol. **20**(4), pp. 359-384.
41. Grosch, K.A., 1963. The Relation Between the Friction and Visco-Elastic Properties of Rubber. *Proceedings of the Royal Society A; Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. **274**(1356), pp. 21-39.
42. Hakala, M.K., 1986. Lujuusopin elementtimenetelmä. Espoo: Otakustantamo.
43. Hellinger, E., 1914. Die allgemeinen ansätze der mechanic der kontinua. *Enzyklopädie der matematischen wissenschaften*, bd. **4**(30), ss. 601-694.
44. Herrmann, L.R., 1968. Finite Element Bending Analysis of Plates. *Proceedings of American Society of Civil Engineering*, vol. **94**(EM5), pp. 13-25.
45. Hjelmstad, K.D., Taciroglu, E., 2002. Mixed Methods and Flexibility Approaches for Nonlinear Frame Analysis. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. **58**(5-8), pp. 967-993.
46. Hjelmstad, K.D., Taciroglu, E., 2003. Mixed Variational Methods for Finite Element Analysis of Geometrically Nonlinear; Inelastic Bernoulli-Euler Beams. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. **19**(10), pp. 809-832.
47. Hoekstra, R.L., 1986. Robotics and Automated Systems. Amsterdam: South-Western Publishing.
48. Hrennikoff, A., 1941. Solution of Problems of Elasticity by the Frame-Work Method. *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. **8**, pp. A619-A715.

49. Iwai, R., Kobayashi, N., 2003. A New Flexible Multibody Beam Element Based on the Absolute Nodal Coordinate Formulation Using the Global Shape Function and the Analytical Mode Shape Function. *Nonlinear Dynamics*, vol. **34**(1-2), pp. 207-232.
50. Kerckänen, K.S., Sopanen, J.T., Mikkola, A.M., 2005. A Linear Beam Finite Element Based on the Absolute Nodal Coordinate Formulation. *Journal of Mechanical Design*, vol. **127**(4), pp. 621-630.
51. Kerckänen, K.S., García-Vallejo, D., Mikkola, A.M., 2006. Modeling of Belt-Drives Using a Large Deformation Finite Element Formulation. *Nonlinear Dynamics*, vol. **43**(3), pp. 239-256.
52. Kumar, P., Nukala, V.V., White, D.W., 2004. A Mixed Finite Element for Three-Dimensional Nonlinear Analysis of Steel Frames. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. **193**(23-26), pp. 2507-2545.
53. Kübler, L., Eberhard, P., Geisler, J., 2003. Flexible Multibody Systems with Large Deformations and Nonlinear Structural Damping Using Absolute Nodal Coordinates. *Nonlinear Dynamics*, vol. **34**(1-2), pp. 31-52.
54. Lagrange, J.L., 1788. *Mécanique analytique*. Paris: L'Académie royal des sciences.
55. Li, Z.X., 2007. A Mixed Co-Rotational Formulation of 2D Beam Element Using Vectorial Rotational Variables. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. **23**(1), pp. 45-69.
56. Malkus, D.S., Hughes, T.J.R., 1978. Mixed Finite Element Methods in Reduced and Selective Integration Techniques: A Unification of Concepts. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. **15**(1), pp.63-81.
57. Mancktelow, N.S., 1999. Finite Element Modelling of Single Layer Folding in Elasto-Viscous Materials: The Effect of Initial Perturbation Geometry. *Journal of Structural Geology*, vol. **21**(2), pp. 161-177.

58. Matikainen, M.K., von Herten, R., Mikkola, A.M., Gerstmayr, J., 2009. Elimination of High Frequencies in the Absolute Nodal Coordinate Formulation. *Journal of Multi-Body Dynamics*, vol. **224**(1), pp. 103-116.
59. Matikainen, M.K., Schwab, A.L., Mikkola, A.M., 2009. Comparison of Two Moderately Thick Plate Elements Based on the Absolute Nodal Coordinate Formulation. ECCOMAS Thematic Conference, June 29 – July 2, Warsaw, Poland.
60. Mikkola, A.M., Matikainen, M.K., 2006. Development of Elastic Forces for a Large Deformation Plate Element Based on the Absolute Nodal Coordinate Formulation. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, vol. **1**(2), pp. 103-108.
61. Mikkola, A.M., Shabana, A.A., 2003. A Non-Incremental Finite Element Procedure for the Analysis of Large Deformation of Solids and Shells in Mechanical System Applications. *Multibody System Dynamics*, vol. **9**(3), pp. 283-309.
62. Moresi, L., Dufour, F., Mühlhaus, H.B., 2003. A Lagrangian Integration Point Finite Element Method for Large Deformation Modeling of Viscoelastic Geomaterials. *Journal of Computational Physics*, vol. **184**(2), pp. 476-497.
63. Nada, A.A., El-Assal, A.M., 2012. Absolute Nodal Coordinate Formulation of Large-Deformation Piezoelectric Laminated Plates. *Nonlinear Dynamics*, vol. **67**(4), pp. 2441-2454.
64. Oden, J.T., Kikuchi, N., 1982. Finite Element Methods for Constrained Problems of Elasticity. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. **18**(5), pp. 701-725.
65. Omar, M.A., Shabana, A.A., 2001. A Two-Dimensional Shear Deformable Beam for Large Rotation and Deformation Problems. *Journal of Sound and Vibration*, vol. **243**(3), pp. 565-576.

66. Oñate, E., 1998. Derivation of Stabilized Equations for Numerical Solution of Advective-Diffusive Transport and Fluid Flow Problems. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. **151**(1-2), pp. 233-265.
67. Persson, B.N.J., 1998. On the Theory of Rubber Friction. *Surface Science*, vol. **401**(3) pp. 445-454.
68. Persson, B.N.J., Albohr, O., Mancosu, F., Peveri, V., Samoilov, V.N., Sivebaek, I.M., 2003. On the Nature of the Static Friction, Kinetic Friction and Creep. *Wear*, vol. **254**(9), pp. 835-851.
69. Reissner, E., 1950. On a Variational Theorem in Elasticity. *Journal of Mathematical Physics*, vol. **29**(2), pp. 90-95.
70. Sanborn, G.G., Choi, J., Choi, J.H., 2011. Curve-Induced Distortion of Polynomial Space Curves; Flat-Mapped Extension Modeling and their Impact on ANCF Thin-Solid Finite Elements. *Multibody System Dynamics*, vol. **26**(2), pp. 191-211.
71. Sanborn, G.G., Shabana, A.A., 2009. On the Integration of Computer Aided Design and Analysis Using the Finite Element Absolute Nodal Coordinate Formulation. *Multibody System Dynamics*, vol. **22**(2), pp. 181-197.
72. Santos, A.J.B., Loula, A.F.D., Guerreiro, J.N.C., 2009. Stability and Convergence of Mixed Methods for Elastic Rods of Arbitrary Geometry. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. **198**(15-16), pp. 1283-1297.
73. Schiehlen, W., 1997. Multibody System Dynamics: Roots and Perspectives. *Multibody System Dynamics*, vol. **1**(2), pp. 149-188.
74. Schiehlen, W., 2006. Computational Dynamics: Theory and Applications of Multibody Systems. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, vol. **25**(4), pp. 566-597.

75. Serret, J.A., 1851. Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure. *Journal de mathématiques pures et appliqués*, tome **16**, p. 193-207.
76. Shabana, A.A., 1996. An Absolute Nodal Coordinate Formulation for the Large Rotation and Deformation Analysis of Flexible Bodies. *Technical Report #MBS96-1-UIC*, Department of Mechanical Engineering, University of Illinois at Chicago.
77. Shabana, A.A., 1997a. Definition of the Slopes and the Finite Element Absolute Nodal Coordinate Formulation. *Multibody System Dynamics*, vol. **1**(3), pp. 339-348.
78. Shabana, A.A., 1997b. Flexible Multibody Dynamics: Review of Past and Recent Developments. *Multibody System Dynamics*, vol. **1**(2), pp. 189-222.
79. Shabana, A.A., 1998. Computer Implementation of the Absolute Nodal Coordinate Formulation for Flexible Multibody Dynamics. *Nonlinear Dynamics*, vol. **16**(3), pp. 293-306.
80. Shabana, A.A., Mikkola, A.M., 2003. On the Use of the Degenerate Plate and the Absolute Nodal Coordinate Formulations in Multibody System Applications. *Journal of Sound and Vibration*, vol. **259**(2), pp. 481-489.
81. Shabana, A.A., Mikkola, A.M., 2003. Use of the Finite Element Absolute Nodal Coordinate Formulation in Modeling of Slope Discontinuity. *Journal of Mechanical Design*, vol. **125**(2), pp. 342-350.
82. Shabana, A.A., 2008. *Computational Continuum Mechanics*. New York: Cambridge University Press.
83. Shabana, A.A., 2010. *Dynamics of Multibody Systems*, 3rd edition. New York: Cambridge University Press.
84. Simo, J.C., Taylor, R.L., Pister, K.S., 1985. Variational and Projection Methods for the Volume Constraint in Finite Deformation Plasticity. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. **51**(1-3), pp. 177-208.

85. Simo, J.C., Rifai, M.S., 1990. A Class of Mixed Assumed Strain Methods and the Method of Incompatible Modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. **29**(8), pp. 1595-1638.
86. Sapanen, J.T., Mikkola, A.M., 2003. Description of Elastic Forces in Absolute Nodal Coordinate Formulation. *Nonlinear Dynamics*, vol. **34**(1-2), pp. 53-74.
87. Sugiyama, H., Mikkola, A.M., Shabana, A.A., 2003. A Non-Incremental Nonlinear Finite Element Solution for Cable Problems. *Journal of Mechanical Design*, vol. **125**(4), pp. 746-757.
88. Suri, M., 2005. Stable Hp Mixed Finite Elements Based on the Hellinger-Reissner Principle. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. **174**(2), pp. 213-225.
89. Visser, W., 1969. A Refined Mixed Type Plate Bending Element. *Journal of American Institute of Aeronautics and Astronautics*, vol. **7**(9), pp. 1801-1803.
90. Washizu, K., 1975. Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 2nd ed. Oxford: Pergamon Press.
91. Weed, D., Maqueda, L.G., Brown, M.A., Hussien, B.A., Shabana, A.A., 2010. A New Nonlinear Multibody / Finite Element Formulation for Knee Joint Ligaments. *Nonlinear Dynamics*, vol. **60**(3), pp. 357-367.
92. Weiss, J.A., Gardiner, J.C., 2001. Computational Modeling of Ligament Mechanics. *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, vol. **29**(4), pp. 1-70.
93. Wriggers, P., 2008. Nonlinear Finite Element Methods. Berlin: Springer Corporation.
94. Yoo, W.S., Lee, J.H., Park, S.J., Sohn, J.H., Dmitrochenko, O.N., Pogorelov, D.YU, 2003. Large Oscillations of a Thin Cantilever Beam: Physical Experiments and Simulation Using the Absolute Nodal Coordinate Formulation. *Nonlinear Dynamics*, vol. **34**(1-2), pp. 3-29.

95. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Baynham, J.A.W., 1983. Mixed and Irreducible Formulations in Finite Element Analysis. Chapter 21 of Hybrid and Mixed Finite Element Methods. Chichester: John Wiley & Sons Inc.
96. Zienkiewicz, O.C., Nakazawa, S., 1984. On Variational Formulations and it's Modification for Numerical Solution. *Computers & Structures*, vol. **19**(1-2), pp. 303-313.
97. Zienkiewicz, O.C., Qu, S., Taylor, R.L., Nakazawa, S., 1986. The Patch Test for Mixed Formulation. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. **23**(10), pp. 1873-1883.
98. Zienkiewicz, O.C., Lefebvre, D., 1987. Three Field Mixed Approximation and the Plate Bending Problem. *Communications in Applied Numerical Methods*, vol. **3**(4), pp. 301-309.
99. Zienkiewicz, O.C., Lefebvre, D., 1988. Mixed Methods for FEM and the Patch Test, Some Recent Developments. *Analyse Mathematique of Application*. Paris: Gauthier Villars.
100. Zienkiewicz, O.C., Wu, J., 1991. Incompressibility Without Tears! How to Avoid Restrictions of Mixed Formulations. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. **32**(6), pp. 1184-1203.
101. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., 2000a. The Finite Element Method, Volume 1, The Basis. Oxford: Butterworth-Heinemann.
102. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., 2000b. The Finite Element Method, Volume 2, Solid Mechanics. Oxford: Butterworth-Heinemann.