Lappeenrannan teknillinen korkeakoulu
Konetekniikan osasto
Konstruktiotekniikan laitos

Virtuaaliprototyypin käyttö roottorin dynamiikan analysoinnissa

Diplomityön aihe on hyväksytty konetekniikan osaston osastoneuvostossa 2.6.1999

Työn tarkastajana on toiminut professori Aki Mikkola

Lappeenrannassa 20.9.1999

Jussi Sopanen
Kalliopellonkatu 10 A5
53850 Lappeenranta
+358 50 5825222

TIIVISTELMÄ

Tekijä: Jussi Sopanen
Nimi: Virtuaaliprototyypin käyttö roottorin dynamiikan analysoinnissa
Osasto: Konetekniikan osasto
Paikka: Lappeenranta
Vuosi: 1999

Diplomityö. Lappeenrannan teknillinen korkeakoulu.
64 sivua, 37 kuvaa, 8 taulukkoa, 3 liitettä
Tarkastaja: Professori Aki Mikkola

Hakusanat: roottori, dynamiikan simulointi, modaalinen joustavuus

Työn tavoitteena oli selvittää kaupallisen dynamiikansimulointiohjelmiston soveltuvuus roottoridynamiikan analysointiin. Työssä keskityttiin erityisesti roottorin dynamiikkaan vaikuttavien epäideaalisuuksien mallintamiseen. Simulointitulosten tarkkuutta selvitettiin mittauksilla. Lisäksi vertailtiin yleiskäyttöisen dynamiikan simulointiohjelmiston ja roottoridynamiikan erikoisohjelmiston teoriaa.

Tutkittava roottori oli paperikoneen putkitela. Telan joustavuus kuvattiin elementtimenetelmällä ratkaistujen moodien avulla. Elementtimallissa huomioitiin telan vaipan seinämänpaksuusvaihtelu, joka vaikuttaa telan massa- ja jäykkyysjakaumaan. Dynamiikkaohjelmistossa mallinnettiin telan tuennasta tulevat herätteet. Dynamiikkaohjelmistona käytettiin ADAMS:ia ja FEM-ohjelmana ANSYS:stä.

Tuloksista havaittiin käytetyn menetelmän soveltuvan roottoridynamiikan analysointiin ja roottorin epäideaalisuuksien mallintamiseen. Simulointimallilla saatiin esille murtolukukriittiset pyörimisnopeudet ja telan kriittinen pyörimisnopeus vastasi hyvin mittaustuloksia.

ABSTRACT

Author: Jussi Sopanen
Title: Dynamic Analysis of the Rotor Using Virtual Prototype
Department: Mechanical Engineering
Place: Lappeenranta
Year: 1999

Master's thesis. Lappeenranta University of Technology
64 sheets, 37 figures, 8 tables, 3 appendices
Supervisor: Professor Aki Mikkola

Keywords: rotor, dynamics simulation, modal flexibility

The objective of the work was to find out the suitability of commercial dynamics simulation software for the analysis of the rotor dynamics. The used software was ADAMS. The work concentrated especially on the modeling of the non-idealities which affect the dynamics of the rotor. To ensure the validity of the simulation results, the theoretical results were compared with those obtained by measuring the real structure. Furthermore, the theory of the general purpose dynamics simulation software and the special software of rotor dynamics were compared.

The examined rotor was the tube roll of a paper machine. The flexibility of the roll was modeled using modal flexibility. Thickness variation of the jacket of the roll, which affects the mass and stiffness distribution, was modeled in the finite element model in ANSYS. The impulses which come from the support of the roller were modeled in dynamics simulation software.

The results indicate that the used method was suitable for an analysis of the rotor dynamics and for the modeling of the non-idealities of the rotor. With the simulation model the sub-harmonic rotational frequencies were retrieved and the critical speed of the roller corresponded well to the measured results.

ALKUSANAT

Diplomityö on tehty Lappeenrannan teknillisen korkeakoulun konetekniikan osastolla ja se liittyy osaprojektina ”Värähtelyn ja äänen hallinta” – teknologiaohjelmaan. Työn tarkastajana on toiminut professori Aki Mikkola, jota haluan kiittää työn aikana saamistani neuvoista ja kiinnostuksesta työtäni kohtaan. Lisäksi haluan kiittää TKK:n koneensuunnittelun laboratorion Jari Juhankoa hyvästä yhteistyöstä, neuvoista ja verifiointimittausten suorittamisesta.

Tulevaa vaimoani Miaa haluan kiittää tuesta ja ymmärryksestä ”joskus” hieman poikkeuksellisia työaikojani kohtaan. Lopuksi haluan kiittää omaisiani ja ystäviäni, jotka ovat auttaneet minua työni valmistumisessa.

KÄYTETYT MERKINNÄT

$\mathbf{A}^i$	=	transformaatiomatriisi
$\mathbf{A}_\theta$	=	transformaatiomatriisin derivaatta Eulerin kulmien suhteen
a_k, b_k, c_k	=	Fourierin sarjan kertoimet
a_m, b_m, c_m	=	ajasta riippuvia koordinaatteja
b	=	ellipsin muotoisen jännityksen jakaantumiskuvion puoliakseli
$\mathbf{C}$	=	vektori rajoiteyhtälöistä
$\mathbf{C}_q$	=	Jacobian matriisi
c_{kr}	=	kriittinen vaimennus
c_{max}	=	vaimennusvakion maksimiarvo
$\mathbf{D}$	=	vaimennusmatriisi
D_1, D_2	=	sylintereiden halkaisijat
d	=	painuma, jossa saavutetaan täysi vaimennus
d_{ii}	=	vaimennuskerroin
E	=	materiaalin kimmomoduli
e	=	eksponentti voima-painuma riippuvuudelle
f_1, f_3, f_5	=	roottorin ominaistaajuuksia
f_k, g_k, h_k	=	kantafunktioita
$\mathbf{F}$	=	vapausasteisiin vaikuttava voimavektori
F	=	puristusvoima
$\mathbf{f}_g$	=	gravitaatiosta johtuva voima
F_D	=	Rayleighin häviöfunktio
$\mathbf{G}$	=	yhteys Eulerin kulmien ja lokaalin koordinaatiston kulmanopeudelle globaalin suhteen
$\mathbf{g}$	=	gravitaatiokiihtyvyysvektori
H	=	asentokulmasta riippuva funktio ympyrämäisyysprofiilista
$\mathbf{I}$	=	yksikkömatriisi
$\mathbf{I}^1,\ldots,\mathbf{I}^9$	=	inertiainvariantit
$\mathbf{I}_i$	=	solmun i inertiavektori
I_p	=	roottorin polaarinen hitausmomentti
$\mathbf{K}$	=	jäykkyysmatriisi
k_i	=	jousivakio

k = harmonisen komponentin järjestysluku

L = Lagrangen funktio

L_1 = kosketuskohdan pituus

$\mathbf{M}$ = massamatriisi

m = massa

$\mathbf{m}$ = massamatriisin osamatriisi

$\mathbf{N}$ = ortogonaali operaattori

n_c = rajoiteyhtälöiden lukumäärä

n = yleistettyjen koordinaattien lukumäärä

$\mathbf{p}$ = modaalikoordinaatti

$\mathbf{Q}_e$ = ei-konservatiivisten yleistettyjen voimien vektori

$\mathbf{Q}_E$ = yleistettyjen voimien vektori, joka sisältää sekä konservatiiviset voimat että ei-konservatiiviset voimat

$\mathbf{Q}_v$ = neliöllinen nopeusvektori

$\mathbf{q}$ = yleistettyjen koordinaattien vektori

$\mathbf{R}^i$ = paikkavektori globaalin koordinaatiston origosta lokaalin koordinaatiston origoon

$\mathbf{r}^i$ = partikkelin i globaalinen asemavektori

T = kineettinen energia

T_z = gyroskooppinen momentti z-akselin ympäri

T_y = gyroskooppinen momentti y-akselin ympäri

U = venymäenergia

$\overline{\mathbf{u}}^i$ = partikkelin i asemavektori lokaalissa koordinaatistossa

$\mathbf{u}^i$ = partikkelin i asema globaalissa koordinaatistossa

$\overline{\mathbf{u}}_o^{\,i}$ = partikkelin i deformoitumaton asema lokaalissa koordinaatistossa

$\overline{\mathbf{u}}_f^{\,i}$ = partikkelin i deformaatiovektori

V = potentiaalienergia

V_g = gravitaatiopotentiaalienergia

X_k = diskreetin Fourier muunnoksen k:s alkio

$\mathbf{x}$ = vektori, joka sisältää kulmavälein $\Delta\alpha$ mitatun laakerin vierintärenkaan ympyrämäisyysprofiilin

x_r, y_r, z_r = lokaalin koordinaatiston sijainti globaaliin nähden

x_1 = kosketusetäisyys

x = kappaleiden välinen etäisyys

y = sylinterien painuma

α = roottorin asentokulma

$\boldsymbol{\alpha}^i$ = partikkelin *i* kulmakiihtyvyysvektori

$\boldsymbol{\delta}$ = fyysisten vapausasteiden siirtymävektorit

$\boldsymbol{\Phi}$ = muotomatriisi

$\boldsymbol{\Phi}'_i$ = solmupisteen *i* rotaatiodeformaatiota kuvaavat muodot

ϕ_{aks} = akselin taipuman kulma xy-tasossa

ϕ_k = vaihe-ero

$\boldsymbol{\varphi}$ = muotovektori

η = modaalinen vaimennussuhde

θ_{aks} = akselin taipuman kulma xz-tasossa

ψ, θ, ϕ = Eulerin kulmat

$\boldsymbol{\theta}$ = vektori Eulerin kulmista

λ = Lagrangen kerroin

$\boldsymbol{\lambda}$ = vektori Lagrangen kertoimista

ν = materiaalin Poissonin vakio

Ω = roottorin pyörimistaajuus

ω = roottorin kulmanopeus

$\overline{\boldsymbol{\omega}}^i$ = partikkelin *i* kulmanopeus lokaalissa koordinaatistossa

$\boldsymbol{\omega}^i$ = partikkelin *i* kulmanopeus globaalissa koordinaatistossa

ω_λ^2 = ominaisarvo

ρ = kappaleen tiheys

Yläindeksit:

N = normaalimuotoihin liittyvä

C = staattisiin muotoihin liittyvä

I = sisäisiin vapausasteisiin liittyvä

B = reunaehtovapausasteisiin liittyvä

$\dot{\mathbf{r}}$ = derivoitu kerran ajan suhteen

$\ddot{\mathbf{r}}$ = derivoitu kahdesti ajan suhteen

$\bar{\mathbf{u}}$ = vektori lokaalissa koordinaatistossa

$\tilde{\mathbf{u}}$ = vinosymmetrinen matriisi vektorista **u**

$\hat{\mathbf{p}}$ = yhdistettyihin muotoihin liittyvä

T = matriisin/vektorin transpoosi

Alaindeksit:

f = elastisiin koordinaatteihin liittyvä

p = modaalikoordinaatteihin liittyvä

q = osittaisderivaatta yleistettyjen koordinaattien suhteen

t = osittaisderivaatta ajan suhteen

θ = rotaatiokoordinaatteihin liittyvä

R = translaatiokoordinaatteihin liittyvä

r = jäykän kappaleen koordinaatteihin liittyvä

Kaikki matriisit ja vektorit on lihavoitu.

SISÄLLYS:

1 JOHDANTO 1

1.1 Työn tavoitteet 1

1.2 Tehtävän rajaus 2

2 ROOTTORIDYNAMIIKAN ILMIÖT 3

2.1 Taivutus- ja vääntövärähtely 3

2.2 Gyroskooppiset ilmiöt 4

2.3 Roottorin laakerointi 6

3 DYNAMIIKAN MALLINNUKSEN MATEMAATTINEN TEORIA .. 10

3.1 Joustavan kappaleen kinematiikka 11

3.2 Värähtelymuotojen ratkaisu elementtimenetelmällä 14

3.3 Systeemin liikeyhtälöiden muodostus 19

3.3.1 Yleistetyt koordinaatit 19

3.3.2 Kinemaattiset rajoitteet 20

3.3.3 Yleistetyt voimat 21

3.3.4 Lagrangen yhtälö 22

3.4 Roottoridynamiikan mallinnus 27

3.5 Vertailu teorioiden välillä 29

4 TUTKITTAVA RAKENNE JA SEN MALLI 30

4.1 Koeroottori 30

4.2 Simulointimalli 32

4.2.1 Telan FE-malli 32

4.2.2 Tasapainotuspukin jousivakioiden määritys 34

4.2.3 ADAMS -malli 35

4.3 Tuennan muuttaminen 42

4.4 Aktiivivaimennuksen säätöjärjestelmä 43

5 TULOKSET JA NIIDEN TARKASTELU 45

5.1 Simulointi- ja mittaustulosten vertailu 45

5.1.1 Telan taipuman muutoksen vertailu 46

5.1.2 Telan käyttäytyminen alikriittisellä pyörimisnopeudella 48
5.2 Laskennan tietokoneajat 54
6 JOHTOPÄÄTÖKSET 59
LÄHDELUETTELO 62

1 JOHDANTO

Pyörivien koneiden suunnittelussa on roottoridynamiikan hallinnalla tärkeä teknologinen ja taloudellinen merkitys. Vaatimukset suorituskyvyn parantamiseksi mm. pyörimisnopeutta kasvattamalla ja roottoreita keventämällä ovat jatkuvasti kasvaneet. Samaan aikaan suunnittelun läpimenoaikoja pyritään lyhentämään sekä roottoreiden turvallisuutta ja luotettavuutta pyritään parantamaan. Näiden tavoitteiden saavuttamiseksi on roottoreiden värähtelyriskejä pyrittävä ennustamaan vaste- ja värähtelylaskennan ja simuloinnin avulla ilman fyysisten prototyyppien käyttöä, joka on hidasta ja kallista.

Roottorin dynamiikkaa voidaan tutkia yleiskäyttöisillä dynamiikkaohjelmistoilla tai ongelmaa varten kehitetyillä erikoisohjelmistoilla. Erikoisohjelmistojen käyttämät ratkaisumenetelmät soveltuvat roottoridynamiikan tutkimiseen hyvin ja ne sisältävät roottoridynamiikan erityispiirteet. Erikoisohjelmistoja ei ole saatavilla kovinkaan paljon, joten ne joudutaan usein ohjelmoimaan itse.

Yleiskäyttöiset dynamiikkaohjelmistot ovat suunniteltuja virtuaaliprototyyppien tuottamiseen. Virtuaaliprototyypissä mallinnetaan mekaaninen systeemi, simuloidaan ja visualisoidaan sen kolmiulotteista dynamiikkaa reaalimaailman olosuhteita vastaavassa ympäristössä. Eri alojen asiantuntijat voivat rakentaa ja testata virtuaaliprototyyppejä ja simuloida kompleksisia mekaanisia systeemejä ennen fyysisen prototyypin rakentamista. Näin voidaan vähentää tuotekehitysaikaa ja kustannuksia, parantaen samalla tuotteen laatua. /1/

1.1 Työn tavoitteet

Diplomityö tehdään osana *PyöriVÄRE* –projektin osaprojektia *Roottorin värähtelyn hallinta.* Osaprojektin tavoitteet ovat /2/:

- Roottori- ja laakeridynamiikkaan liittyvien ilmiöiden ymmärtäminen

- Roottoridynamiikan mallinnusmenetelmien kehittäminen
- Ylikriittisen toimintatilan hallinta mm. aktiivisella värähtelyn hallinnalla ja muunneltavalla dynamiikalla.

Työssä selvitetään kaupallisen yleiskäyttöisen dynamiikkaohjelmiston soveltuvuutta roottoridynamiikan analysointiin ja kokonaisvaltaisen simuloinnin käyttöä pyörivien koneiden värähtelyn hallinnassa. Käytettävä ohjelmisto on ADAMS, jonka valmistaja on Mechanical Dynamics Inc.

Teoriaosassa tutkitaan ADAMS:n joustavuuden kuvaamiseen käyttämää menetelmää ja sen soveltuvuutta roottoridynamiikan erityispiirteiden simulointiin. Työssä vertaillaan yleiskäyttöisen dynamiikkaohjelmiston ja roottoridynamiikan erikoissovelluksen teoriaa.

1.2 Tehtävän rajaus

Roottorin dynaaminen käyttäytyminen riippuu monesta tekijästä ja on siten laaja tutkimusalue. Työssä rajoitutaan yksinkertaisen päistään tuetun paperikoneen putkitelan tutkimiseen. Työssä tutkitaan erityisesti telan dynamiikkaan vaikuttavien epäideaalisuuksien mallintamista, kuten massa- ja jäykkyysjakaumaa sekä laakeroinnista tulevia herätteitä. Roottorin dynamiikkaa tutkitaan alikriittisillä pyörimisnopeuksilla. Mallitettava järjestelmä on Teknillisen korkeakoulun koneensuunnittelun laboratorion teladynamiikan koejärjestelmä. Simulointimalli sisältää joustavan telan ja sen tuentaan käytettävän tasapainotuspukin sekä laakeroinnin. Aktiivisen säätöjärjestelmän liittäminen ja tuennan muuttaminen käydään periaatetasolla läpi.

Simulointituloksien tarkkuutta tutkitaan käytännön mittauksin. Mittaukset suorittaa Teknillisen korkeakoulun koneensuunnittelun laboratorio. Simuloinnin alkuarvoja selvitetään mittauksilla.

2 ROOTTORIDYNAMIIKAN ILMIÖT

Roottoreilla on käynnin aikana suuri määrä rotaatioenergiaa ja pieni määrä värähtelyenergiaa. Roottoridynamiikan hallinnassa pyritään pitämään värähtelyenergia mahdollisimman pienenä. Suuren tehon ja pyörimisnopeuden saavuttamiseksi roottoreista on tehtävä joustavia, jolloin värähtelyn hallinta on tullut yhä tärkeämmäksi. Värähtely riippuu roottorin geometriasta, tuennasta ja herätevoimista. Myös perustan ja roottorin vuorovaikutus saattaa olla merkittävä. /3/,/4/

2.1 Taivutus- ja vääntövärähtely

Taivutusvärähtely voi johtua monista syistä, mutta jäännösepätasapainolla on suurin käytännön merkitys taivutusvärähtelyyn. Roottoreilla on aina jonkin verran epätasapainoa johtuen valmistusepätarkkuuksista ja resonanssi tapahtuu aina, kun pyörimistaajuus on sama kuin taivutusvärähtelyn taajuus. Näitä nopeuksia kutsutaan kriittisiksi nopeuksiksi ja niitä tulee välttää. Jopa kriittisen nopeuden ylitys kiihdytettäessä roottoria sen käyttökierrosnopeudelle saattaa vaatia erikoistoimenpiteitä. Vaikka taivutusvärähtelyjen ominaistaajuuksien laskenta yksinkertaiselle jäykillä laakereilla tuetulle akselille on suhteellisen helppoa, ongelma vaikeutuu käytännössä mm. seuraavista syistä /3/,/4/:

- gyroskooppisista efekteistä
- roottorin poikkileikkauksen taivutusjäykkyyksien vaihteluista
- laakeroinnin jäykkyys- ja vaimennusominaisuuksien vaihteluista
- kahden roottorin välisestä vuorovaikutuksesta.

Roottorin värähtely riippuu muiden tekijöiden ohella sen jäykkyydestä. Roottorin poikkileikkauksen epäsymmetria aiheuttaa taivutusjäykkyyden vaihtelun. Roottorin pyöriessä taivutusjäykkyys saa kaksi kertaa minimi- ja maksimiarvon kierroksella. Tämä aiheuttaa yhdessä painovoiman kanssa ns. 2Ω -värähtelyn, missä Ω on roottorin pyörimistaajuus. Painovoiman herättämä 2Ω -värähtely

esiintyy vain symmetrisillä värähtelymuodoilla, eli taajuuksilla $f_1 / 2, f_3 / 2, f_5 / 2$, jne., jossa f_1, f_3, f_5, jne. ovat kyseessä olevien ominaistaajuusparien keskimääräisiä arvoja. Tärkein 2Ω -värähtely on puolikriittinen pyörimisnopeus, jonka taajuus on likimain $f_1/ 2$. /3/

Pyörivät koneet, kuten höyryturbiinit, kompressorit ja generaattorit, voivat altistua suurille dynaamisille jännityksille, jos niiden pyörimisnopeus on lähellä vääntövärähtelyn ominaistaajuutta. Etenkin käyttävän ja käytettävän roottorin välisten joustavien kytkimien ominaistaajuudet voivat olla käyttökierrosnopeudella. Herätteitä voi tulla esimerkiksi generaattorin sähköisen momentin vaihteluista tai sähkömoottorin kuormituksen vaihteluista. Polttomoottoreissa ulos tuleva vääntömomentti sisältää useita harmonisia komponentteja, jotka voivat herättää murtolukukriittisiä vääntövärähtelytaajuuksia /4/.

2.2 Gyroskooppiset ilmiöt

Useissa pyörivissä koneissa, kuten esimerkiksi turbiineissa, kompressoreissa ja pumpuissa, on roottoreihin kytketty kiekkoja. Roottorissa oleva kiekko aiheuttaa gyroskooppisen momentin, joka muuttaa taivutusmomenttia kiekon kohdalla. Gyroskooppinen momentti syntyy, kun pyörimisakselin orientaatio muuttuu, ja sen suuruus voidaan laskea yhtälöistä /4/,/6/:

$$T_z = I_p \, \omega \, \dot{\theta}_{aks} \tag{2.1}$$

$$T_y = I_p \, \omega \, \dot{\phi}_{aks} \tag{2.2}$$

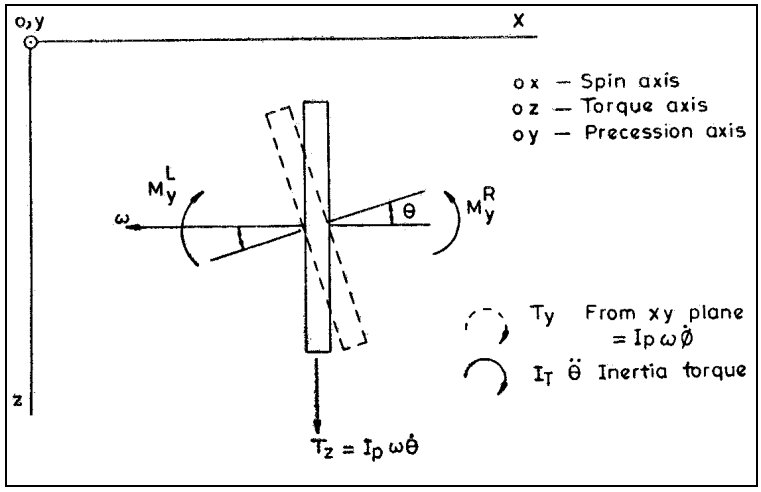
missä I_p on roottorin polaarinen hitausmomentti

ω on roottorin kulmanopeus

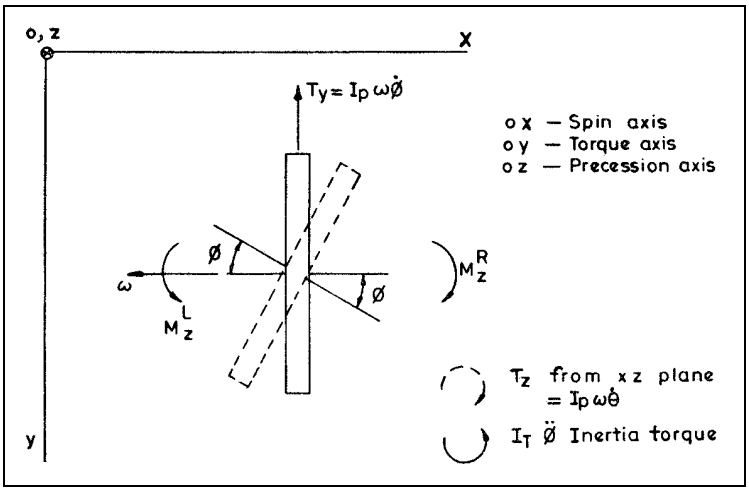
θ_{aks} on akselin taipuman kulma xz-tasossa

ϕ_{aks} on akselin taipuman kulma xy-tasossa.

Kuvissa 2.1 ja 2.2 on esitetty pyörivän kiekon liike xz- ja xy-tasossa sekä gyroskooppisen momentin suunnat.



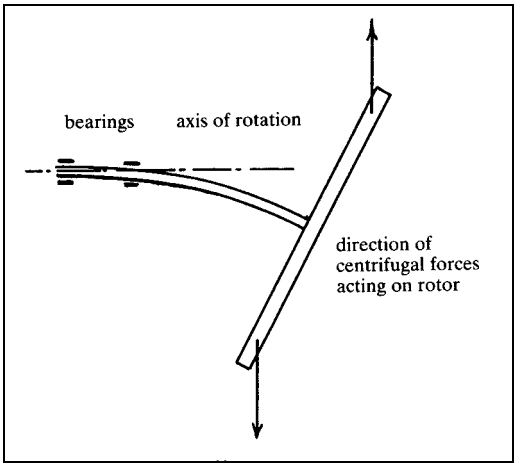
Kuva 2.1. *Pyörivän kiekon liike xz-tasossa. /4/*



Kuva 2.2. *Pyörivän kiekon liike xy-tasossa. /4/*

Gyroskooppisen momentin vaikutus on suurimmillaan, kun kiekko sijaitsee taivutusvärähtelymuodon solmukohdassa, koska gyroskooppinen momentti riippuu orientaatiokulman muutosnopeudesta. Vastaavasti gyroskooppinen momentti on pienimmillään värähtelymuodon kupukohdissa. Tämän vuoksi gyroskooppisella momentilla on suuri merkitys roottorin dynaamiseen käyttäytymiseen, kun kiekko on asennettu ulokeakselin päähän tai se ei ole keskellä symmetristä akselia. Gyroskooppisella momentilla on roottorin akselin taipumaa vastustava vaikutus (kuva 2.3). Esimerkiksi auton moottorin kampiakselin päähän kytkettyyn vauhtipyörään kohdistuu gyroskooppinen momentti, kun auto ajaa kaarteessa suurella nopeudella. Gyroskooppisen

momentin vaikutus muuttaa roottorin taivutusvärähtelyn kriittisiä nopeuksia. /4/,/5/,/6/



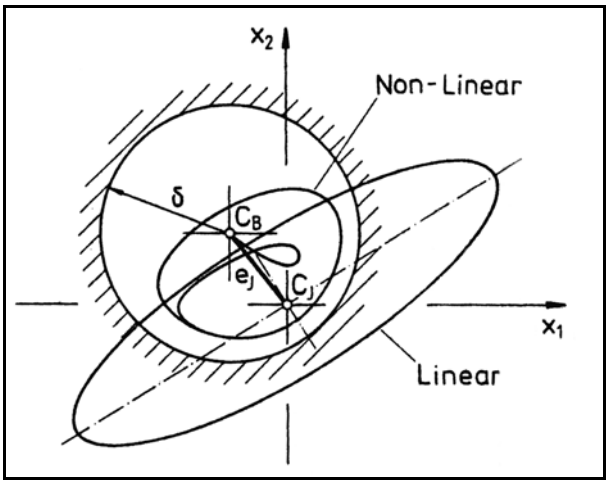
Kuva 2.3. *Ulokeakselin päähän asennetun kiekon gyroskooppisten voimien suunnat. Roottorin ominaistaajuus kasvaa gyroskooppisten voimien takia, koska ne vaikuttavat akselin taipumaa vastaan. /5/*

2.3 Roottorin laakerointi

Useimmat roottorit on laakeroitu liukulaakereilla tai vierintälaakereilla. Suurien pyörimisnopeuksien ja huoltovapaan toiminnan saavuttamiseksi käytetään myös kaasu- ja magneettilaakereita. Laakeroinnin vaikutus roottorin värähtelyyn riippuu roottorin ja laakerin jäykkyyksien suhteesta. Suhteellisen elastisilla roottoreilla laakereiden vaikutus on vähäinen, kun taas jäykän roottorin dynamiikka määräytyy pääosin laakereiden perusteella. /3/

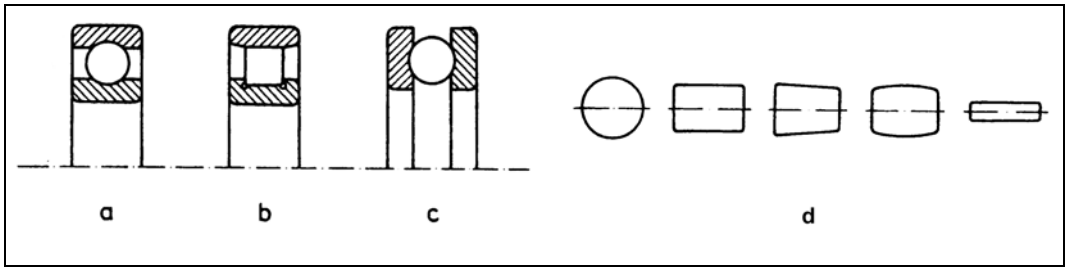
Liukulaakeri voidaan ajatella jousi-vaimennin -elementiksi, jossa jousi- ja vaimenninvoimavektorit eivät yleensä ole saman suuntaisia kuin siirtymä- ja nopeusvektorit. Jäykkyys- ja vaimennusominaisuudet ovat epälineaariset, ja niiden määrityksessä tärkeitä parametrejä ovat voiteluaineen ominaisuudet ja välyksen geometria. Pienillä massaepätasapainoilla (massan eksentrisyys on pienempi kuin viidesosa laakerin välyksestä) voidaan akselin keskipisteen rata liukulaakerin sisällä laskea lineaarisen teorian mukaisesti, jolloin se on ellipsin muotoinen ja säteen suuntaisen värähtelyn taajuus on pyörimistaajuus Ω.

Suuremmilla epätasapainoilla radat eivät ole ellipsin muotoisia ja ne sisältävät myös taajuuksia 2Ω, 3Ω, jne. Tällöin lineaarinen teoria ei enää päde. Kuvassa 2.4 on esitetty akselin keskipisteen rata laskettuna lineaarisen ja epälineaarisen teorian mukaan. Harmonisista komponenteista aiheutuvat murtolukukriittiset pyörimistaajuudet. /3/



Kuva 2.4. *Lineaarinen ja epälineaarinen akselin keskiön rata. Jäykkä roottori lyhyillä sylinterimäisillä laakereilla. Eksentrisyys on 0.8·laakerinvälys. /3/*

Vierintälaakerit koostuvat vierintäelimistä, jotka liikkuvat laakerin vierintärenkaita pitkin. Laakerit voivat olla kuormitettuja säteis- tai aksiaalisuunnassa tai molemmissa. Vierintäelementit voivat olla palloja, rullia tai neuloja (kuva 2.5). Vierintäelementit paikoitetaan pitimen avulla, mikä pitää niiden välin vakiona. Laakeria kuormitettaessa tapahtuu elastisia muodonmuutoksia vierintäelimien kosketuspisteissä ulkorenkaaseen ja sisärenkaaseen. Tämä tarkoittaa sitä, että kuormitettaessa ulkorengas liikkuu kuorman suuntaisesti suhteessa sisärenkaaseen. Liikkeen matemaattinen malli täytyy tuntea, jotta vierintälaakerin vaikutus roottorin dynaamiseen käyttäytymiseen voitaisiin määrittää. Vierintälaakereiden voima-painuma -riippuvuus on erittäin monimutkainen. Tärkeitä parametrejä ovat laakerin geometria, materiaalit ja joissain tapauksissa voiteluaineen ominaisuudet. /3/,/7/

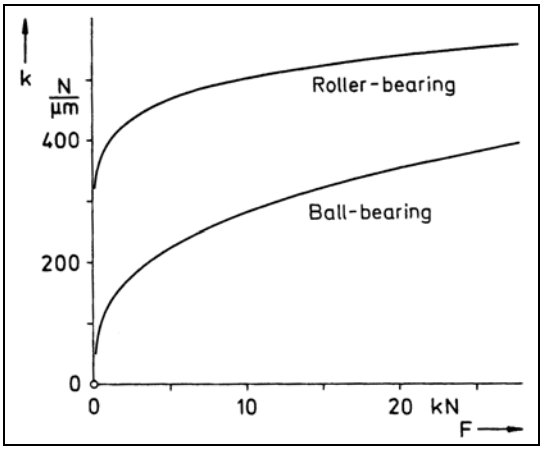


Kuva 2.5. ***a)*** *Säteiskuulalaakeri.* ***b)*** *Rullalaakeri.* ***c)*** *Painelaakeri.* ***d)*** *Vierintäelementtejä. /3/*

Vierintälaakerin jäykkyyden määritys on mahdollista tehdä Hertzin kontaktiteorian perusteella, jossa on tehty seuraavat olettamukset:

- materiaali on lineaarielastinen
- kontaktipinnan leikkausjännitystä ei huomioida
- deformaatiot ovat pieniä suhteessa elementtien dimensioihin.

Laakerin jäykkyys voidaan määrittää johtamalla ensin yksittäisille vierintärenkaille ja -elementeille voima-painuma -riippuvuudet ja laskemalla sen jälkeen vierintäelementeistä johtuva resultanttivoima painuman funktiona eli laakerin jäykkyys (kuva 2.6). Tässä vaiheessa voidaan huomioida myös laakerin välys, joka pienentää laakerin jäykkyyttä. /3/



Kuva 2.6. *Vierintälaakerin jäykkyys voiman funktiona (ilman välystä). Vierintäelementtejä 10 kpl , halkaisija ja pituus 10 mm. /3/*

Vierintälaakerit aiheuttavat roottorisysteemiin harmonisia herätteitä taajuuksilla 2Ω, 3Ω, 4Ω, jne. Herätteet johtuvat vierintärenkaiden valmistusepätarkkuuksista. Herätteiden mallintamista varten voidaan mitattu ympyrämäisyysprofiili muuntaa

FFT:llä Fourierin cosinisarjaksi, jolloin ympyrämäisyysprofiili voidaan laskea analyyttisesti roottorin asentokulmasta. Muunnos tapahtuu seuraavasti: Olkoon **x** *N* pituinen vektori, jonka alkiot ovat kulmavälein $\Delta\alpha$ mitattuja vierintärenkaan säteen arvoja. Diskreetti Fourier muunnos (DTF) vektorille **x** tehdään alkioittain seuraavasti /8/:

$$X_k = \sum_{n=1}^{N} x_n \, e^{-j2\pi(k-1)\left(\frac{n-1}{N}\right)}, \qquad 1 \le k \le N \tag{2.3}$$

missä *e* on Neperin luku, *j* on imaginääriyksikkö ja x_n sekä X_k ovat vektoreiden alkioita. Vektorin **x** alkiot voidaan esittää myös sini- ja cosinitermien summana yhtälön (2.4) mukaisesti

$$x_n = a_0 + \sum_{k=1}^{N/2} a_k \cos\left(k \cdot \frac{n \cdot \Delta\alpha}{N} \right) + b_k \sin\left(k \cdot \frac{n \cdot \Delta\alpha}{N} \right), \quad 1 \le n \le N \tag{2.4}$$

Diskreetin Fourier muunnoksen ja yhtälön (2.4) Fourierin kertoimien a_k ja b_k välillä on seuraava yhteys /8/:

$$a_0 = \frac{X_1}{N}, \; a_k = 2 \cdot real\left(\frac{X_{k+1}}{N} \right), \; b_k = 2 \cdot imag\left(\frac{X_{k+1}}{N} \right) \tag{2.5}$$

Käyttämällä merkintöjä

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \; c_k = \sqrt{a_k{}^2 + b_k{}^2} \;\text{ ja }\; \phi_k = \arctan\left(\frac{b_k}{a_k} \right) \tag{2.6}$$

voidaan vektorin **x** alkiot esittää cosinisarjana seuraavasti /9/:

$$x_n = c_0 + \sum_{k=1}^{N/2} c_k \cdot \cos\left(k \cdot \frac{n \cdot \Delta\alpha}{N} + \phi_k \right) \tag{2.7}$$

Kertoimien c_k ja vaihe-eron ϕ_k avulla voidaan muodostaa analyyttinen roottorin asentokulmasta riippuva funktio vierintärenkaan säteestä:

$$H(\alpha) = c_0 + \sum_{k=1}^{N/2} c_k \cdot \cos(k \cdot \alpha + \phi_k) \tag{2.8}$$

missä α on asentokulma. Ympyrämäisyysprofiili voidaan suodattaa poistamalla pieni amplitudiset harmoniset komponentit. Simulointimalliin herätteet voidaan mallintaa joko pakkoliikkeenä tai huomioimalla ne laakerin voima-painuma -riippuvuudessa.

3 DYNAMIIKAN MALLINNUKSEN MATEMAATTINEN TEORIA

Joustavan kappaleen dynaaminen käyttäytyminen muodostuu jäykän kappaleen liikkeestä sekä siihen kytketystä joustoliikkeestä. Ongelma voidaan ratkaista elementtimenetelmän avulla tai MBS (Multi Body Systems) -ohjelmistoilla, kuten esimerkiksi ADAMS:lla.

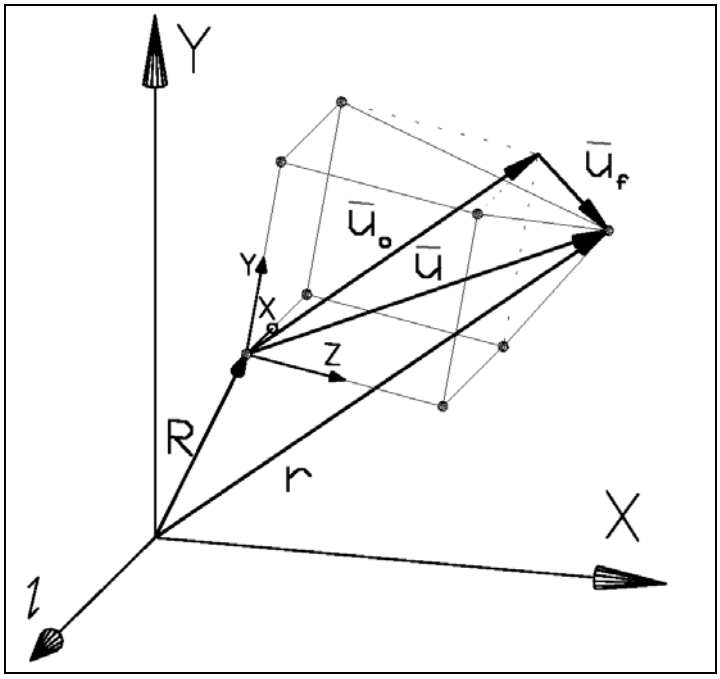
Elementtimenetelmästä johdettujen liikeyhtälöiden ratkaisu voidaan tehdä moodien superponointitekniikalla. Menetelmässä siirrytään fyysisistä koordinaateista modaalikoordinaatteihin, jolloin systeemin elastisten koordinaattien määrää voidaan vähentää. Moodit ovat lineaarisesti riippumattomia ja ortogonaalisia jäykkyys- ja massamatriisin suhteen, jolloin liikeyhtälöt voidaan ratkaista yksittäin. Systeemin korkeita värähtelytaajuuksia sisältävät moodit voidaan poistaa käytöstä, jolloin integroinnin aika-askelta voidaan suurentaa. Usein voidaan käyttää vain muutamaa matalataajuista moodia ilman, että tehdään merkittävää virhettä. /12/

Moodien superponointitekniikat voidaan jakaa kolmeen luokkaan: reaalinen menetelmä, kompleksinen menetelmä ja osarakennemenetelmä. Reaalisessa menetelmässä ratkaistaan vaimentamattoman systeemin ominaisarvot. Kompleksisessa menetelmässä moodit ratkaistaan liikeyhtälöstä, jossa on mukana vaimennus-, gyroskooppiset- ja coriolistermit. Ratkaisu johtaa kompleksisiin ominaisarvoihin, jotka ovat pyörimistaajuudesta riippuvaisia /11/. Reaalinen menetelmä on matemaattisesti paljon yksinkertaisempi kuin kompleksinen. Wang ja Kirkhope /13/ ovat tutkineet reaalisten ja kompleksisten moodien käyttöä roottorien analysoinnissa. Tulokset osoittavat, että reaalinen menetelmä antaa tarkkoja tuloksia, kun modaalinen vaimennussuhde on pienempi kuin 70 %, jonka jälkeen kompleksisen menetelmän käyttö on perusteltua.

Monimutkaisten ja paljon komponentteja sisältävien rakenteiden analysointi elementtimenetelmällä on vaikeaa, koska systeemin vapausasteiden lukumäärä tulee suureksi ja dynaaminen analyysi tulee siten mahdottomaksi. Joustavan kappaleen dynamiikan kuvaaminen elementtimenetelmän avulla vaatii, että kappaleen suuria liikkeitä kuvaavat yhtälöt otetaan huomioon. Tarkan joustavuuden kuvaamiseksi on jokaisella solmulla oltava kuusi vapausastetta, mikä johtaa suureen määrään epälineaarisia liikeyhtälöitä. Näiden voimakkaasti epälineaaristen liikeyhtälöiden ratkaisu on vaikeaa käyttäen tavallisia numeerisia integrointialgoritmeja. Lisäksi rakenteen jäykkyysmatriisi täytyy laskea jokaisella aika-askeleella, koska se muuttuu kappaleen liikkeen myötä. Oikean aika-askelen valinta muodostuu tärkeäksi numeerisen laskennan onnistumisen kannalta /10/. Tämän takia on kehitetty menetelmiä, jotka sallivat rakenteen jakamisen komponentteihin tai osarakenteisiin (Component Mode Synthesis), jolloin systeemin vapausasteiden määrää voidaan vähentää. Osarakenteita analysoimalla voidaan kehittää matemaattinen malli koko systeemistä /14/. Tässä yhteydessä käsitellään ADAMS -ohjelman käyttämää Graig-Bampton –menetelmään /15/ pohjautuvaa osarakennetekniikkaa.

3.1 Joustavan kappaleen kinematiikka

Matemaattisesti joustava kappale ajatellaan koostuvan partikkeleista. Kappaleeseen kuuluvat partikkelit kuvataan kappaleen mukana liikkuvassa lokaalissa koordinaatistossa, jonka suhteen partikkeleilla ajatellaan olevan pieniä lineaarisia siirtymiä. Samaan aikaan lokaalilla koordinaatistolla on suuria epälineaarisia translaatioita ja rotaatioita globaalin liikkumattoman koordinaatiston suhteen. Kuvassa 3.1 on esitetty partikkelin asemaa kuvaavat vektorit. /16/



Kuva 3.1. *Partikkelin kuvaus globaalissa koordinaatistossa.*

Joustavan kappaleen partikkelin *i* globaalinen asema voidaan kuvata vektorilla $\mathbf{r}^i$:

$$\mathbf{r}^i = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \, \bar{\mathbf{u}}^i = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \, (\bar{\mathbf{u}}_o^{\,i} + \bar{\mathbf{u}}_f^{\,i}) \tag{3.1}$$

missä $\mathbf{R}^i$ on paikkavektori globaalin koordinaatiston origosta lokaalin koordinaatiston origoon

$\mathbf{A}^i$ on kiertomatriisi, joka kuvaa lokaalin koordinaatiston kiertymää globaalin koordinaatiston suhteen

$\bar{\mathbf{u}}^i$ partikkelin *i* asema lokaalissa koordinaatistossa

$\bar{\mathbf{u}}_o^{\,i}$ on partikkelin *i* asema ilman deformaatiota lokaalissa koordinaatistossa

$\bar{\mathbf{u}}_f^{\,i}$ on partikkelin *i* deformaatiovektori lokaalissa koordinaatistossa

Kappaleen nopeus saadaan derivoimalla yhtälö (3.1) ajan suhteen

$$\dot{\mathbf{r}}^i = \dot{\mathbf{R}}^i + \dot{\mathbf{A}}^i \, \bar{\mathbf{u}}^i + \mathbf{A}^i \, \dot{\bar{\mathbf{u}}}^i \tag{3.2}$$

Yhtälön (3.2) keskimmäinen termi, joka sisältää transformaatiomatriisin aikaderivaatanm, voidaan esittää muodossa

$$\dot{\mathbf{A}}^i \, \bar{\mathbf{u}}^i = -\mathbf{A}^i \, (\bar{\mathbf{u}}^i \times \bar{\boldsymbol{\omega}}^i) = -\mathbf{A}^i \, \tilde{\bar{\mathbf{u}}}^i \, \bar{\boldsymbol{\omega}}^i \tag{3.3}$$

missä $\overline{\boldsymbol{\omega}}^i$ on kulmanopeus lokaalissa koordinaatistossa ja $\widetilde{\overline{\mathbf{u}}}^i$ on vinosymmetrinen matriisi vektorista $\overline{\mathbf{u}}^i$, joka määritellään seuraavasti:

$$\widetilde{\overline{\mathbf{u}}}^i = \begin{bmatrix} 0 & -\overline{u}_3{}^i & \overline{u}_2{}^i \\ \overline{u}_3{}^i & 0 & -\overline{u}_1{}^i \\ -\overline{u}_2{}^i & \overline{u}_1{}^i & 0 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Kun lisäksi otetaan huomioon, että $\dot{\overline{\mathbf{u}}}_o{}^i = \mathbf{0}$ saadaan yhtälö (3.2) muotoon

$$\dot{\mathbf{r}}^i = \dot{\mathbf{R}}^i - \mathbf{A}^i \widetilde{\overline{\mathbf{u}}}^i \, \overline{\boldsymbol{\omega}}^i + \mathbf{A}^i \dot{\overline{\mathbf{u}}}_f{}^i \tag{3.5}$$

Kun tarkastellaan yhtälön (3.5) termejä nähdään, että $\dot{\mathbf{R}}^i$ on kappaleen lokaalin koordinaatiston absoluuttinen nopeus. Keskimmäinen termi, $-\mathbf{A}^i \widetilde{\overline{\mathbf{u}}}^i \, \overline{\boldsymbol{\omega}}^i$, saadaan derivoimalla transformaatiomatriisi ajan suhteen. Termi riippuu lokaalin koordinaatiston rotaatiosta ja kappaleen elastisesta muodonmuutoksesta. Viimeinen termi, $\mathbf{A}^i \dot{\overline{\mathbf{u}}}_f{}^i$, on partikkelin *i* nopeus, joka johtuu pelkästään muodonmuutoksista. /17/

Käyttämällä merkintää $\mathbf{u}^i = \mathbf{A}^i \overline{\mathbf{u}}^i$ ja derivoimalla yhtälö (3.5) ajan suhteen saadaan partikkelin *i* kiihtyvyys muotoon:

$$\ddot{\mathbf{r}}^i = \ddot{\mathbf{R}}^i + \boldsymbol{\omega}^i \times (\boldsymbol{\omega}^i \times \mathbf{u}^i) + \boldsymbol{\alpha}^i \times \mathbf{u}^i + 2\boldsymbol{\omega}^i \times \mathbf{A}^i \dot{\overline{\mathbf{u}}}^i + \mathbf{A}^i \ddot{\overline{\mathbf{u}}}^i \tag{3.6}$$

missä $\boldsymbol{\omega}^i$ on kulmanopeus globaalissa koordinaatistossa

$\boldsymbol{\alpha}^i$ on partikkelin *i* kulmakiihtyvyysvektori.

Yhtälön (3.6) termi $\ddot{\mathbf{R}}^i$ on lokaalin koordinaatiston absoluuttinen kiihtyvyys. Toinen termi, $\boldsymbol{\omega}^i \times (\boldsymbol{\omega}^i \times \mathbf{u}^i)$, on partikkelin *i* kiihtyvyyden normaalikomponentti. Kolmas termi, $\boldsymbol{\alpha}^i \times \mathbf{u}^i$, on partikkelin *i* kiihtyvyyden tangentiaaliskomponentti. Neljäs termi, $2\boldsymbol{\omega}^i \times \mathbf{A}^i \dot{\overline{\mathbf{u}}}^i$, on partikkelin *i* kiihtyvyyden corioliskomponentti ja viides termi, $\mathbf{A}^i \ddot{\overline{\mathbf{u}}}^i$, on partikkelin *i* deformaatiosta johtuva kiihtyvyys. /17/

Jäykän kappaleen vapausasteiden lukumäärä on äärellinen. Esimerkiksi avaruustapauksessa kappaleella on kuusi vapausastetta, jotka kuvaavat täydellisesti kappaleen aseman ja orientaation globaalisen koordinaatiston suhteen. Joustavalla kappaleella on ääretön määrä vapausasteita, jotka kuvaavat kappaleen jokaisen partikkelin aseman. Joustavien kappaleiden käyttäytymistä

voidaan kuvata osittaisdifferentiaaliyhtälöillä, joiden ratkaisu johtaa deformaatiota kuvaaviin äärettömiin sarjoihin. Deformaatiovektorin $\bar{\mathbf{u}}_f{}^i$ komponentit voidaan kuvata seuraavasti

$$\begin{aligned} \bar{u}_{f1} &= \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cdot f_m \\ \bar{u}_{f2} &= \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cdot g_m \\ \bar{u}_{f3} &= \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cdot h_m \end{aligned} \tag{3.7}$$

missä a_m, b_m, c_m ovat ajasta riippuvia koordinaatteja

f_m, g_m, h_m ovat kantafunktioita.

Laskennallisista syistä deformaatiovektori kuvataan äärellisellä määrällä koordinaatteja. Approksimointiin voidaan käyttää Rayleigh – Ritz -menetelmää. Matriisimuodossa tämä voidaan esittää yhtälön (3.8) mukaisesti /17/:

$$\bar{\mathbf{u}}_f{}^i \cong \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\varphi}_i \, p_i = \boldsymbol{\Phi}\,\mathbf{p} \tag{3.8}$$

missä $\boldsymbol{\Phi}$ on (3 x n) -muotomatriisi, jonka elementit ovat kantafunktioita

$\mathbf{p}$ on vektori ajasta riippuvista modaalikoordinaateista.

3.2 Värähtelymuotojen ratkaisu elementtimenetelmällä

Elementtimenetelmällä saadaan vaimentamattoman joustavan kappaleen liikeyhtälöksi /14/:

$$\mathbf{M}\,\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_f + \mathbf{K}\,\bar{\mathbf{u}}_f = \mathbf{Q}_e \tag{3.9}$$

missä $\mathbf{M}$ on massamatriisi, jossa massa on jaettu tasaisesti solmupisteisiin (Lumped Mass Matrix)

$\bar{\mathbf{u}}_f$ on solmupisteiden siirtymiä kuvaava vektori

$\mathbf{K}$ on jäykkyysmatriisi

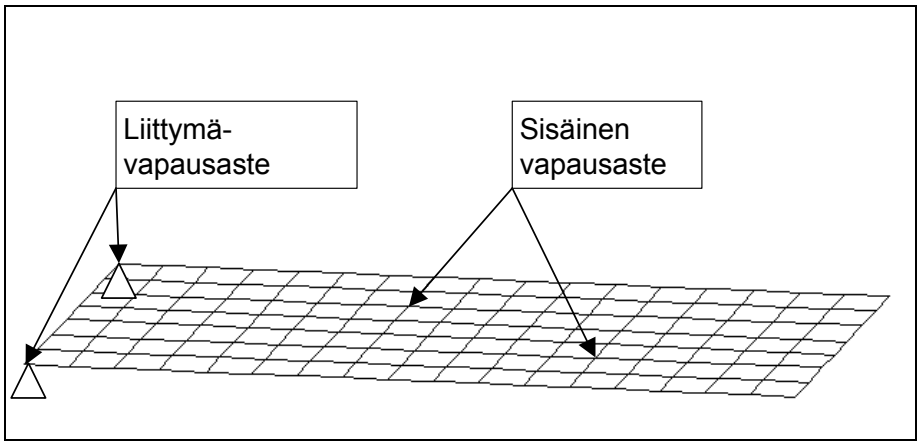
$\mathbf{Q}_e$ on ulkoinen voimavektori.

Osarakennetekniikassa tutkittava rakenne jaetaan sisäisiin vapausasteisiin ja liittymävapausasteisiin (Internal and Boundary DOFs). Rakenteen jäykkyys- ja massamatriisit jaetaan osa-alueisiin valittujen vapausasteiden mukaisesti.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{BB} & \mathbf{K}^{BI} \\ \mathbf{K}^{IB} & \mathbf{K}^{II} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{BB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{II} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

joissa indeksi *B* tarkoittaa liittymävapausastetta ja indeksi *I* tarkoittaa sisäistä vapausastetta. Liittymävapausaste tarkoittaa solmupistettä, jossa komponentit liitetään toisiinsa eli niihin asetetaan dynamiikan simulointiohjelmistossa nivelrajoitteita (kuva 3.2). /14/,/18/.



Kuva 3.2. *Vapausasteiden määrittely. Levyn nurkkasolmuihin kohdistetaan dynamiikan simulointiohjelmistossa nivelrajoitteita.*

Tukemattoman kappaleen ominaismuodot eli normaalimuodot (Normal Constrained Modes) ratkaistaan yhtälöstä (3.9) asettamalla ulkoinen voimavektori $\mathbf{Q}_e$ nollaksi ja sijoittamalla

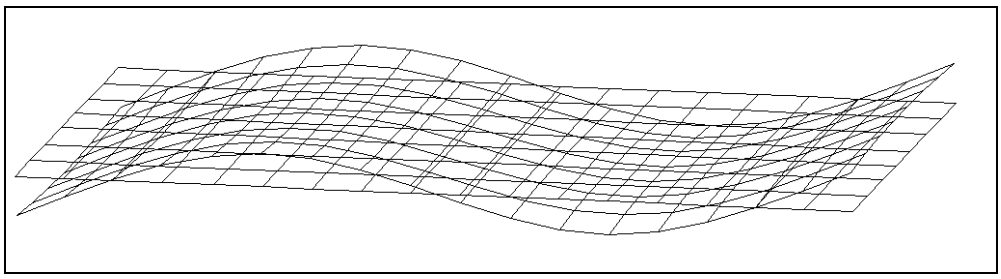
$$\mathbf{u}_f = \mathbf{\Phi}^N e^{i\omega_\lambda t}. \tag{3.12}$$

Tällöin yhtälö (3.9) saadaan muotoon

$$(\mathbf{K}^{II} - \omega_\lambda^2 \mathbf{M}^{II})\mathbf{\Phi}^N = \mathbf{0}, \tag{3.13}$$

josta ominaismuodot ja -taajuudet saadaan ratkaisemalla ominaisarvotehtävä. Yhtälössä (3.13) $\mathbf{\Phi}^{\mathrm{N}}$ on tukemattoman kappaleen muotomatriisi ja ω_λ^2 on ominaisarvo. Kuvassa 3.3 on esitetty suorakulmaisen levyn eräs normaalimuoto.

Normaalimuotoja käytetään rakenteen dynaamisten muodonmuutoksien approksimoimiseen. /18/



Kuva 3.3. *Eräs normaalimuoto.*

Staattiset korjausmuodot (Static Correction Modes) saadaan ratkaisemalla staattinen ongelma jokaiselle reunaehtovapausasteelle yhtälöstä (3.14)

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}^B \\ \mathbf{F}^I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{BB} & \mathbf{K}^{BI} \\ \mathbf{K}^{IB} & \mathbf{K}^{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}^B \\ \boldsymbol{\delta}^I \end{Bmatrix}. \tag{3.14}$$

Asettamalla sisäisiin vapausasteisiin vaikuttava voima $\mathbf{F}^I$ nollaksi saadaan

$$\boldsymbol{\delta}^I = -\mathbf{K}^{II^{-1}}\,\mathbf{K}^{IB}\,\boldsymbol{\delta}^B = \boldsymbol{\Phi}^C\,\boldsymbol{\delta}^B \tag{3.15}$$

missä $\boldsymbol{\delta}^I$ on fyysiset sisäisten vapausasteiden siirtymät

$\boldsymbol{\delta}^B$ on fyysiset reunaehtovapausasteiden siirtymät

$\boldsymbol{\Phi}^C$ on staattisten muotojen matriisi.

Staattinen korjausmuoto vastaa rakenteen muodonmuutosta, joka syntyy, kun yhdelle liittymävapausasteelle aiheutetaan yksikön suuruinen siirtymä pitäen samalla muut liittymävapausasteet paikallaan. Termi $\mathbf{F}^B$ kuvaa reaktiovoimia paikallaan pidettävissä vapausasteissa. Staattisia korjausmuotoja käytetään rakenteen staattisten muodonmuutosten approksimoimiseen. Kun rakenne, jossa vaikuttaa voimia sekä reunaehtoja, on staattisessa tasapainossa, käytetään deformoituneesta muodosta nimitystä staattinen muoto. /14/,/18/

Fyysistä deformaatiota voidaan nyt approksimoida yhdistetyn ominaismuotomatriisin avulla seuraavasti (finite modal summation):/18/

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}^B \\ \boldsymbol{\delta}^I \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Phi}^N & \boldsymbol{\Phi}^C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}}^C \\ \hat{\mathbf{p}}^N \end{bmatrix} = \hat{\boldsymbol{\Phi}}\,\hat{\mathbf{p}}\,. \tag{3.16}$$

Yhdistämällä normaalimuodot ja staattiset korjausmuodot saadaan yleistetty jäykkyysmatriisi /18/:

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}^{CC} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{K}}^{NN} \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

missä $\hat{\mathbf{K}}^{CC} = \mathbf{K}^{BB} + \mathbf{K}^{BI}\,\boldsymbol{\Phi}^{C}$

$\hat{\mathbf{K}}^{NN} = \boldsymbol{\Phi}^{N^T}\mathbf{K}^{II}\,\boldsymbol{\Phi}^{N}$.

Vastaavalla tavalla saadaan yleistetty massamatriisi

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}^{CC} & \hat{\mathbf{M}}^{CC} \\ \hat{\mathbf{M}}^{NC} & \hat{\mathbf{M}}^{NN} \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

missä $\hat{\mathbf{M}}^{CC} = \mathbf{M}^{BB} + \boldsymbol{\Phi}^{C^T}\mathbf{M}^{II}\,\boldsymbol{\Phi}^{C}$

$\hat{\mathbf{M}}^{CN} = \mathbf{M}^{BB} + \boldsymbol{\Phi}^{C^T}\mathbf{M}^{II}\,\boldsymbol{\Phi}^{N}$

$\hat{\mathbf{M}}^{NN} = \boldsymbol{\Phi}^{N^T}\mathbf{M}^{II}\,\boldsymbol{\Phi}^{N}$.

ADAMS/Flex käyttää hieman modifioitua Craig – Bampton -menetelmää systeemin vapausasteiden vähentämisessä. Craig – Bampton -menetelmässä jäykän kappaleen liike on myös muotojen lineaarikombinaatio, jota ei tarvita epälineaarisessa dynamiikan simuloinnissa. Jäykän kappaleen liike korvataan joustavan kappaleen lokaalin koordinaatiston epälineaarisella liikkeellä. Craig – Bampton -muotojen ortogonalisoinnilla jäykän kappaleen muodot voidaan tunnistaa ja poistaa. Matriisit saadaan ortogonalisoitua ratkaisemalla uusi ominaisarvo-ongelma:

$$(\hat{\mathbf{K}} - \hat{\omega}_{\lambda}^{2}\,\hat{\mathbf{M}})\;\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{0}. \tag{3.19}$$

ADAMS/Flex käyttää muotojen ortogonalisoinnissa QZ-hajotelmaa, joka perustuu Moler – Stewart -algoritmiin /19/. Alkuperäiset modaalikoordinaatit $\hat{\mathbf{p}}$ transformoidaan ortogonaalisiksi modaalikoordinaateiksi $\mathbf{p}$ ortogonaali operaattorilla $\mathbf{N}$ yhtälön (3.20) mukaisesti

$$\mathbf{N}\,\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}}. \tag{3.20}$$

Joustavan kappaleen fyysistä deformaatiota voidaan kuvata ortogonalisoidun muotomatriisin ja modaalikoordinaattien avulla seuraavasti:

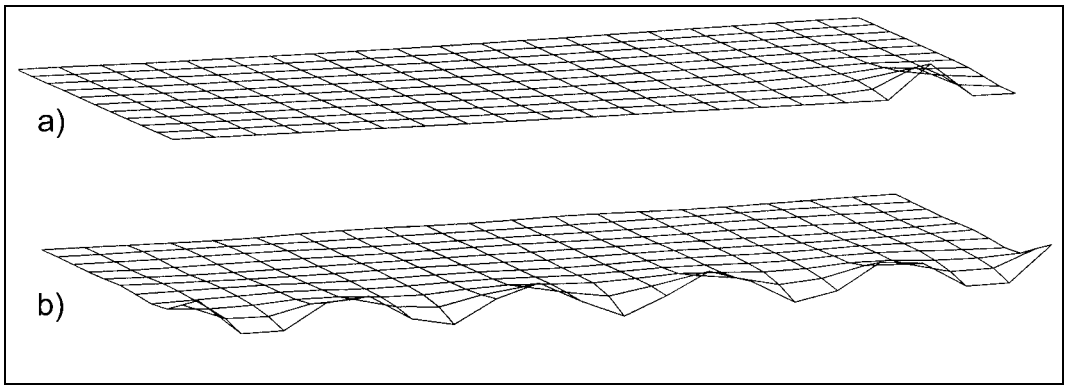
$$\bar{\mathbf{u}}_f \cong \hat{\mathbf{\Phi}}\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{\Phi}}\,\mathbf{N}\,\mathbf{p} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\varphi}_j\, p_j \;= \mathbf{\Phi}\,\mathbf{p}\,. \tag{3.21}$$

Käyttämällä ortogonalisoitua muotomatriisia $\mathbf{\Phi}$ saadaan yleistetyiksi jäykkyys- ja massamatriiseiksi:

$$\mathbf{K} = \mathbf{\Phi}^T \hat{\mathbf{K}}\,\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \omega_{\lambda 1}{}^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_{\lambda n}{}^2 \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{\Phi}^T \hat{\mathbf{M}}\,\mathbf{\Phi} = \mathbf{I}\,. \tag{3.23}$$

Ortogonalisoinnilla saadaan jäykkyys- ja massamatriisit diagonaalimuotoon. Käytettävät muodot voidaan nyt valita kuormitustapauksen mukaan, koska muodoilla ei ole keskinäistä ristikytkentää. Staattiset korjausmuodot muuttuvat liittymävapausasteiden ominaismuodoiksi, joiden ominaistaajuus tunnetaan. Kuvassa 3.4 on havainnollistettu staattisten korjausmuotojen ortogonalisointia levylle, jossa on 21 liittymäsolmua sen pitkällä sivulla. /16/,/18/



Kuva 3.4. ***a)*** *Staattinen korjausmuoto ennen ortogonalisointia. Muodon taajuutta ei tunneta.*
b) *Liittymävapausasteiden ominaismuoto ortogonalisoinnin jälkeen. Muodon taajuus on tunnettu. /18/*

3.3 Systeemin liikeyhtälöiden muodostus

3.3.1 Yleistetyt koordinaatit

Kappaleiden kuvaamiseen käytetään yleistettyjä koordinaatteja, jotka kuvaavat täydellisesti jokaisen systeemiin kuuluvan partikkelin aseman. Käyttämällä Eulerin kulmia esittämään orientaatiota, saadaan yleistetyt koordinaatit partikkelin liikkeelle /18/:

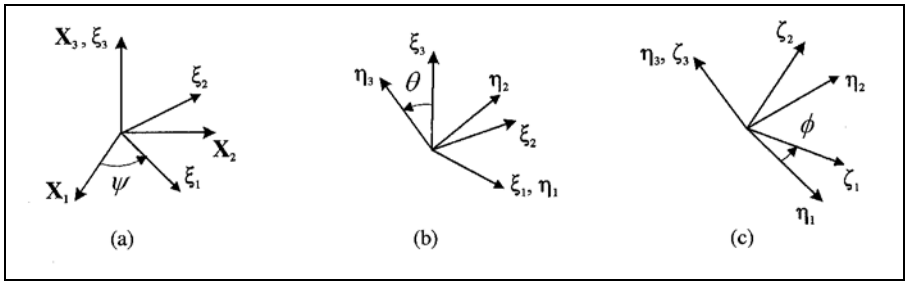
$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x_r & y_r & z_r & \psi & \theta & \phi & \mathbf{p}^T \end{bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_r \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix}^T \tag{3.24}$$

missä x_r, y_r ja z_r ovat lokaalin koordinaatiston sijainti globaaliin nähden

ψ, θ ja ϕ ovat lokaalin koordinaatiston Eulerin kulmia globaaliin koordinaatistoon nähden (kuva 3.5)

$\mathbf{q}_r$ on jäykän kappaleen yleistetyt koordinaatit

$\mathbf{p}$ on joustavan kappaleen ajasta riippuvat modaalikoordinaatit.



Kuva 3.5. *Eulerin kulmat. /17/*

Eulerin kulmien aikaderivaatoille ja lokaalin koordinaatiston kulmanopeudelle globaalin suhteen saadaan seuraava yhteys /18/:

$$\overline{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \mathbf{G}\dot{\boldsymbol{\theta}} \tag{3.25}$$

Nyt partikkelin *i* nopeuden yhtälö (3.5) saadaan muotoon

$$\dot{\mathbf{r}}^i = \dot{\mathbf{R}}^i - \mathbf{A}^i \widetilde{\overline{\mathbf{u}}}^i \mathbf{G}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{A}^i \boldsymbol{\Phi}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{A}^i \widetilde{\overline{\mathbf{u}}}^i \mathbf{G} & \mathbf{A}^i \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix} \mathbf{q} \tag{3.26}$$

3.3.2 Kinemaattiset rajoitteet

Mekaanisen systeemin koordinaatit eivät ole täysin riippumattomia toisistaan, koska nivelet ja määritellyt liikeradat synnyttävät vuorovaikutusta systeemin yleistettyjen koordinaattien välillä. Kappaleiden väliset vuorovaikutukset kuvataan rajoiteyhtälöiden avulla. Rajoiteyhtälöt ovat funktioita yleistetyistä koordinaateista ja mahdollisesti myös ajasta. Rajoiteyhtälöt voidaan esittää muodossa:

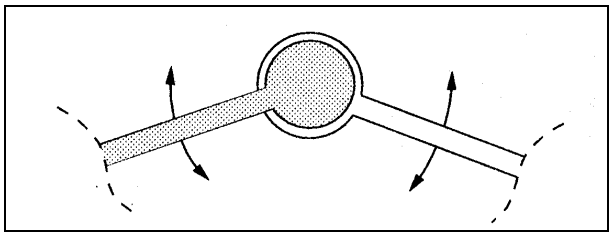
$$\mathbf{C}\left(q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n, t\right) = \mathbf{0} \tag{3.27}$$

missä n on yleistettyjen koordinaattien lukumäärä. Kohdistamalla virtuaalinen siirtymä yhtälöön (3.27) saadaan johdettua systeemin liikemahdollisuuksia kuvaava Jacobian matriisi /17/:

$$\mathbf{C}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \cdots & \mathbf{C}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{C}_{n_c 1} & \cdots & \mathbf{C}_{n_c n} \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

missä n_c on rajoiteyhtälöiden lukumäärä
n on yleistettyjen koordinaattien lukumäärä.

Esimerkkinä rajoiteyhtälöistä käsitellään rotaationiveltä kahden jäykän kappaleen välillä (Kuva 3.6).



Kuva 3.6. *Rotaationivel. /12/*

Rotaationivelessä molempien kappaleiden nivelpisteet ovat aina samassa paikassa, jolloin kinemaattiseksi rajoiteyhtälöksi saadaan /12/

$$\mathbf{C} = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i\overline{\mathbf{u}}^i - \mathbf{R}^j + \mathbf{A}^j\overline{\mathbf{u}}^j = \mathbf{0}, \tag{3.29}$$

jolloin saadaan Jacobian termit kappaleiden *i* ja *j* välille seuraavasti

$$\mathbf{C}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}_\theta^i \mathbf{u}^i & -\mathbf{I} & \mathbf{A}_\theta^j \mathbf{u}^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{C}_q)_{q_r} \\ (\mathbf{C}_q)_p \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

missä $\mathbf{I}$ on yksikkömatriisi

$\mathbf{A}_\theta$ on transformaatiomatriisin derivaatta Eulerin kulmien suhteen.

$(\mathbf{C}_q)_{q_r}$ on Jacobin matriisi jäykän kappaleen koordinaatteihin kohdistuvista rajoituksista

$(\mathbf{C}_q)_p$ on Jacobin matriisi modaalikoordinaatteihin kohdistuvista rajoituksista.

Kinemaattiset rajoitteet voidaan huomioida joko sijoittamalla rajoiteyhtälöt systeemin liikeyhtälöihin tai käyttämällä Lagrangen kertoimia λ. Sijoitusmenettely johtaa liikeyhtälöihin, jotka ovat vaikeasti numeerisesti ratkaistavissa. Lagrangen kerrointa käyttämällä systeemin differentiaaliyhtälöistä muodostuu varsin yksinkertaisia ja siten suhteellisen nopeita ratkaista sekä muodostaa. /6/

3.3.3 Yleistetyt voimat

Soveltamalla virtuaalisen työn periaatetta systeemin staattisessa tilanteessa saadaan muodostettua yleistetyt voimat. Yleistetyillä voimilla tarkoitetaan voimia, jotka liittyvät systeemin yleistettyihin koordinaatteihin. Kaikkien kappaleeseen *i* kohdistuvien ulkoisten ei-konservatiivisten voimien tekemä virtuaalinen työ voidaan esittää muodossa

$$\delta W_e^i = \mathbf{Q}_e^{iT} \delta \mathbf{q}^i \ , \tag{3.31}$$

missä $\mathbf{Q}_e^{iT}$ on ei-konservatiivisten ulkoisten voimien yleistetty voimavektori. Virtuaalisen työn yhtälö komponentteihin jaetussa muodossa on

$$\delta W_e^i = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_R^{iT} & \mathbf{Q}_\theta^{iT} & \mathbf{Q}_p^{iT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{R}^i \\ \delta \boldsymbol{\theta}^i \\ \delta \mathbf{p}^i \end{bmatrix}, \tag{3.32}$$

missä $\mathbf{Q}_R^{\,i}$ ja $\mathbf{Q}_\theta^{\,i}$ ovat yleistettyjä voimia, jotka liittyvät translaatio- ja rotaatiokoordinaatteihin ja $\mathbf{Q}_p^{\,i}$ on vektori yleistetyistä voimista, jotka liittyvät yleistettyihin modaalikoordinaatteihin. /17/

3.3.4 Lagrangen yhtälö

Lagrangen yhtälö voidaan nähdä energiakeskeisenä lähestymistapana systeemin dynamiikan tutkimiseksi. Lagrangen yhtälö saadaan Newtonin toisesta laista soveltamalla D'alembertin periaatetta, yleistettyjä koordinaatteja sekä virtuaalisen työn periaatetta. Lisäämällä Lagrangen yhtälöön rajoiteyhtälöt Lagrangen kertoimia käyttäen saadaan /17/:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i}\right) + \mathbf{C}_q{}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_e \tag{3.33}$$

missä L on Lagrangen funktio T - V

$\mathbf{C}_q$ on Jacobin matriisi laskettuna yleistetyissä koordinaateissa $\mathbf{q}$

$\boldsymbol{\lambda}$ on vektori Lagrangen kertoimista

$\mathbf{Q}_e$ on ei-konservatiivisten yleistettyjen voimien vektori.

Kappaleen i kineettinen energia T^i voidaan lausua muodossa

$$T^i = \frac{1}{2}\int_V \rho\, \dot{\mathbf{r}}^{iT} \dot{\mathbf{r}}^i \, dV\,, \tag{3.34}$$

missä ρ on kappaleen tiheys. Sijoittamalla partikkelin nopeus yhtälöstä (3.26) saadaan liike-energian lauseke muotoon

$$T^i = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{iT}\mathbf{M}^i\dot{\mathbf{q}}^i\,, \tag{3.35}$$

missä $\mathbf{M}^i$ on kappaleen i massamatriisi. Potentiaalienergialle saadaan lauseke

$$V = V_g + U\,, \tag{3.36}$$

missä joustavan kappaleen venymäenergia U on

$$U = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\,\mathbf{K}\,\mathbf{q} = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T\,\mathbf{K}_p\,\mathbf{p}\,, \tag{3.37}$$

missä $\mathbf{K}_p$ on symmetrinen positiivisesti definiitti jäykkyysmatriisi, joka liittyy kappaleen yleistettyihin elastisiin koordinaatteihin. /17/

Gravitaatiopotentiaalienergia voidaan kirjoittaa muodossa

$$V_g = \int_V \rho\, \mathbf{r}\, \mathbf{g}\, dV = \int_V \rho \left[\mathbf{R} + \mathbf{A}\ (\bar{\mathbf{u}}_o + \mathbf{\Phi}\, \mathbf{p})\right] \mathbf{g}\, dV\,, \tag{3.38}$$

missä $\mathbf{g}$ on gravitaatiokiihtyvyysvektori. Gravitaatiosta johtuva voima saadaan ottamalla potentiaalienergian yhtälöstä (3.38) osittaisderivaatat yleistettyjen koordinaattien suhteen /18/:

$$\mathbf{f}_g = \frac{\partial \mathbf{V}_g}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \left[\int_V \rho\, dV\right] \mathbf{g} \\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}} \left[\int_V \rho\, (\bar{\mathbf{u}}_o + \mathbf{\Phi}\, \mathbf{p})^T\, dV\right] \mathbf{g} \\ \mathbf{A} \left[\int_V \rho\, \mathbf{\Phi}^T\, dV\right] \mathbf{g} \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

Viskoosit vaimennusvoimat riippuvat yleistetyistä modaalisista nopeuksista ja ne voidaan esittää muodossa

$$F_D = \frac{1}{2}\, \dot{\mathbf{p}}^T\, \mathbf{D}\, \dot{\mathbf{p}}\,, \tag{3.40}$$

joka on nimeltään Rayleighin häviöfunktio. Matriisi **D** on vaimennusmatriisi, joka sisältää vaimennuskertoimet d_{ij}. Käytettäessä ortogonaalisia muotoja vaimennusmatriisi voidaan tehokkaasti laskea käyttäen modaalista vaimennussuhdetta

$$\eta_i = \frac{d_{ii}}{c_{kr}^i}\,, \tag{3.41}$$

missä $c_{kr}^i = 2\, m_i\, \omega_{\lambda i} = 2\sqrt{k_i\, m_i}$. Siten vaimennuskertoimet matriisissa **D** ovat:

$$d_{ii} = 2\eta_i \sqrt{k_i\, m_i}\,. \tag{3.42}$$

Näin jokaiselle moodille voidaan määritellä oma vaimennussuhteensa. /18/

Sijoittamalla yhtälöt (3.35 - 3.40) Lagrangen yhtälöön saadaan joustavan kappaleen liikeyhtälöksi /16/:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}\right]^T \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{f}_g + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_q{}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_e \qquad (3.43)$$

missä $\mathbf{D}$ on vaimennusmatriisi

$\mathbf{f}_g$ on gravitaatiovoimat

$\boldsymbol{\lambda}$ on Lagrangen kertoimet rajoiteyhtälölle $\mathbf{C}_q$

$\mathbf{Q}_e$ on yleistetyt voimat.

Käyttämällä merkintöjä

$$\mathbf{Q}_v = -\dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}\right]^T \dot{\mathbf{q}} \qquad (3.44)$$

$$\mathbf{Q}_E = \mathbf{Q}_e - \mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{f}_g - \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} \qquad (3.45)$$

saadaan yhtälö (3.43) muotoon:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_q{}^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_E + \mathbf{Q}_v, \qquad (3.46)$$

missä $\mathbf{Q}_v$ on neliöllinen nopeusvektori, joka sisältää gyroskooppisten ja Coriolis voimien vaikutukset. Neliöllinen nopeusvektori on epälineaarinen funktio systeemin yleistetyistä koordinaateista ja nopeuksista. Vektori $\mathbf{Q}_E$ on voimavektori, joka sisältää sekä konservatiiviset ja ei-konservatiiviset voimat. /17/

Joustavan kappaleen massamatriisi

Massamatriisi yhtälössä (3.43) on monimutkainen funktio muodonmuutoksista ja orientaatiosta, mutta jakamalla massamatriisi yhdeksään osamatriisiin translaatio-, rotaatio- ja modaalikoordinaattien mukaan saadaan laskentatehoa parannettua. /16/

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{RR} & \mathbf{m}_{R\theta} & \mathbf{m}_{Rp} \\ & \mathbf{m}_{\theta\theta} & \mathbf{m}_{\theta p} \\ symm. & & \mathbf{m}_{pp} \end{bmatrix} \qquad (3.47)$$

Alaindeksit R, θ ja p viittaavat translaatio-, rotaatio- ja modaalikoordinaatteihin. Osamatriisit muodostuvat ajasta riippuvista ja ajasta riippumattomista termeistä. Ajasta riippumattomia termejä kutsutaan inertiainvarianteiksi. Massamatriisin termit ovat /18/

$$\mathbf{m}_{RR} = \int_V \rho \mathbf{I}\, dV = \mathbf{I}^1 \mathbf{I} \tag{3.48}$$

$$\mathbf{m}_{R\theta} = -\int_V \rho \mathbf{A}(\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_o + \tilde{\mathbf{\Phi}}\mathbf{p})\mathbf{G}\, dV = -\mathbf{A}\,[\tilde{\mathbf{I}}^2 + \tilde{\mathbf{I}}_j^{\,3} p_j]\mathbf{G} \tag{3.49}$$

$$\mathbf{m}_{Rp} = \int_V \rho \mathbf{A}\mathbf{\Phi}\, dV = \mathbf{A}\ \mathbf{I}^3 \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_{\theta\theta} &= \int_V \rho \mathbf{G}^T (\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_o + \tilde{\mathbf{\Phi}}\mathbf{p})^T (\tilde{\mathbf{u}}_o + \tilde{\mathbf{\Phi}}\mathbf{p})\mathbf{G}\, dV \\ &= \mathbf{G}^T\,[\mathbf{I}^7 - [\mathbf{I}^8 + \mathbf{I}^{8^T}] p_j - \mathbf{I}^9{}_{ij}\, p_i\, p_j]\mathbf{G}\end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\mathbf{m}_{\theta p} = -\int_V \rho \mathbf{G}^T (\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_o + \tilde{\mathbf{\Phi}}\mathbf{p})^T\, \mathbf{\Phi}\ dV = \mathbf{G}^T\ [\mathbf{I}^4 + \mathbf{I}_j^{\,5} p_j\,] \tag{3.52}$$

$$\mathbf{m}_{pp} = \int_V \rho \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi}\, dV = \mathbf{I}^6 \tag{3.53}$$

Invariantit voidaan laskea tilavuusintegraaleina tai diskreetissä elementtimenetelmän tapauksessa summina. Invariantit ovat:

- Joustavan kappaleen kokonaismassa

$$\mathbf{I}^1 = \int_V \rho\ dV \cong \sum_{i=1}^{N} m_i \qquad \text{(skalaari)} \tag{3.54}$$

  missä N on solmujen lukumäärä.

- Ensimmäinen staattinen momentti

$$\mathbf{I}^2 = \int_V \rho\ \bar{\mathbf{u}}_o\, dV \cong \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{u}_{oi} \qquad \text{(3 x 1)} \tag{3.55}$$

- Painopisteen korjaus johtuen deformaatiosta

$$\mathbf{I}_j^3 = \int_V \rho\ \boldsymbol{\varphi}_j\, dV \cong \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{\varphi}_{ij} \qquad j = 1,\ldots,M \qquad \text{(3 x 1)} \tag{3.56}$$

  missä M on moodien lukumäärä

- Deformaation ja rotaation ristikytkentä

$$\mathbf{I}^4 = \int_V \rho\ \tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_o\, \mathbf{\Phi}\, dV \cong \sum_{i=1}^{N} m_i\, \tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_{oi} \mathbf{\Phi}_i + \mathbf{I}_i \mathbf{\Phi}'_i \qquad \text{(3 x } M\text{)} \tag{3.57}$$

  missä $\mathbf{\Phi}'_i$ on solmupisteen i rotaatiodeformaatiota kuvaavat muodot ja $\mathbf{I}_i$ on solmun i inertiavektori .

- Deformaation ja rotaation ristikytkennän toisen asteen korjaus

$$\mathbf{I}_j^5 = \int_V \rho\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_j\ \boldsymbol{\Phi}\, dV \cong \sum_{i=1}^{N} m_i \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{ij} \boldsymbol{\Phi}_i \qquad j = 1,\ldots,M \qquad (3 \text{ x } M) \qquad (3.58)$$

- Joustavan kappaleen yleistetty massamatriisi eli modaalimassa

$$\mathbf{I}^6 = \int_V \rho\ \boldsymbol{\Phi}^T\ \boldsymbol{\Phi}\, dV \cong \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{\Phi}_i^{\ T}\ \boldsymbol{\Phi}_i + \boldsymbol{\Phi}'^{\ T}_i\ \mathbf{I}_i \boldsymbol{\Phi}'_i \qquad (M \text{ x } M) \qquad (3.59)$$

- Joustavan kappaleen hitausmomentti

$$\mathbf{I}^7 = \int_V \rho\ \tilde{\mathbf{u}}_o^{\ T}\ \tilde{\mathbf{u}}_o\, dV \cong \sum_{i=1}^{N} m_i\ \tilde{\mathbf{u}}_{oi}^{\ T}\ \tilde{\mathbf{u}}_{oi} + \mathbf{I}_i \qquad (3 \text{ x } 3) \qquad (3.60)$$

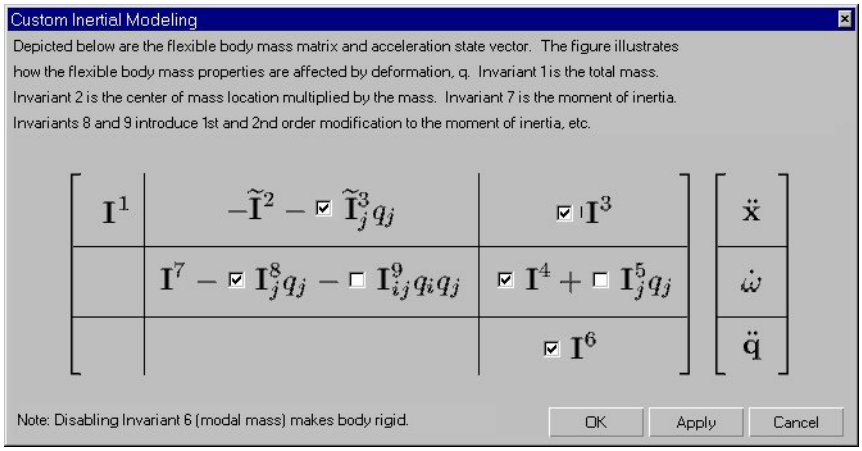
- hitausmomentin ensimmäisen asteen korjaus

$$\mathbf{I}_j^8 = \int_V \rho\ \tilde{\mathbf{u}}_o\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_j\, dV \cong \sum_{i=1}^{N} m_i\ \tilde{\mathbf{u}}_{oi}\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{ij} \qquad j = 1,\ldots,M \qquad (3 \text{ x } 3) \qquad (3.61)$$

- hitausmomentin toisen asteen korjaus

$$\mathbf{I}_{jk}^9 = \int_V \rho\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_j\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_k\, dV \cong \sum_{i=1}^{N} m_i\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{ij} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{ik} \qquad j,k = 1,\ldots,M \qquad (3 \text{ x } 3) \qquad (3.62)$$

Invariantit tarvitsee laskea vain kerran simuloinnin alussa. Invariantteja voidaan myös asettaa nollaksi, jolloin nopeutetaan laskentaa, mutta toisaalta heikennetään sen tarkkuutta (kuva 3.7). Invariantit $\mathbf{I}^5$ ja $\mathbf{I}^9$ ovat toisen asteen inertiakorjauksia, jotka vaikuttavat vähiten laskentatarkkuuteen, mutta niiden suuren koon takia ne vaativat paljon CPU-aikaa. Invariantin $\mathbf{I}^6$ eli modaalimassan asettaminen nollaksi tekee kappaleesta jäykän. /16/



Kuva 3.7. *Käytettävien massamatriisin inertiainvarianttien valinta ADAMS:ssa.*

Liikeyhtälön muotoilu numeerista integrointia varten

Jakamalla yleistetyt koordinaatit jäykän kappaleen liikettä ja deformaatiota kuvaaviin koordinaatteihin saadaan systeemin liikeyhtälö (3.46) muotoon:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_{rr} & \mathbf{m}_{rp} \\ \mathbf{m}_{pr} & \mathbf{m}_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_r \\ \ddot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{C}_q)_{q_r}^T \\ (\mathbf{C}_q)_p^T \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_E)_{q_r} \\ (\mathbf{Q}_E)_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_v)_{q_r} \\ (\mathbf{Q}_v)_p \end{bmatrix} \tag{3.63}$$

Käyttämällä vektoria

$$\mathbf{Q}_c = \mathbf{C}_q \ddot{\mathbf{q}} = -\left[\mathbf{C}_{tt} + \left(\mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}}\right)_q \dot{\mathbf{q}} + 2\mathbf{C}_{qt}\dot{\mathbf{q}}\right] \tag{3.64}$$

saadaan liikeyhtälö muotoiltua niin, että se voidaan ratkaista numeerisilla integrointimenetelmillä yhtälön (3.65) mukaisesti. Alaindeksi *t* yhtälössä (3.64) tarkoittaa osittaisderivaattaa ajan suhteen ja *q* osittaisderivaattaa yleistettyjen koordinaattien suhteen. /17/

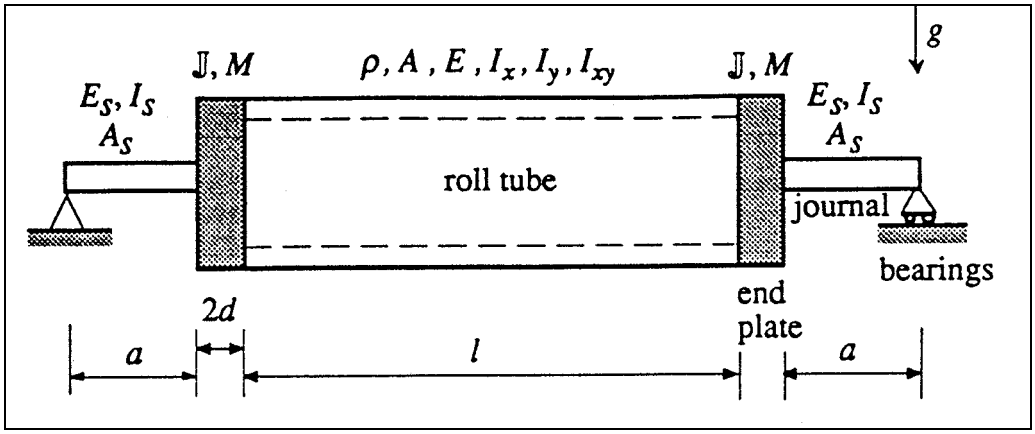
$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_{rr} & \mathbf{m}_{rp} & (\mathbf{C}_q)_{q_r}^T \\ & \mathbf{m}_{pp} & (\mathbf{C}_q)_p^T \\ symm. & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_r \\ \ddot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_E)_{q_r} + (\mathbf{Q}_v)_{q_r} \\ (\mathbf{Q}_E)_p + (\mathbf{Q}_v)_p \\ \mathbf{Q}_c \end{bmatrix} \tag{3.65}$$

eli

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_r \\ \ddot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{rr} & \mathbf{m}_{rp} & (\mathbf{C}_q)_{q_r}^T \\ & \mathbf{m}_{pp} & (\mathbf{C}_q)_p^T \\ symm. & & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_E)_{q_r} + (\mathbf{Q}_v)_{q_r} \\ (\mathbf{Q}_E)_p + (\mathbf{Q}_v)_p \\ \mathbf{Q}_c \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

3.4 Roottoridynamiikan mallinnus

Edellisissä luvuissa käsiteltiin yleistä menetelmää joustavista ja jäykistä kappaleista koostuvan systeemin dynamiikan mallintamisessa. Roottoridynamiikan mallinnusta ovat käsitelleet tarkemmin Raimo von Hertzen ja Marko Jorkama /20/. He ovat johtaneet liikeyhtälöt kuvan 3.8 mukaiselle pyörivälle telalle. Liikeyhtälöt sisältävät gyroskooppiset efektit, epäsymmetrisen putkitelan, päätylevyt, joustavat akselit ja muuttuvan pyörimisnopeuden. Putkitelan epäsymmetria on otettu huomioon yleisellä tavalla, jolloin jäykkyysominaisuudet voivat muuttua pitkin telan pituutta. Malli ottaa huomioon myös telan alkukäyryyden.



Kuva 3.8. *Pyörivä putkitela, jossa jäykät päätylevyt ja elastiset akselit. /20/*

Akseleille, päätylevyille ja putkelle johdetaan liike- ja potentiaalienergian lausekkeet, joista muodostetaan systeemin Lagrangen funktio $L = T - V$. Liikeyhtälöt johdetaan Hamiltonin prinsiipistä:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \mathbf{0} \tag{3.67}$$

Systeemin liikeyhtälöistä nähdään, että putken epäsymmetria aiheuttaa herätteen, jonka taajuus on kaksi kertaa pyörimistaajuus. Alkukäyryys taas aiheuttaa herätteen, jonka taajuus on pyörimistaajuus. /20/

Liikeyhtälöiden ratkaisumenetelmäksi on ehdotettu modaalikoordinaatteihin perustuvaa menetelmää. Ominaisarvojen laskenta voidaan tehdä joko ilman gyroskooppista kytkentätermiä tai sen kanssa. Jälkimmäinen lähestymistapa on rajoitettu vakiopyörimisnopeuteen, mutta se antaa tarkan kuvauksen roottorin dynamiikasta. Jos halutaan tarkastella roottorin kiihdytystä, täytyy gyroskooppiset kytkentätermit jättää pois muotojen laskennasta. Tällöin vaaka- ja pystysuuntaisia liikkeitä tarkastellaan toisistaan riippumattomina ja gyroskooppiset termit sekä asymmetriset termit tuodaan ulkoisina voimina systeemin liikeyhtälöihin. /20/

3.5 Vertailu teorioiden välillä

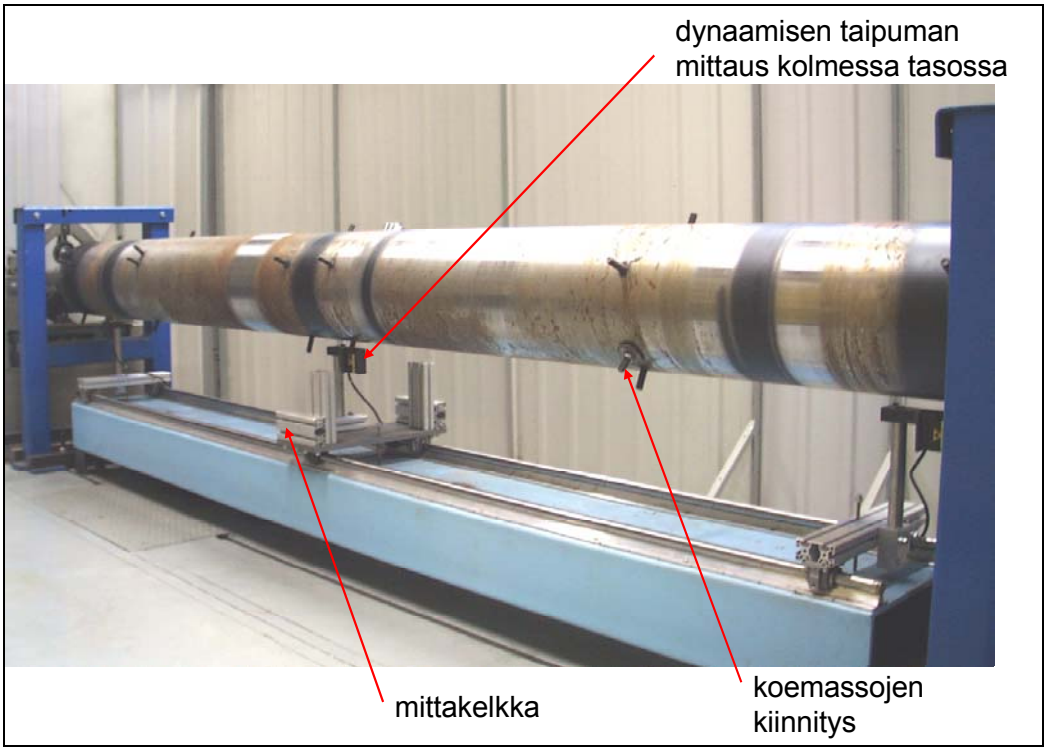
Kaupallisten dynamiikansimulointiohjelmistojen (ADAMS, DADS, SIMPACK) käyttämä jäsenen moodeihin perustuva joustavuuden kuvaustapa soveltuu kohtalaisen hyvin roottoreiden mallinnukseen. FE-mallin massa- ja jäykkyysjakauma siirtyy dynamiikansimulointiohjelmistoon tarkasti, jos käytetään riittävästi muotoja ja solmuja. Tämä mahdollistaa valmistusepätarkkuuksista johtuvien geometristen epäideaalisuuksien mallintamisen. Myös gyroskooppiset ja keskipakovoimat tulevat huomioitua automaattisesti. Elementtimallin elementtien ja solmujen lukumäärällä ei ole vaikutusta laskenta-aikaan dynamiikan simuloinnissa, koska joustavan kappaleen vapausasteiden määrä on käytettävien muotojen määrä. Puutteena roottoridynamiikan kannalta on, että menetelmässä siirtymät ovat lineaarisia, eikä menetelmällä siten pystytä kuvaamaan pyörimisnopeuden aiheuttamaa jäykkyyden kasvamista (stress stiffening). Kaupallisen simulointiohjelmiston matemaattiset ominaisuudet mahdollistavat laakeroinnin ja sen epäideaalisuuksien kuvaamisen.

Roottoridynamiikan yhtälöiden johtaminen ja niiden perusteella muodostetun simulointimallin etuna on, että mallilla voidaan tutkia eri termien vaikutusta. ADAMS/Flexin käyttämässä menetelmässä esimerkiksi gyroskooppiset efektit ovat automaattisesti mukana, eikä niitä voida tarkastella erikseen. Matemaattisesti menetelmät ovat hyvin pitkälti samoja; molemmat perustuvat Lagrangen yhtälöön.

4 TUTKITTAVA RAKENNE JA SEN MALLI

4.1 Koeroottori

Työssä tutkittava roottori on TKK:n Koneensuunnittelun laboratorion paperikoneen putkitela. Putkitelalla on kehitetty roottoridynamiikan mittaus- ja analysointimenetelmää, joka perustuu tasapainotustekniikan, laserantureiden, uuden matemaattisen algoritmin sekä telan asematiedon yhdistämiseen. Laitteisto käsittää PC-pohjaisen tiedonkeruujärjestelmän, neljä laser-anturia vahvistimineen, kytkentäpaneelin ja mittajohteen, johon anturit on asennettu. Mittaus tahdistetaan ulkoisella pulssianturilla. Nollamerkkinä käytetään telan akselin kiilauraa. Heittoa mittaavina antureina käytetään kolmiomittausperiaatteella toimivia laserantureita, joiden mittaus perustuu lasersäteen hajaheijastuksen intensiteettimaksimin liikkumiseen havaitsijalla (kuva 4.1). /21/

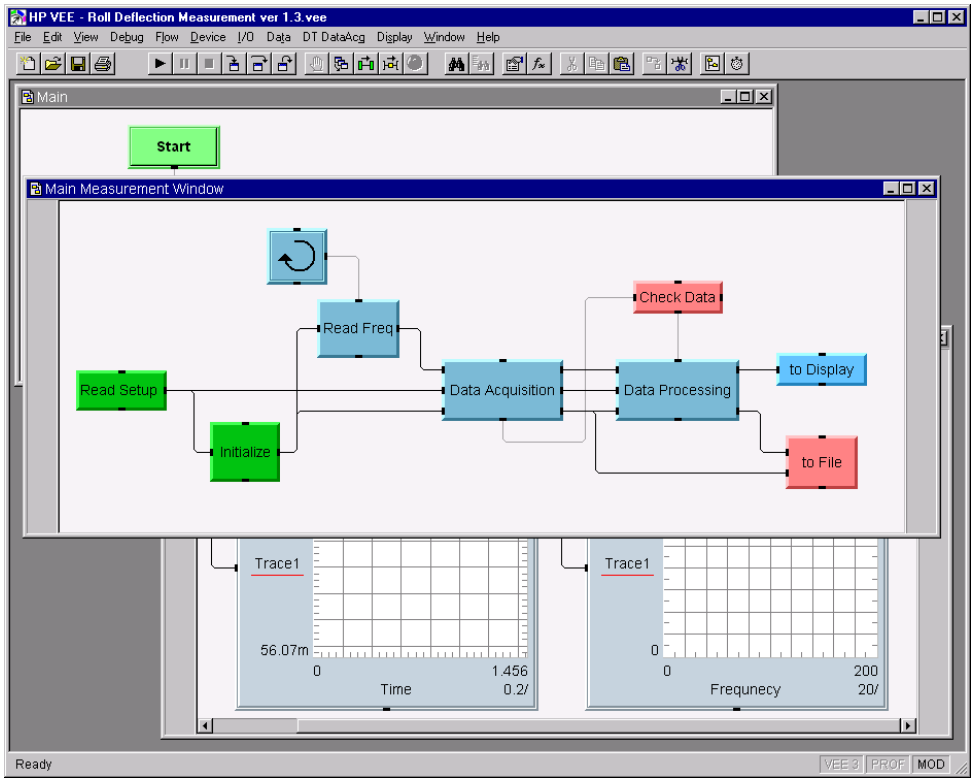


Kuva 4.1. *Telan dynaamisen käyttäytymisen mittaus perustuu laserantureilla tehtävään heiton mittaukseen. Koetelassa on pulttihitsatut tapit koemassojen kiinnitystä varten. /21/*

Telan käyttömoottori on 4 kW:n oikosulkumoottori ja sitä ohjataan 30 kW:n taajuusmuuttajan avulla. Käyttöakselissa on vakionopeusnivelet. /21/

Mittalaitteen ohjelmisto on tehty graafisella DTVee-ohjelmointikielellä (kuva 4.2). Ohjelmointikieli sisältää useita erilaisia toimintolohkoja, joiden avulla voidaan toteuttaa vaativiakin algoritmeja ja analyysejä. Mittausohjelmisto lukee jokaisen kanavan anturisignaalin, muuntaa signaalin taajuustasoon ja tallettaa anturisignaalit tietokoneen massamuistiin. /21/

Mittauksesta analysoidaan taipumaviiva, heitto ja heiton harmoniset komponentit sekä resonanssikohdat. Heittosignaalista havaitaan komponenttien suuruudet, keskinäiset suhteet ja vaihekulmat sekä muutokset nopeuden funktiona. Komponenteista voidaan päätellä mahdollisia virheiden syitä. /21/



Kuva 4.2. *Teladynamiikan HPVee -mittausohjelmiston rakenne /21/.*

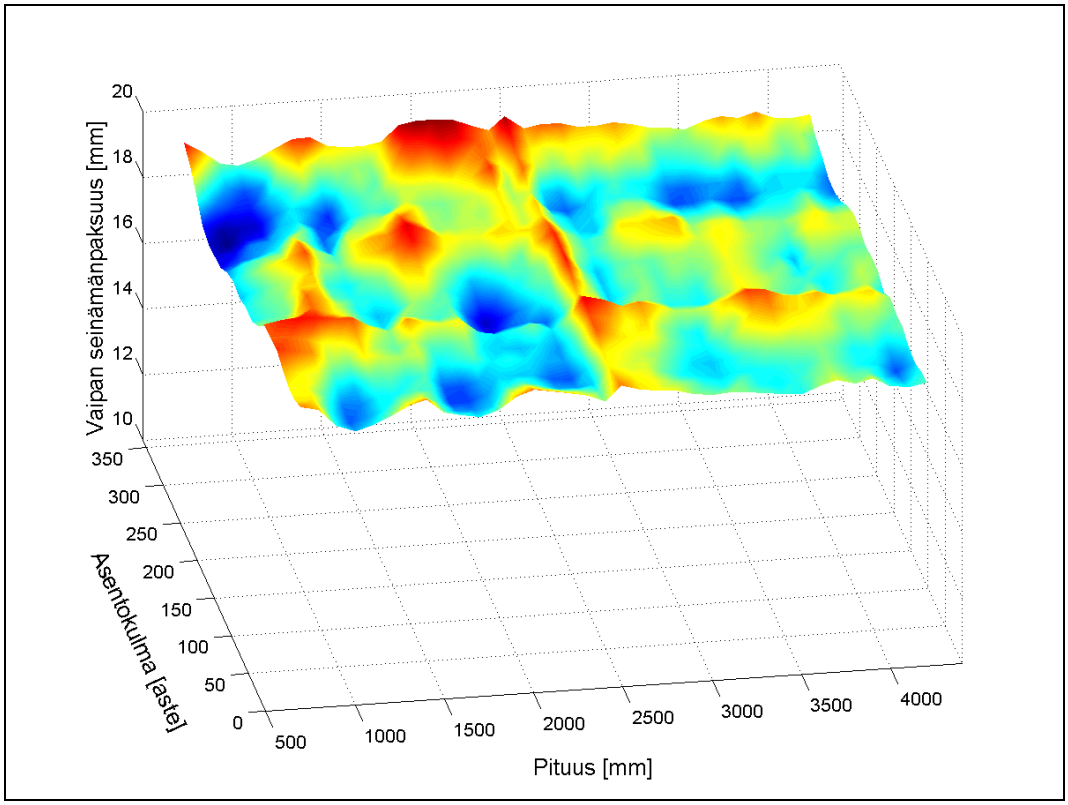
4.2 Simulointimalli

Telakoelaitteiston simulointimallin muodostuksessa käytettiin FEA- ja MBS-ohjelmistoja. Telasta ja tasapainotuspukin yläosasta laadittiin FE-mallit, jotka siirrettiin ADAMS:iin mekanismin jäseniksi. ADAMS:ssa määriteltiin nivelrajoitteet ja mekanismiin vaikuttavat voimat.

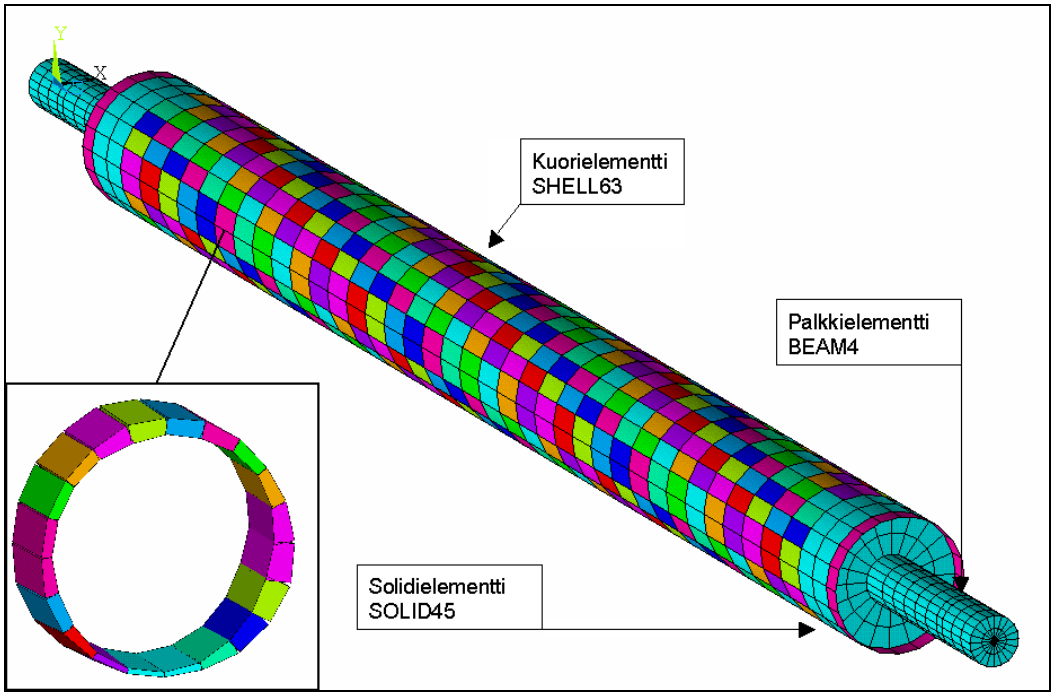
4.2.1 Telan FE-malli

Telan FE-malli on tehty ANSYS 5.4 ohjelmalla (kuva 4.4). Telan akselit ja päätylevyt on mallitettu 8-solmuisella solidielementillä SOLID45. Vaippa on mallitettu 4-solmuisella kuorielementillä SHELL63. Laakerointikohtia on vahvistettu jäykillä 3D palkkielementeillä BEAM4, joiden kimmomoduli on 100-kertainen teräksen vastaavaan. ADAMS:ssa nivelrajoitteet kohdistetaan vain yhteen solmuun, jolloin vahvistamaton liitoskohta antaa vääriä tuloksia. Palkkielementeillä siis jaetaan laakerikuormitus useammalle solmulle. Mallissa on 2046 solmua ja 2062 elementtiä.

Vaipan seinämänpaksuus on FE-mallissa mittaustuloksien mukainen. Kuorielementin SHELL63 paksuus voidaan määritellä REAL CONSTANT -vakiolla elementin nurkkapisteissä, eli jokaisen solmun kohdalla /22/. Vaipan seinämänpaksuus on mitattu niin, että mittauspisteet ovat FE-mallin solmupisteiden kohdalla. MATLAB -ohjelmistossa kirjoitettiin ohjelma, joka lukee mittaustulokset sekä solmu- ja elementtitiedoston. Ohjelma tulostaa tekstitiedostoon ANSYS:n käskyt, joilla elementtien paksuutta muutetaan. Ohjelman vuokaavio on liitteessä 1. Kuvassa 4.3 on vaipan seinämänpaksuuskartta ja seinämänpaksuuden mittaustuloksia on esitetty taulukossa 4.1.



Kuva 4.3. *Vaipan seinämänpaksuuskartta. Pituuskoordinaatti alkaa hoitopäästä. Asentokulman 0-kohta on X-akselin positiivinen suunta (kuva 4.4) ja kiertosuunta hoitopäästä katsottuna myötäpäivään.*



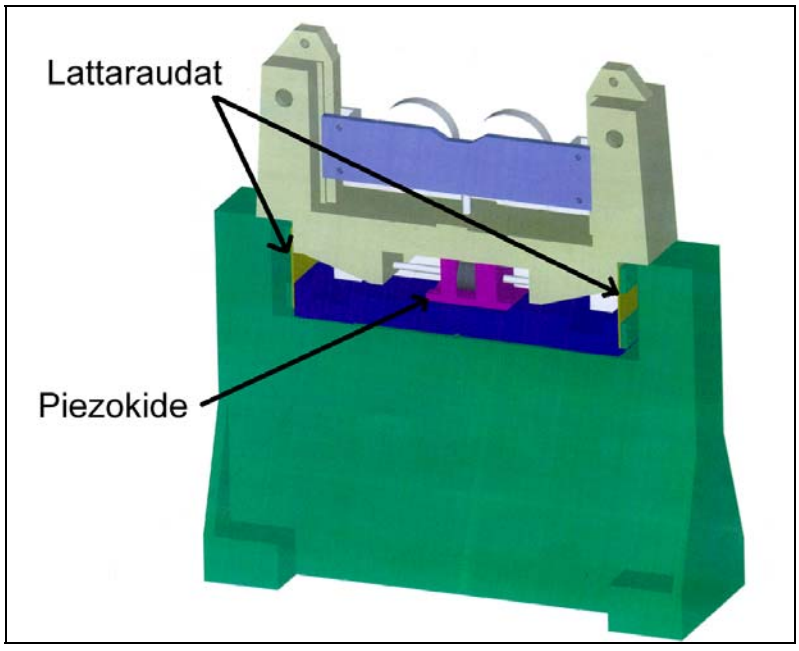
Kuva 4.4. *Telan FE-malli. Vaipan paksuusvaihtelu on esitetty eri väreillä. Käyttöpää on kuvassa lähempänä. Leikkauksessa virhe on 25-kertainen.*

Taulukko 4.1. *Vaipan seinämänpaksuuden mittaustuloksia.*

Keskiarvo [mm]	Keskihajonta [mm]	Minimiarvo [mm]	Maksimiarvo [mm]	Vaihtelu [mm]
18.72	0.30	17.86	19.59	1.73

4.2.2 Tasapainotuspukin jousivakioiden määritys

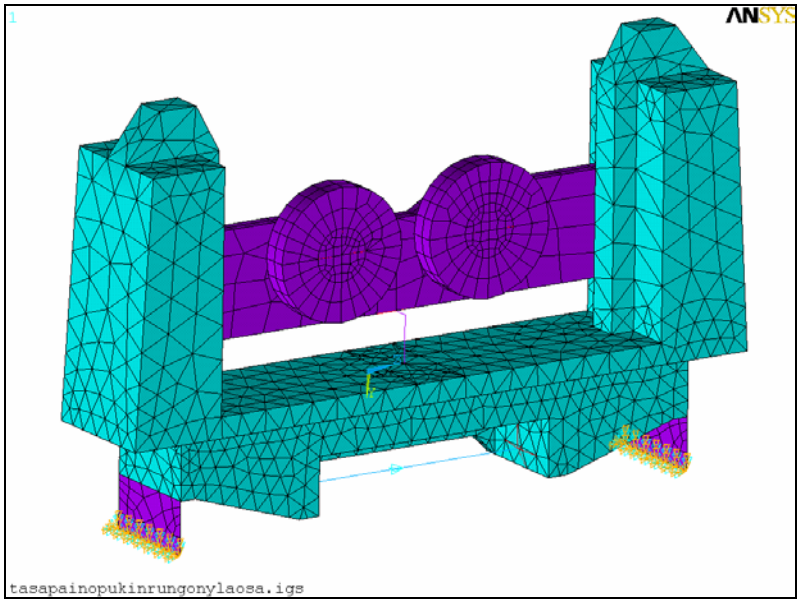
Tela on tuettu molemmista päistään kuvan 4.5 mukaisella tasapainotuspukilla. Pukin alaosa on kiinnitetty betonilattiaan ja yläosa on kiinnitetty alaosaan lattaraudoilla ja piezokiteellä. Pukin ylä- ja alaosan materiaali on valurautaa. Tukirullien kiinnitykseen käytetyn levyn materiaali on terästä ja se on kiinnitetty kitkasulkeisella ruuviliitoksella pukin yläosaan. Suurin osa pystysuuntaisesta jäykkyydestä tulee pukin yläosasta ja lattaraudoista. Vaakasuuntaisen jäykkyyden määrää pääasiallisesti piezokide, jonka jousivakio on 70 MN/m.



Kuva 4.5. *Tasapainotuspukin rakenne.*

Pukin vaaka- ja pystysuuntaiset jousivakiot määritettiin kuvan 4.6 mukaisella pukin yläosan FE-mallilla. Mallissa on käytetty hyväksi tasapainotuspukista laadittua 3D-CAD -piirustusta. CAD -piirustus on laadittu Pro-E -ohjelmalla, josta

malli siirrettiin IGES-muodossa ANSYS:een. ANSYS:ssä mallia on yksinkertaistettu poistamalla siitä porauksia ja pieniä olakkeita. Näin saatiin vähennettyä tarvittavien elementtien määrää. Piezokide on mallitettu veto-puristusjäykkyydeltään ekvivalenteilla palkkielementeillä.



Kuva 4.6. *Pukin jousivakioiden määrityksessä käytetty pukin yläosan FE-malli. Valurautainen osa on sinivihreä ja teräksiset osat ovat violetteja. Valurautaisen osan kimmomoduli on 100000 MPa, Poissonin vakio 0.21 ja tiheys 7.08 kg/m^3.*

Malliin asetettiin kuormitukseksi tukirullien kohdalle 1000 N:n vaakasuuntainen sekä 4000 N:n pystysuuntainen voima. Siirtymien perusteella voitiin laskea pukin jousivakiot. Tuloksiksi saatiin:

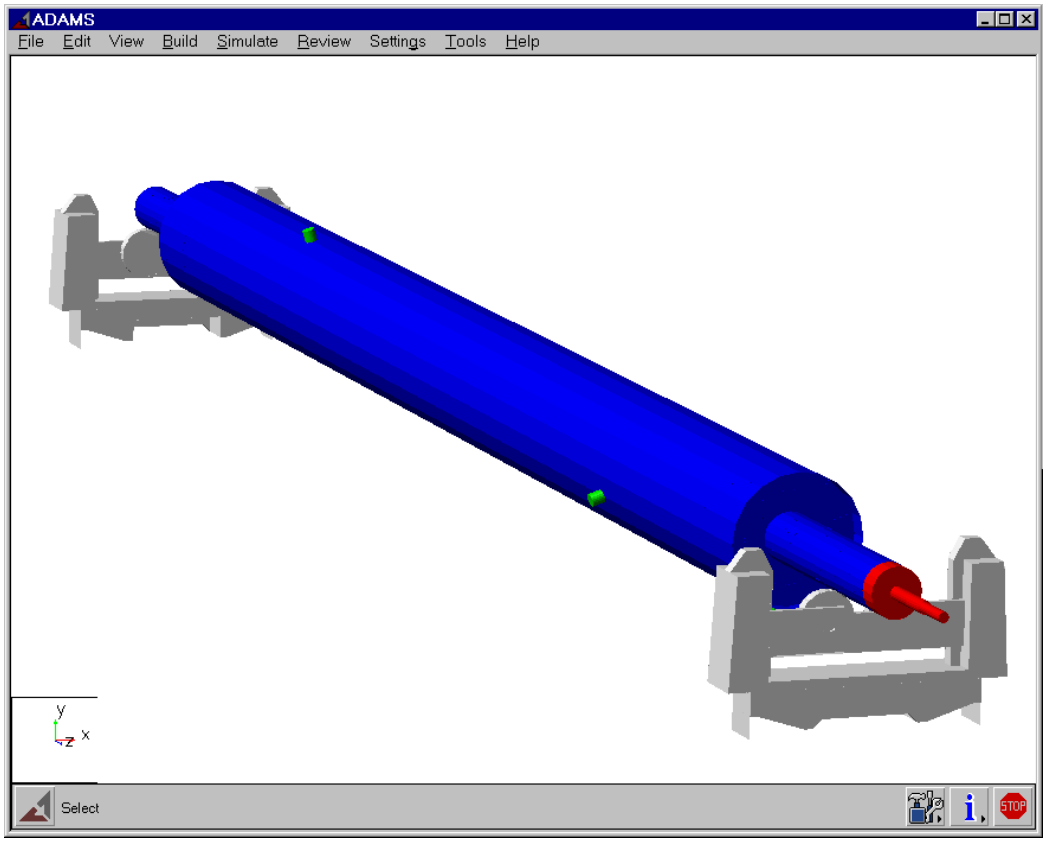
- vaakasuuntainen siirtymä 13.549 µm, jolloin jousivakio on 73.80 MN/m
- pystysuuntainen siirtymä 27.305 µm, jolloin jousivakio on 146.42 MN/m

Jousivakiot ovat luultavasti hieman pienempiä, koska tasapainotuspukin alaosa ja betonilattia joustavat hieman. Tarkempaan tulokseen päästäisiin mittauksilla.

4.2.3 ADAMS -malli

Telan ja pukin FE-mallit siirrettiin ANSYS:stä ADAMS:iin. Telamallista ratkaistiin 36 normaalimuotoa ja 12 staattista korjausmuotoa. Staattiset korjausmuodot laskettiin laakerointisolmuille. Telan massamatriisin

muodostuksessa on käytetty kaikkia inertiainvariantteja. Käyttöakseli on mallitettu ekvivalenttina jousena, joka pitää telan paikallaan sen akselin pituussuunnassa. Oikeasta telasta punnitut tasapainotusmassat on kiinnitetty telan pintaan (kuva 4.7).



Kuva 4.7. *Telakoelaitteiston malli ADAMS:ssa.*

Pukin mallista siirrettiin 15 normaalimuotoa ja 12 staattista korjausmuotoa. Simuloinneissa pukit ovat jäykkiä kappaleita, eli niiden massamatriisin inertiainvariantti $\mathbf{I}^6$ (modaalimassa) on asetettu nollaksi. Muotoja käytetään siis pelkästään massaominaisuuksien kuvaamiseen. Pukkien jousto on kuvattu lattarautojen ja piezokiteiden kohdille asetetuilla jousi-vaimenninvoimilla, joissa jousi- ja vaimennusvakiot on määritelty STATE VARIABLE -muuttujan avulla. Muuttujan käyttö mahdollistaa jousi- ja vaimennusvakioiden muuttamisen simuloinnin aikana esimerkiksi kierrosnopeuden tai ajan funktiona. Vaimennuskerroin määritettiin vastaamaan 6 % suhteellista vaimennusta. Kriittinen vaimennus laskettiin yhtälöstä (4.1) /24/ ja vaimennusvakioiksi saatiin taulukon 4.2 mukaiset arvot:

$$c_{kr} = 2\sqrt{k_i \cdot m} \tag{4.1}$$

Taulukko 4.2. *Tasapainotuspukkien lasketut vaimennusvakiot.*

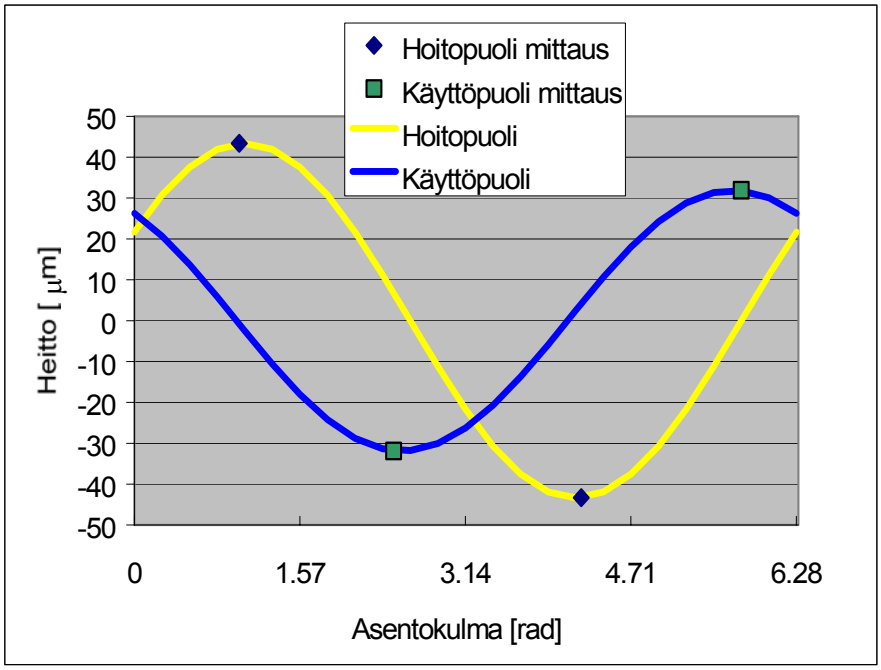
	Jousivakio [MN/m]	Värähtelevä massa [kg]	Kriittinen vaimennus [Ns/m]	6 % vaimennus [Ns/m]
Vaakasuunta	73.80	500	384189	23051
Pystysuunta	146.42	500	541154	32469

Telan akselikaulojen ja tukirullien ympyrämäisyyden mallinnus

Mitatuista telan akselikaulojen ja tukirullien ympyrämäisyysprofiileista muodostettiin yhtälön (4.2) mukaiset Fourierin cosinisarjat.

$$H(\alpha) = \sum_{k=1}^{4} c_k \cos\left(k \cdot \alpha + \phi_k\right), \tag{4.2}$$

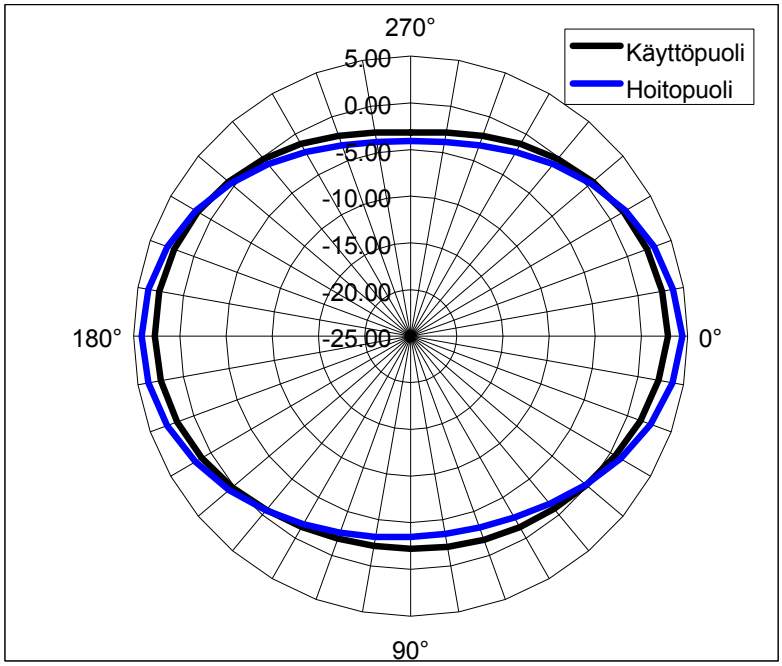
missä α on telan asentokulma ja ϕ_k on k:n harmonisen komponentin vaihe-ero. Sarjan ensimmäinen termi eli akselikaulojen epäkeskisyys määritettiin pyörittämällä telaa hitaalla pyörimisnopeudella ja mittaamalla heiton maksimi- ja minimiarvot käyttö- ja hoitopuolelta. Mitattuihin pisteisiin sovitettiin kuvan 4.8 mukaiset käyrät. Mallissa huomioitiin vain 1. - 4. kertaluvun harmoniset komponentit, sillä korkeampien komponenttien amplitudit olivat merkityksettömän pieniä. Mittaustulokset ovat taulukossa 4.3. Akselikaulojen epäkeskisyyskomponentti on suuri verrattuna soikiomaisuus-, kolmiomaisuus- ja neliömäisyyskomponentteihin. Kuvassa 4.9 on esitetty 2. - 4. kertaluvun harmoniset komponentit telan asentokulman funktiona.



Kuva 4.8. *Akselikaulojen epäkeskeisyys.*

Taulukko 4.3. *Telan akselikaulojen ympyrämäisyysvirheet ja niiden vaihe-erot.*

Käyttöpuoli			**Hoitopuoli**		
k	Amplitudi c_k [µm]	Vaihe-ero ϕ_k [rad]	k	Amplitudi c_k [µm]	Vaihe-ero ϕ_k [rad]
1	31.89	0.6021	1	43.38	5.2360
2	2.75	0.0349	2	4.05	0.0873
3	0.50	1.4312	3	0.35	1.1170
4	0.20	1.3963	4	0.25	0.2443



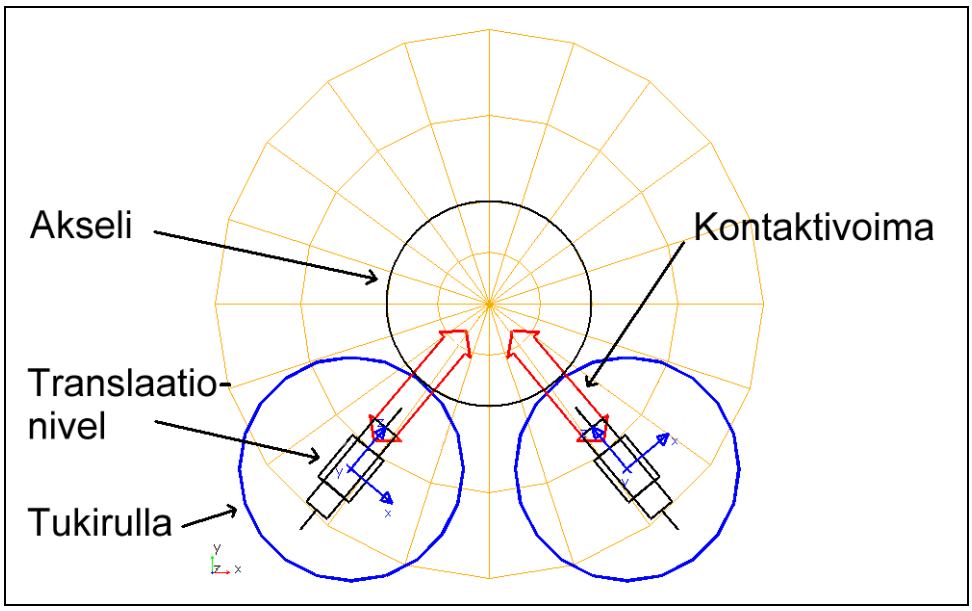
Kuva 4.9. *Akselikaulojen ympyrämäisyyden 2- 4. kertaluvun harmoniset komponentit telan asentokulman funktiona[μm].*

Tukirullien ympyrämäisyysvirheet ovat selvästi pienempiä kuin akselikaulojen. Lisäksi niistä tulevat herätteet eivät toistu samanlaisena joka kierroksella, koska akselikaulojen halkaisijat ovat 115 mm ja tukirullien 125 mm. Tukirullien heittoa ei ole mahdollista mallittaa tarkasti, koska rullien halkaisijoissa saattaa olla kymmenesosamillimetrien eroja. Tällöin yhden tukirullan asentokulma ei muutu samassa suhteessa muiden tukirullien ja telan asentokulmien kanssa. Mittaustuloksissa on havaittu vasteessa huojuntaa, jonka epäiltiin johtuvan tukirullista. Siksi tukirullien ympyrämäisyysvirheet päätettiin mallintaa ilman vaihekulmaa. Taulukossa 4.4 on esitetty tukirullien ympyrämäisyyskomponenttien amplitudit.

Taulukko 4.4. *Tukirullien ympyrämäisyysvirheen amplitudit.*

Käyttöpuoli Amplitudi c_k [μm]			**Hoitopuoli** Amplitudi c_k [μm]		
k	Eturulla	Takarulla	k	Eturulla	Takarulla
1	2.50	4.00	1	2.00	2.00
2	0.20	0.25	2	0.15	0.15
3	0.10	-	3	-	-

Akselikaulojen ja tukirullien ympyrämäisyysvirheet on mallitettu rullan ja pukin välisen translaationivelen pakkosiirtymänä, joka riippuu telan pyörimiskulmasta yhtälön (4.2) mukaisesti (kuva 4.10).



Kuva 4.10. *Telan tuenta. Akselikaulan ja tukirullien ympyrämäisyysvirheet on mallitettu translaationivelen pakkosiirtymänä. Kontaktivoimat pitävät telan paikallaan.*

Telan ja tukirullien välinen kontaktivoima

Telakoelaitteistossa tela lepää tukirullien päällä, eikä päällä oleva kolmas rulla kosketa telan akselia. Telan ylöspäin suuntautuvaa liikettä ei siis ole rajoitettu, jolloin nivelrajoitteen käyttäminen tukirullien ja telan välisen kontaktin kuvaamisessa ei anna oikeita tuloksia. Kappaleiden välisen kontaktin kuvaamiseen ADAMS:ssa on mahdollista käyttää IMPACT-funktiota, joka määritellään seuraavalla tavalla /16/:

$$IMPACT = \begin{cases} k_i (x_1 - x)^e - STEP(x, x_1 - d, c_{\max}, x_1, 0) \cdot \dot{x} & , x < x_1 \\ 0 & , x \geq x_1 \end{cases} \qquad (4.3)$$

missä k_i on jousivakio

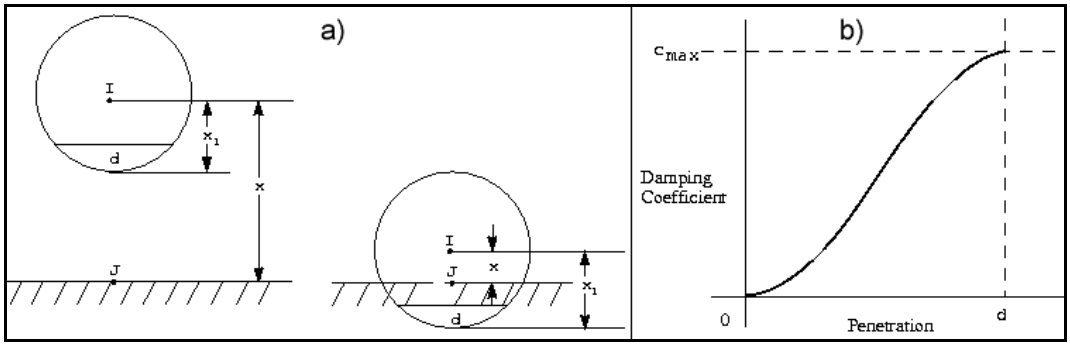
x_1 on kosketusetäisyys (kuva 4.11 a)

x on kappaleiden välinen etäisyys

e on eksponentti voima-painuma -riippuvuudelle

d on painuma, jossa saavutetaan täysi vaimennus (kuva 4.11 b)

c_{max} on vaimennusvakio



Kuva 4.11. ***a)*** *IMPACT-funktiota havainnollistava esimerkki.*
b) *vaimennuskerroin muuttuu painuman funktiona kuutiollisen STEP-funktion mukaisesti. /16/*

IMPACT-funktion parametrit määritettiin Hertzin kosketusjännityksiin perustuen. Kontaktin tyyppi on sylinteri-sylinteri, jolloin voima-painuma -riippuvuus saadaan seuraavista kaavoista /23/:

$$b = \sqrt{\frac{2 \cdot F}{\pi L_1} \cdot \frac{\frac{2(1-\nu^2)}{E}}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}}} \tag{4.4}$$

missä b on ellipsin muotoisen jännityksen jakaantumiskuvion puoliakseli

F on puristusvoima

L_1 on kosketuskohdan pituus

ν on materiaalin Poissonin vakio

E on materiaalin kimmomoduli

D_1 ja D_2 ovat sylintereiden halkaisijat

Sylinterien painuma y voidaan nyt laskea yhtälöstä:

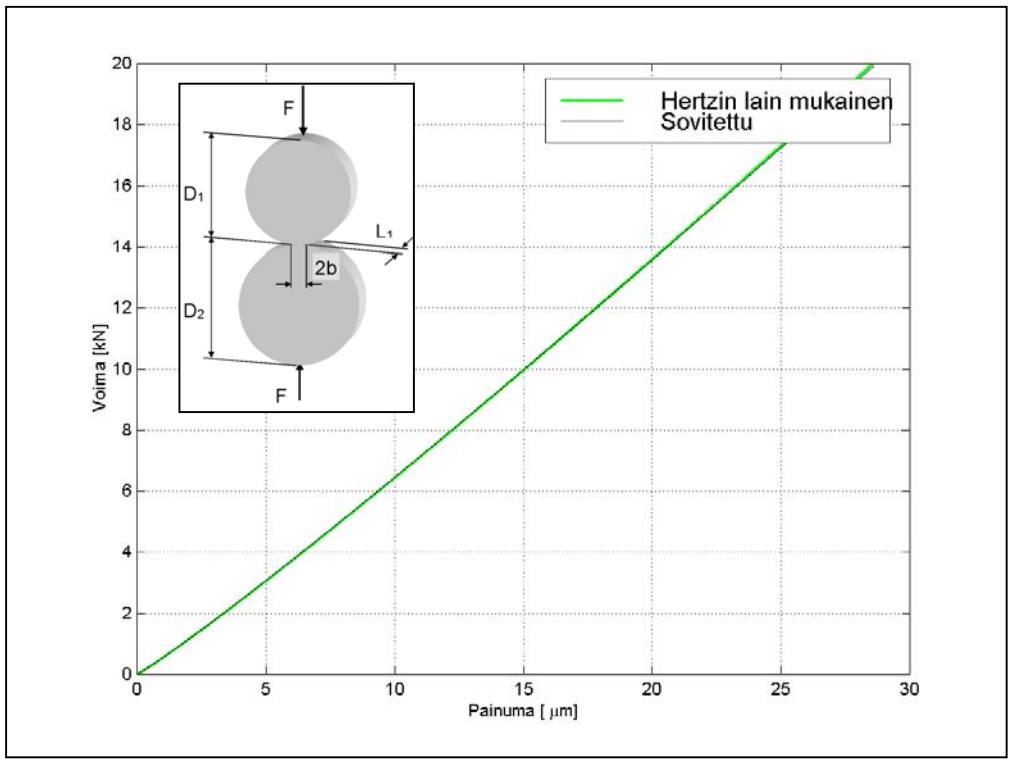
$$y = \frac{2(1-\nu^2)F}{\pi L_1 E} \cdot \left(\frac{2}{3} + \ln \frac{4 D_1 D_2}{b^2} \right) \tag{4.5}$$

Jousivakio k_i ja eksponentti e määritettiin laskemalla yhtälöistä (4.4) ja (4.5) painuma voiman arvoilla 1 N … 20000N MATLAB –ohjelmassa ja sovittamalla

saatu käyrä pienimmän neliösumman menetelmällä yhtälöön $F = k_i \cdot y^{e}$. Vaimennuskerroin asetettiin vastaamaan 10 % suhteellista vaimennusta. Kriittinen vaimennus laskettiin yhtälöstä (4.1). Valitsemalla värähteleväksi massaksi 500 kg saatiin tuloksiksi seuraavat arvot:

- jousivakio k_i = 899590.7 N/mm
- eksponentti e = 1.07220
- vaimennusvakio c_{max} = 134.13 Ns/mm.

Lisäksi valittiin täyttä vaimennusta vastaavaksi painumaksi 5 µm. Kuvassa 4.12 on esitetty Hertzin lain mukaan laskettu ja sovitettu painuma-voima kuvaaja.



Kuva 4.12. *Sylinteri-sylinteri kontaktin painuma-voima kuvaajat.*

4.3 Tuennan muuttaminen

Telakoelaitteistoa kehitetään *PyöriVÄRE* -projektin osaprojektissa *Roottorin värähtelyn hallinta* rakentamalla siihen tasopukit, jolloin laitteessa voidaan pyörittää roottoreita myös omilla laakereillaan. Laakeroinnin jäykkyyden vaikutusta roottorin värähtelykäyttäytymiseen on tarkoitus tutkia muuttamalla

laakerin jäykkyyksiä käynnin aikana. Mahdollisia vaihtoehtoja jäykkyyden muuttamiseen ovat mekaaninen tai hydraulinen järjestelmä. Laakeroinnin muutoksia on tarkoitus tutkia myös simulointimallilla, ja tässä yhteydessä käsitellään tuennan muuttamisen mahdollisuuksia ADAMS:ssa.

Roottorin laakerointiin on ADAMS:ssa kolme periaatteellista tapaa. Joko käytetään nivelrajoitteita, kontaktivoimia tai määritellään laakerivoimat matemaattisten yhtälöiden avulla. Nivelrajoitteista käyttökelpoisia ovat kiertonivel ja pallonivel. Järjestelmän nivelrajoitteita pystytään muuttamaan kesken simuloinnin. Laakerin epäsymmetriset jäykkyys- ja vaimennusominaisuudet voidaan mallintaa jousi-vaimennin –elementeillä, joiden ominaisuuksia on mahdollista kuvata joko diagonaalisilla tai täysillä 6x6 –matriiseilla. Diagonaalisten matriisien jousi- ja vaimennusvakiot voivat olla ajasta tai esimerkiksi pyörimisnopeudesta riippuvia tai epälineaarisia. Jäykkyyden mittaustuloksia voidaan hyödyntää sovittamalla tuloksiin SPLINE-käyrä. Laakerin välys on mahdollista mallintaa, jolloin laakerivoimat lasketaan kontaktimallilla käyttämättä nivelrajoitteita tai määritellään jousivakio epälineaariseksi. Kontaktimallissa on myös mahdollista mallintaa kitkavoimat. Liukulaakerin malli on mahdollista toteuttaa voimilla, joita lasketaan differentiaaliyhtälöiden ja muuttujien avulla.

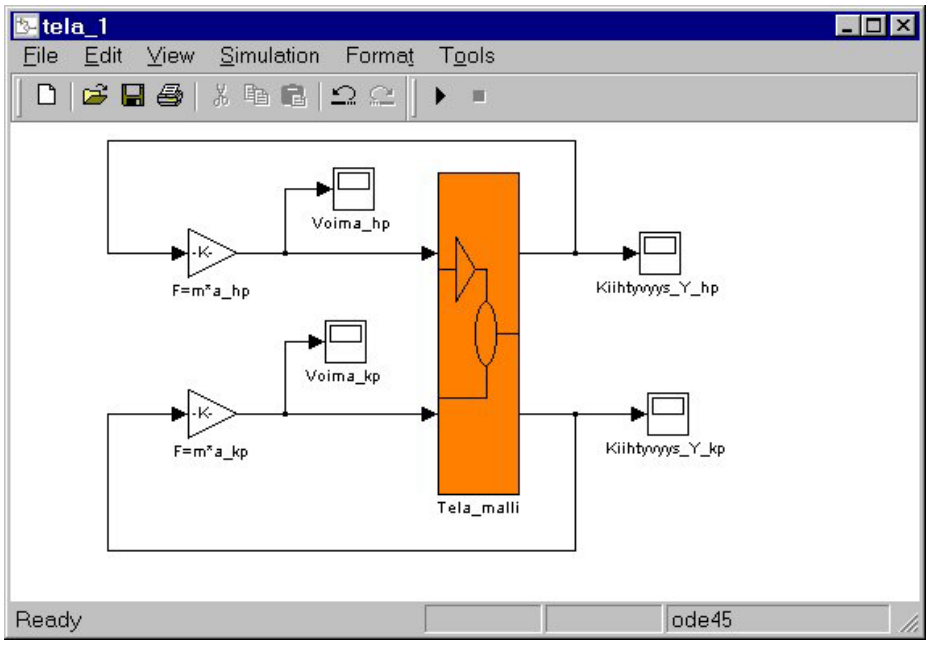
4.4 Aktiivivaimennuksen säätöjärjestelmä

Telakoelaitteistoon kehitetään osaprojektissa *Roottorin värähtelyn hallinta* aktiivinen värähtelynvaimennusjärjestelmä. Toimilaitteiden ohjauksen suunnittelusta vastaa VTT Automaatio/Oulu. Värähtelynvaimentimen säätöjärjestelmä toimilaitteineen on tarkoitus liittää telakoelaitteiston simulointimalliin. Tässä yhteydessä selvitetään periaatetasolla säätöjärjestelmän suunnitteluohjelmiston ja ADAMS:n linkittäminen.

Säätöjärjestelmän liittäminen mekaniikan simulointimalliin tapahtuu seuraavasti /16/:

1. Rakennetaan ADAMS -simulointimalli
2. Määritellään simulointimallin sisään- ja ulostulomuuttujat. Ulostulomuuttujat menevät säätöjärjestelmän suunnitteluohjelmaan ja sisääntulomuuttujat tulevat takaisin ADAMS:iin. Sisääntulomuuttujat määritellään STATE VARIABLE -muuttujalla. Ulostulomuuttuja voi olla myös mittaus (MEASURE).
3. ADAMS -malli tallennetaan *Plant Export* -valikon kautta, jolloin ADAMS kirjoittaa sisään- ja ulostulomuuttujat sisältävän tiedoston **.m* sekä **.cmd* ja **.adm* –tiedostot, jotka sisältävät ADAMS -mallin.
4. Rakennetaan säätöjärjestelmän simulointimalli. Mahdollisia ohjelmistoja ovat MATLAB, MATRIXX tai EASY5. Mekaanisen järjestelmän malli on säätöjärjestelmän simulointimallissa yksi blokki (kuva 4.13).
5. Simuloidaan säätöjärjestelmää ja mekaniikkaa vuorovaikutteisesti.

ADAMS -mallin muuttaminen onnistuu muokkaamalla **.cmd* tai **.adm* -tiedostoja tai tallentamalla malli *Plant Export* -valikon kautta uudestaan.



Kuva 4.13. *Esimerkki MATLAB/Simulink –mallista. Telan laakereista mitataan kiihtyvyyttä, joka vahvistetaan voimaksi.*

5 TULOKSET JA NIIDEN TARKASTELU

5.1 Simulointi- ja mittaustulosten vertailu

Simulointituloksia verifioitiin mittauksin. Sekä simulointimallista että oikeasta telasta mitattiin pystysuuntaista heittoa keskeltä sekä 700 mm:n etäisyydeltä käyttö- ja hoitopäästä. Näytteenottotaajuus oli 1 kHz, mikä on noin kymmenkertainen korkeimpaan kiinnostavaan taajuuteen nähden. Tuloksia verrattiin taajuustasossa analysoimalla heiton mittaustuloksia FFT:llä. Vertailu tehtiin kahdelle eri tapaukselle. Ensimmäisessä vertailussa tutkittiin telan taipuman muutosta, kun siihen kiinnitetään koemassoja. Mittaussarja toteutettiin sarjana vakiopyörimisnopeudella tehtyjä mittauksia 2,0 Hz:n nopeusportain. Toisessa vertailussa tutkittiin telan käyttäytymistä alikriittisellä pyörimistaajuudella, jolloin nopeusporras oli 0,2 Hz. Molemmissa vertailuissa vakiopyörimisnopeusportaasta erotettiin 8192 pisteen näyte, joka painotettiin hanning-ikkunalla FFT:n katkaisuvirheen pienentämiseksi.

Mittaustulosten FFT-muunnos tehtiin mittausohjelmistossa. Mittauksissa alipäästösuodatuksen rajataajuus on 10 kertaa telan pyörimistaajuus. Alipäästö-suodattimen vaihejättämä on lineaarinen, joten viive on helppo korjata analyysissä. Tallennetut mittaukset käsiteltiin vielä MATLAB-ohjelmistolla spektrikarttojen tulostusta varten. /21/

Simulointituloksien FFT-muunnos tehtiin MATLAB-ohjelmassa, josta tulostettiin spektrikartat. Molemmissa vertailutapauksissa telan vaimennussuhteina käytettiin seuraavia arvoja:

- 0,5 % vaimennus moodeille, joiden taajuus on alle 250 Hz
- 1 % vaimennus moodeille, joiden taajuus on 250 … 1070 Hz
- 100 % vaimennus moodeille, joiden taajuus on yli 1070 Hz. Kyseiset moodit ovat telan staattisia korjausmuotoja.

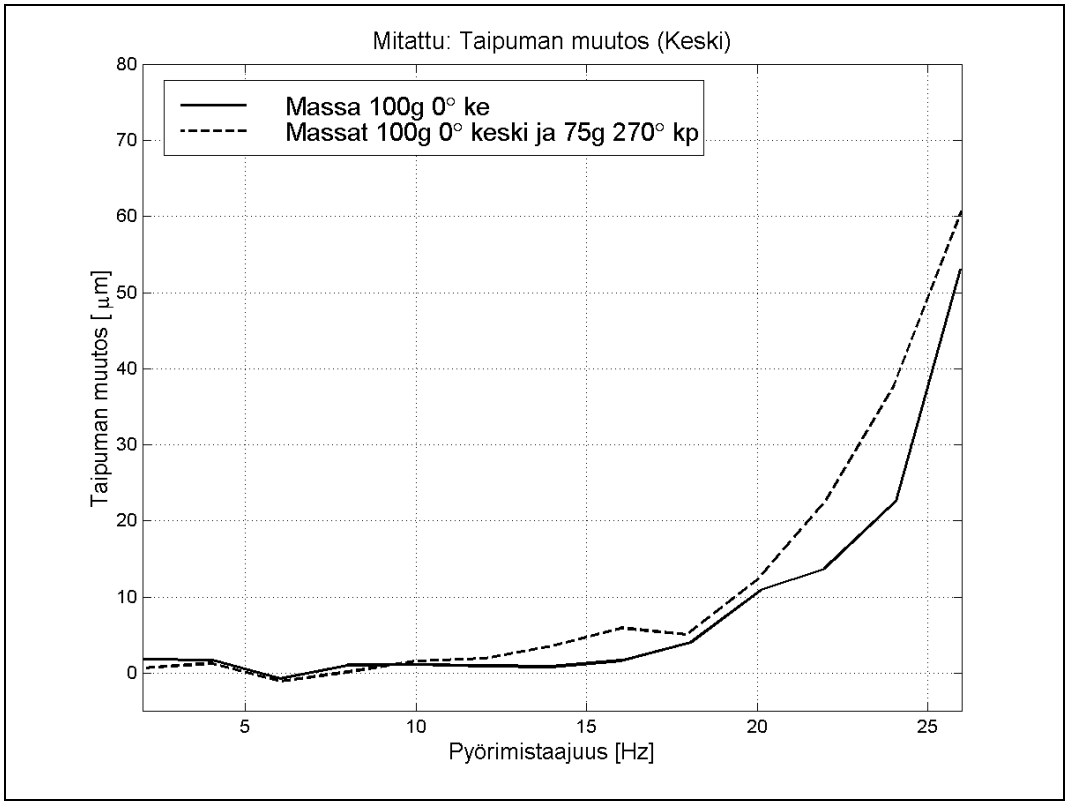
5.1.1 Telan taipuman muutoksen vertailu

Telan taipuman muutosta simuloitiin ideaalisella telalla, jossa vaipanseinämänpaksuus oli mittaustulosten keskiarvo. Myös akselikaulojen epäkeskisyys poistettiin mallista, koska se vaikuttaa taipumaan. Koemassa aiheuttaa telaan staattisen taipuman, joka pyörii telan mukana. Tela ei siis värähtele, joten simuloinnissa käytettiin 10:tä taivutusvärähtelyn normaalimuotoa ja 2:ta staattista korjausmuotoa sekä kaikkia inertiainvariantteja.

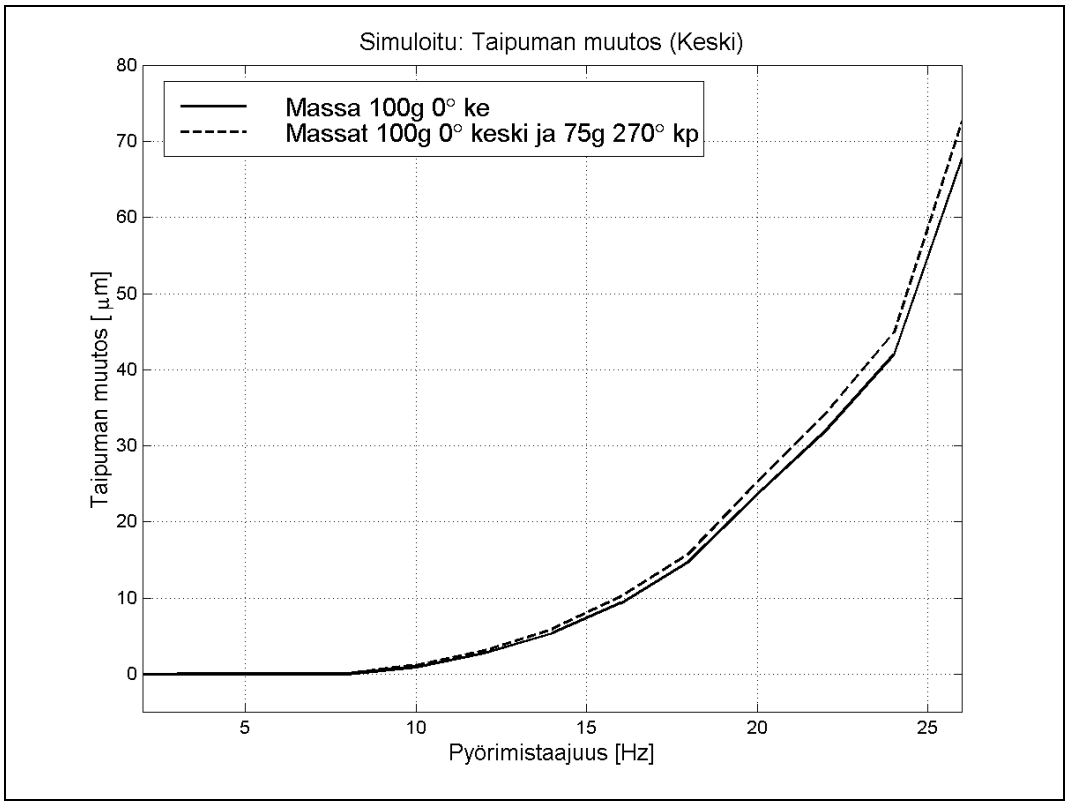
Taipuman muutosta tutkittiin koemassojen avulla. Vertailu suoritettiin pyörimisnopeusalueella 2 … 26 Hz ja nopeusportaalla 2 Hz. Aluksi mitattiin referenssitaipuma ilman lisämassoja. Seuraavassa kokeessa telan keskelle kiinnitettiin 100 g:n koemassa asentokulmaan 0°. Viimeisessä kokeessa lisättiin edelliseen käyttöpuolelle 75 g:n koemassa asentokulmaan 270°.

Taipuma määritettiin analysoimalla heittoa FFT:llä. Saaduista spektrikartoista poimittiin pyörimistaajuudella esiintyvät huippuamplitudit. Kuvassa on 5.1 on esitetty keskeltä mitattu koemassojen aiheuttama taipuman muutos verrattuna referenssimittaukseen. Kuvassa 5.2 on vastaava simuloitu taipuman muutos. Käyttö- ja hoitopuolen vastaavat kuvaajat ovat liitteessä 2.

Kuvaajista nähdään, että simuloitu telan taipuma vastaa keskellä ja käyttöpuolella hyvin mittaustuloksia. Simuloidut taipuman muutokset ovat hieman korkeammat kuin mitatut. Hoitopuolelta mitattu taipuma ei juurikaan muutu koemassojen kanssa. Ero simuloituun voi johtua oikean telan epäideaalisesta massajakaumasta. Simulointimalli ei huomioi pyörimisnopeudesta johtuvaa telan jäykkyyden kasvamista (stress stiffening). Tulosten perusteella jäykkyyden kasvaminen ei ole kuitenkaan merkittävää näin alhaisilla pyörimistaajuuksilla.



Kuva 5.1. *Mitattu lisämassojen aiheuttama telan taipuman muutos verrattuna ilman lisämassoja mitattuun referenssiin.*



Kuva 5.2. *Simuloitu lisämassojen aiheuttama telan taipuman muutos verrattuna ilman lisämassoja simuloituun referenssiin.*

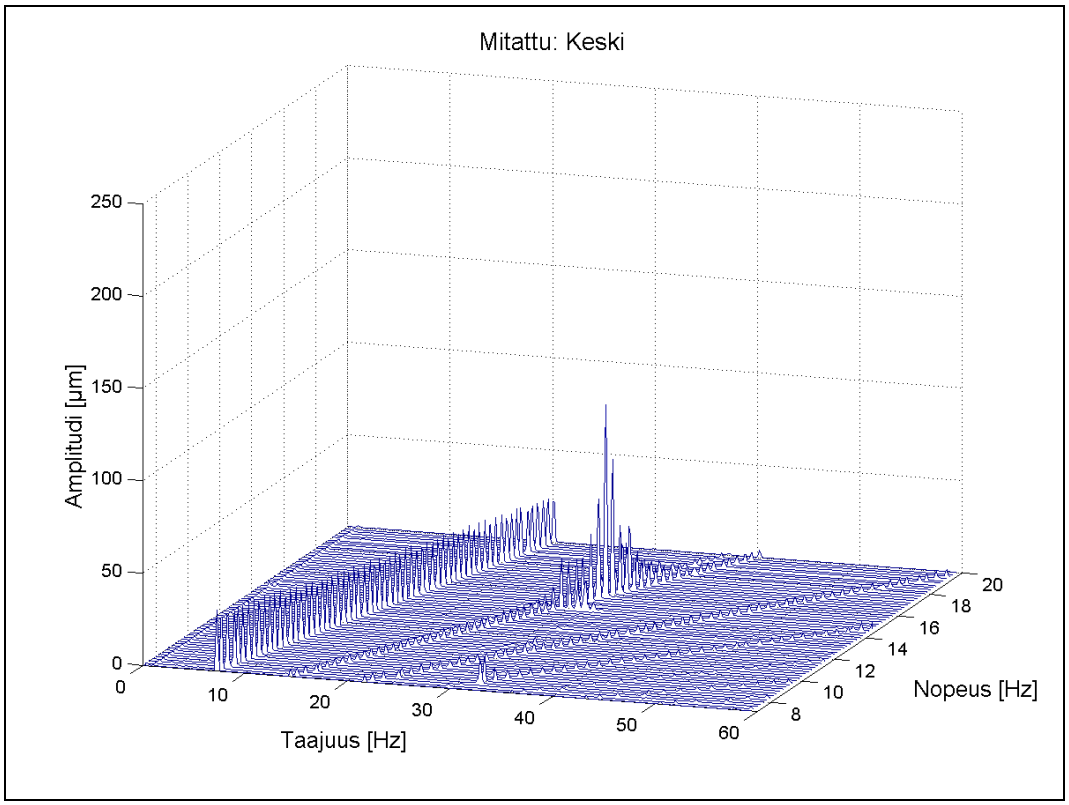
5.1.2 Telan käyttäytyminen alikriittisellä pyörimisnopeudella

Toisessa verifiointiajossa vertailtiin vertailtiin telan käyttäytymistä pyörimisnopeusalueella 7,2 … 20,0 Hz nopeusportaan ollessa 0,2 Hz. Simulointimallissa käytettiin telaa, jonka seinämänpaksuus oli mittaustulosten mukainen ja jossa oli oikeasta telasta mitatut tasapainotusmassat. Telassa käytettiin 18 normaalimuotoa ja 4 staattista korjausmuotoa sekä kaikkia inertiainvariantteja. Kuvassa 5.3 on telan keskeltä mitattu spektrikartta ja kuvassa 5.4 simuloitu spektrikartta. Käyttö- ja hoitopuolen vastaavat spektrikartat ovat liitteessä 3.

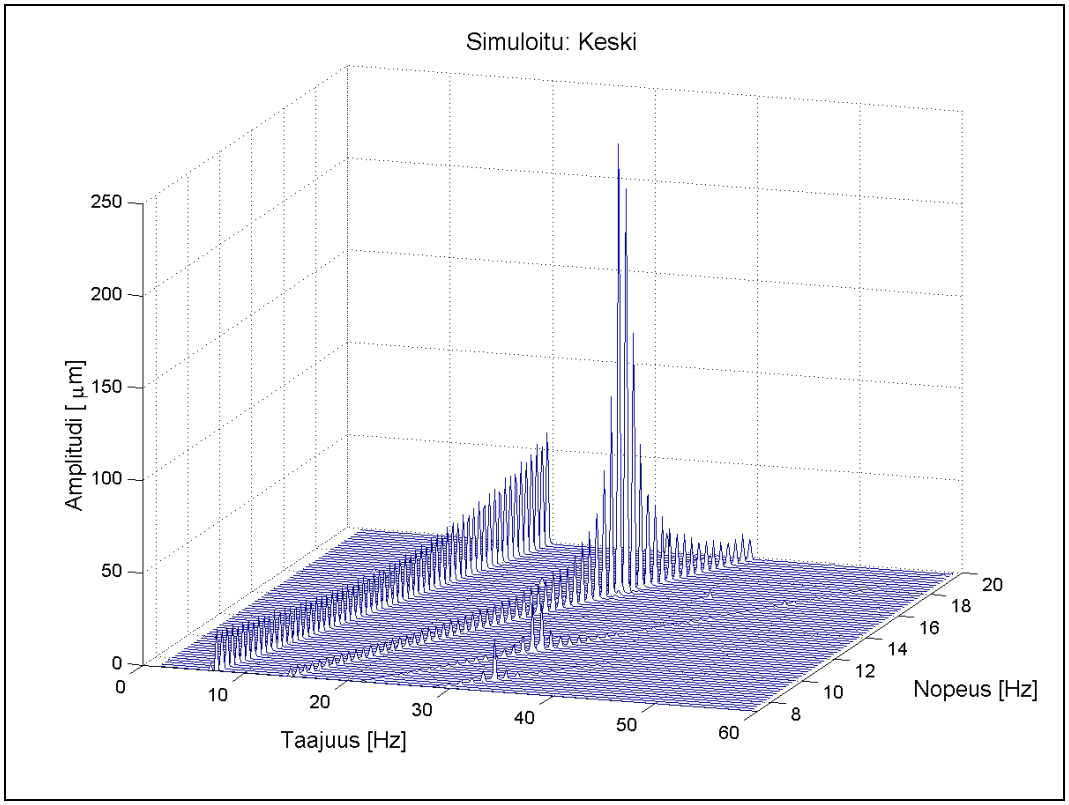
Mittaustulosten amplitudin tarkkuus on ± 5 μm. Mitattu pyörimisnopeus on n. 0,15 Hz alhaisempi kuin todellinen pyörimisnopeus. Virhe johtuu mittauksessa käytetystä pulssianturista ja se havaitaan spektrikartan ensimmäisen harmonisen komponentin taajuudesta. Simulointimallin lähtötietoina käytettyjen akselikaulojen ympyrämäisyysvirheiden mittaustarkkuus on ± 1 μm. Harmonisten komponenttien vaihekulmat on arvioitu silmämääräisesti ja niiden virhearvio on noin ± 20°. Tukirullien ympyrämäisyysvirheiden mittaustarkkuus on ± 0,2 μm /25/. Mitatut ja simuloidut murtolukukriittisten resonanssihuippujen arvot ja taajuudet ovat taulukossa 5.1.

Taulukko 5.1. *Murtolukukriittisten resonanssien huippuamplitudit ja vastaavat pyörimistaajuudet. Mitattuihin nopeuksiin on lisätty pulssianturin virhe +0,15 Hz. k = harmonisen komponentin järjestysnumero.*

k	Mitattu				Simuloitu			
	Nopeus [Hz]	Amplitudi [μm]			Nopeus [Hz]	Amplitudi [μm]		
		Keski	Käyttöp.	Hoitop.		Keski	Käyttöp.	Hoitop.
2	15.95	104	55.3	51.9	16.2	243.2	120.4	123.5
3	10.75	5.1	1.5	1.4	10.8	25.6	12.9	12.8
4	8.15	13.5	7.8	6.5	8.2	21.4	10.5	10.6



Kuva 5.3. *Mitattu pystysuuntaisen värähtelyn spektrikartta.*

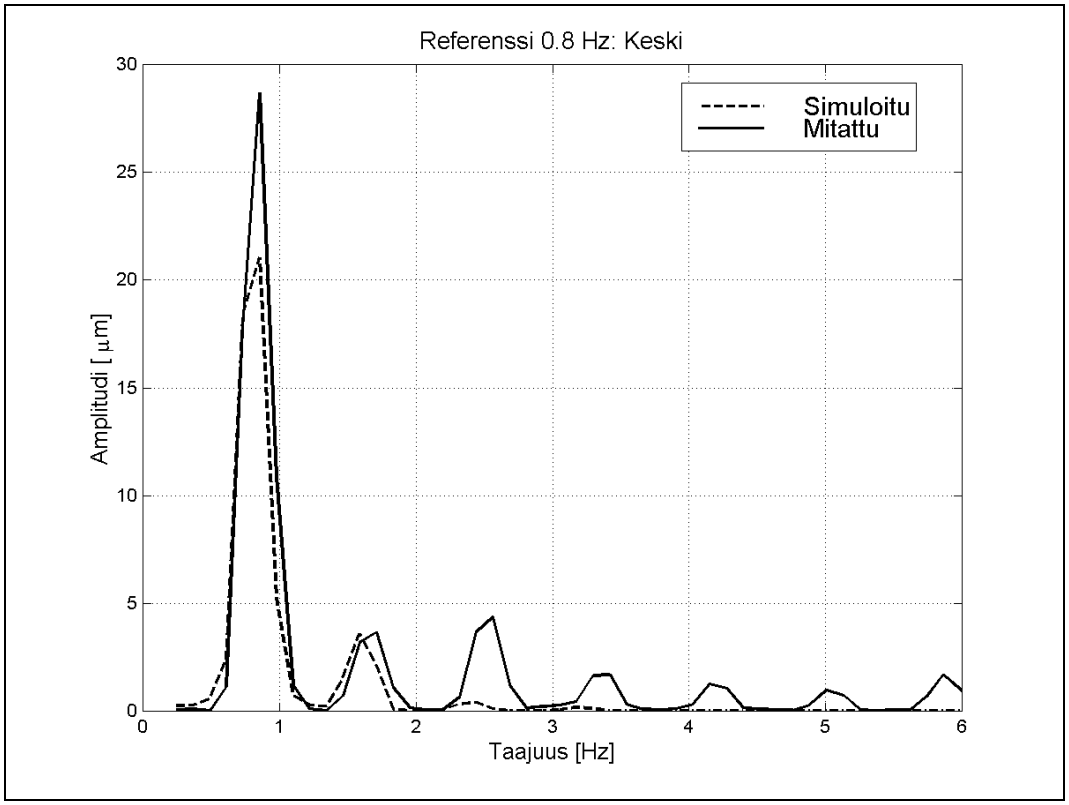


Kuva 5.4. *Simuloitu pystysuuntaisen värähtelyn spektrikartta.*

Spektrikarttojen ensimmäisiä harmonisia komponentteja vertaamalla nähdään, että simulointimallin telassa on enemmän epätasapainoa kuin oikeassa telassa. Massaepätasapainoon vaikuttavista epäideaalisuuksista on mallitettu vain seinämänpaksuusvaihtelu, oikeassa telassa on myös muita geometrisia virheitä, kuten vaipan soikeus ja telan käyryys. Lisäksi vaipan elementtiverkko on harva, eikä siten kuvaa tarkasti seinämänpaksuuden vaihtelua. Akselikaulojen epäkeskeisyydestä johtuvaa massaepätasapainoa ei ole huomioitu, koska epäkeskeisyys on mallitettu tukirullien liikkeenä. Massajakauman mallittaminen täysin oikein vaatisi tarkempaa tietoa telan geometriasta, jolloin se voitaisiin huomioida FE-mallissa solmuja siirtämällä. Näiden syiden vuoksi oikeasta telasta mitatut tasapainotusmassat eivät tasapainota simulointimallin telaa.

Resonanssihuippujen taajuudet ovat simulointimallissa hieman suuremmat kuin oikeassa telassa. Tulosten perusteella kriittinen pyörimistaajuus on mallissa n. 0,5 Hz suurempi kuin oikeassa telassa. Virhe voi johtua siitä, että huippu ei ole osunut spektriviivan kohdalle. Toinen mahdollisuus on, että simulointimallin tela on jäykempi, mikä saattaa johtua vaipan mallintamiseen käytetystä kuorielementistä, jonka paksuus on symmetrinen keskitason suhteen. Oikeassa telassa vaipanseinämänpaksuusvaihtelut ovat pääasiassa vaipan sisäpinnalla, jolloin jäykkyys on pienempi. Tämän voisi huomioida mallittamalla vaippa solidielementeillä ja siirtämällä sisäpinnan solmuja säteissuunnassa niin, että seinämänpaksuus vastaa mittaustuloksia. Tela on suhteellisen joustava verrattuna tasapainotuspukkeihin, joten telan jousivakio määrää pääasiassa kriittisen pyörimisnopeuden, mutta tasapainotuspukin jäykkyys voi olla mallissa hieman suurempi.

Muilla taajuuksilla kuin resonanssitaajuuksilla on mitatussa spektrikartassa kolmannen ja neljännen harmonisen komponentin amplitudi suurempi kuin simuloidussa. Tämä johtuu siitä, että mittaustuloksissa näkyy mittauspoikkileikkauksen ympyrämäisyysvirheet. Kuvassa 5.5 on esitetty mitattu ja simuloitu spektriviiva pyörimistaajuudella 0,8 Hz. Kuvasta nähdään, että mitattu kolmas ja neljäs harmoninen komponentti on suurempi kuin simuloitu.



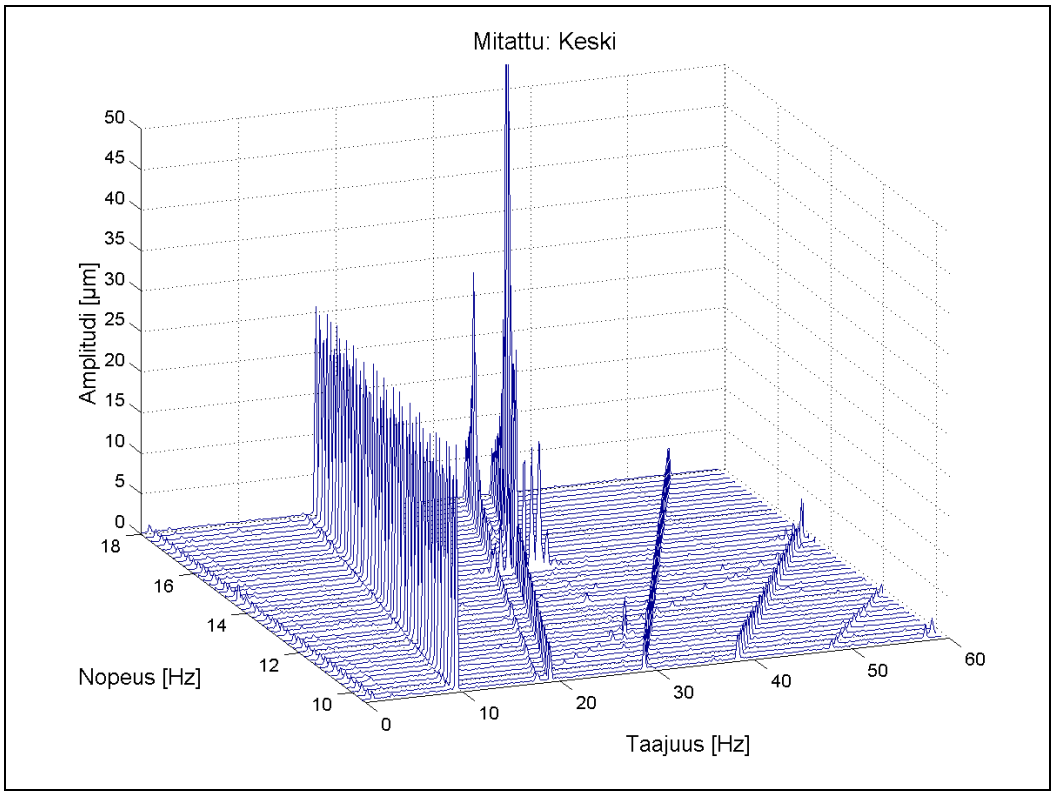
Kuva 5.5. *Mitattu ja simuloitu spektriviiva pyörimistaajuudella 0,8 Hz. Taajuusresoluutio on 0,12 Hz, minkä takia huiput eivät ole teräviä.*

Simuloitu puolikriittisen resonanssihuipun amplitudi on selvästi suurempi kuin vastaava mitattu. Tämä johtuu joko liian suuresta herätteestä tai liian pienestä vaimennuksesta. Telaan tulee herätteitä akselikaulojen ja tukirullien ympyrämäisyysvirheistä sekä puolikriittisen pyörimistaajuuden kohdalla painovoiman ja jäykkyysvaihtelun yhteisvaikutuksesta. Ympyrämäisyysvirheistä johtuvat herätteet on mallitettu kontaktivoimien avulla. Voiman laskennassa käytetty jousivakio kuvaa vain kahden sylinterin kontaktia, joten tukirullien laakerien jäykkyyttä ei ole huomioitu kontaktivoimassa eikä myöskään pukin FE-mallissa. Laakerin jäykkyyden huomioiminen pienentäisi kontaktivoiman jousivakiota ja sitä kautta herätettä. Laakereiden välyksellä ja voiteluaineella on luultavasti vaikutusta herätteeseen, koska mallitetut ympyrämäisyysvirheet ovat mikrometrien suuruusluokkaa. Telan jäykkyysvaihtelu ja pääjäykkyysakselien suunta suhteessa akselikaulojen soikiomaisuuden suuntaan vaikuttavat herätteen suuruuteen puolikriittisellä pyörimistaajuudella. Pelkkä seinämänpaksuusvaihtelu ei välttämättä kuvaa oikein jäykkyysvaihtelua.

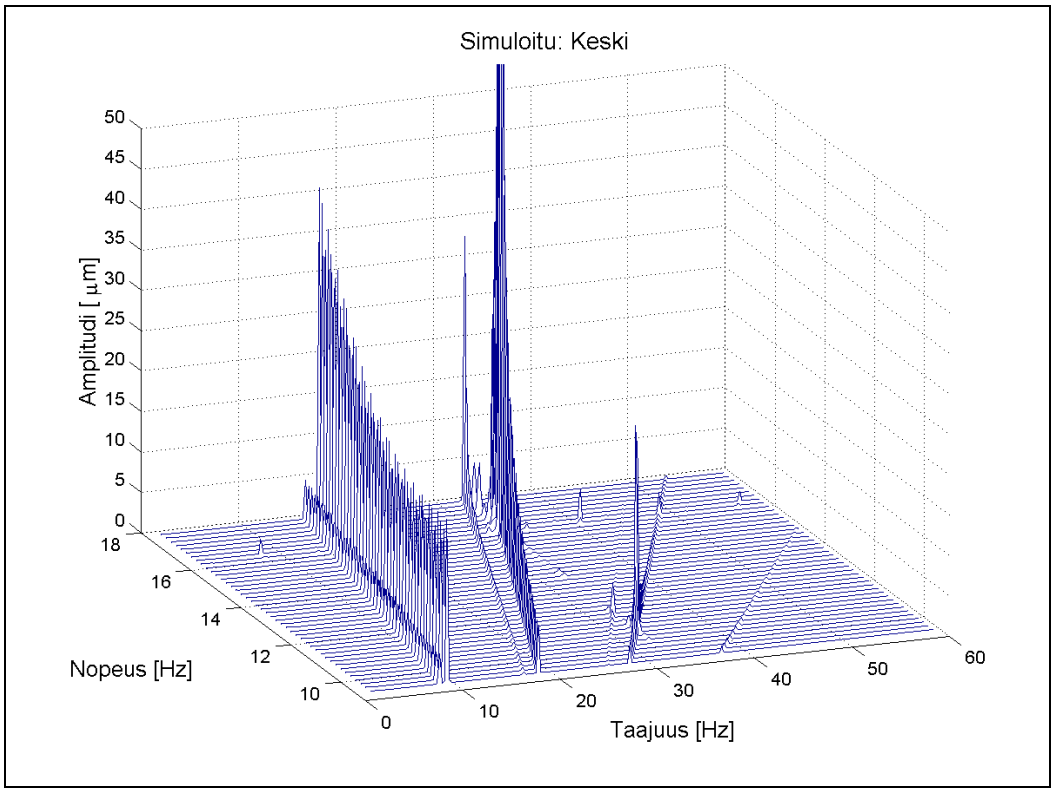
Oikean telan vaimennus on materiaalin hystereesivaimennusta. Teräksen materiaalivaimennus on tyypillisesti suuruusluokkaa 0,5 … 1,0 % kriittisestä vaimennuksesta, mitä on käytetty mallissa. Telan vaimennus on mallissa luultavasti lähellä oikeaa. Tasapainotuspukin vaimennus johtuu materiaalin hystereesivaimennuksesta ja ruuviliitosten kitkavaimennuksesta. Simulointimallissa vaimennus kuvataan lattarautojen ja piezokiteen kohdille sijoitetuilla viskoosivaimennusvoimilla, jotka vastaavat laskettua 6 % suhteellista vaimennusta. Lähteen /11/ mukaan hystereesivaimennus on pääasiassa riippuvainen värähtelyn amplitudista, mutta ei niinkään värähtelynopeudesta. Viskoosivaimennusmalli ei välttämättä kuvaa oikein tasapainotuspukin vaimennusta. Myös vaimennuksen sijainti voi olla väärä, sillä mallissa vaimennusvoima on riippuvainen jäykän 50 kg:n tasapainotuspukin nopeudesta, jolloin massan hitaus vaikuttaa vaimennusvoiman suuruuteen. Oikeassa rakenteessa vaimennus on jakautunut tasaisemmin koko rakenteelle ja herätevoima aiheuttaa suuremman vaimennusvoiman. Kitkasulkeisten ruuviliitosten vaimennus saattaa olla suurempi kuin mallissa käytetty 6% suhteellinen vaimennus.

Mittaustuloksissa kolmasosakriittisen resonanssihuipun amplitudi ei eroa kovinkaan paljon 0,8 Hz pyörimisnopeudella tehdystä mittauksesta. Akselikaulojen kolmiomaisuudesta tuleva heräte on luultavasti olemattoman pieni ja rakenteen vaimennus on riittävän suuri estämään resonanssivärähtelyn. Simuloitu neljännen harmonisen komponentin amplitudi vastaa hyvin mitattua, kun otetaan huomioon, että resonanssihuippu osuu spektriviivojen väliin. Kuvassa 5.3 näkyy neljännen harmonisen kohdalla kaksi lähes yhtä suurta huippua.

Kaikki simulointimalliin määritellyt herätteet saatiin näkyviin spektrikartassa. Tukirullien ja akselikaulojen halkaisijaerosta johtuen näkyvät tukirullien ympyrämäisyysvirheet herätteinä taajuuksilla 0,9, 1,8 ja 2,7 kertaa pyörimistaajuus. Kuvassa 5.6 on keskeltä mitattu spektrikartta ja kuvassa 5.7 simuloitu spektrikartta.



Kuva 5.6. *Mitattu spektrikartta. Vaakasuuntainen puolikriittinen värähtely näkyy häiriönä taajuudella 14.6 Hz.*



Kuva 5.7. *Simuloitu spektrikartta. Tukirullista tulevat herätteet näkyvät taajuuksilla 0,9, 1,8 ja 2,7 kertaa pyörimistaajuus.*

5.2 Laskennan tietokoneajat

Simuloinnin laskenta-aikojen määrittämiseksi tehtiin useita simulointiajoja, joissa tutkittiin maksimiaika-askeleen pituuden, integraattorin virhetoleranssin ja käytettävien moodien määrän vaikutusta. Kokeissa simuloitiin 10 s pyörimistaajuudella 16.4 Hz, joka on lähellä pystysuuntaista puolikriittistä pyörimistaajuutta. Telan vaimennuskertoimina on käytetty ADAMS:n oletusvaimennusta, joka on

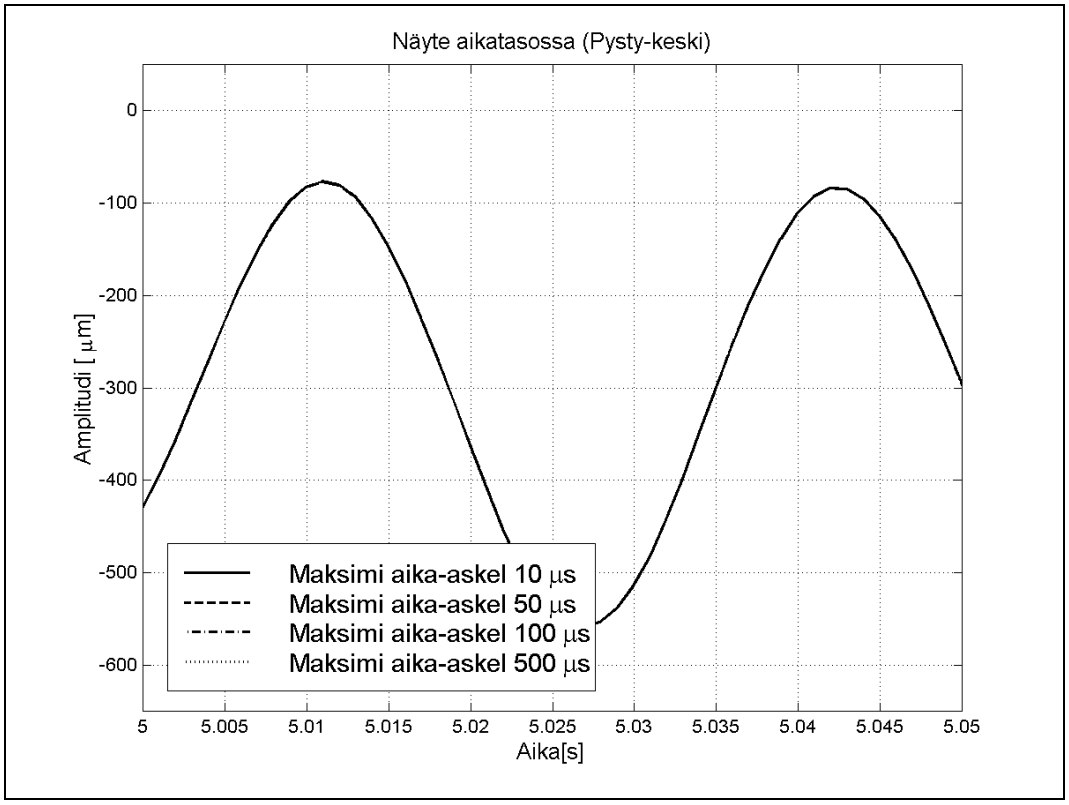
- 1 % vaimennus moodeille, joiden taajuus on alle 100 Hz
- 10 % vaimennus moodeille, joiden taajuus on 100 … 1000 Hz
- 100 % vaimennus moodeille, joiden taajuus on yli 1000 Hz.

Simulointiin käytettiin SGI Octane työasemia, joissa on 175 MHz R10000 prosessori ja muistia koneesta riippuen 128Mb tai 256 Mb.

Ensimmäisenä tutkittiin integraattorin maksimiaika-askeleen vaikutusta. IMPACT-funktion laskema voima perustuu kahden kappaleen väliseen etäisyyteen. Simuloinnin kannalta ratkaisevaksi muodostuu kontaktin havaitseminen. Jos aika-askel on pitkä, niin kappaleet saattavat mennä sisäkkäin aika-askelten välissä ilman, että integraattori huomaa kontaktia. Tällöin on seurauksena ylisuuri ja epärealistinen kontaktivoima ja integraattorin täytyy palata ajassa taaksepäin ja jatkaa pienemmällä aika-askeleella. Simulointiajoissa käytettiin telassa 30 normaalimuotoa ja 12 staattista korjausmuotoa ja integraattorin virhetoleranssia 1e-4. Integraattorin virhetoleranssi tarkoittaa sitä, kuinka monen desimaalin tarkkuuteen integrointitulosta iteroidaan. Laskennan tietokoneajat ovat taulukossa 5.2 ja kuvaajat ovat kuvassa 5.8.

Taulukko 5.2. *Integraattorin maksimiaika-askeleen vaikutus CPU-aikoihin.*

Integraattorin maksimi aika-askel [μs]	10	50	100	500
CPU-aika	45h 15min 29s	10h 24min 8s	6h 35min 35s	6h 10min 31s
Suhteellinen CPU-aika	7.329	1.684	1.068	1.000
Iteraatioita/aika-askel	1.078	1.102	1.232	1.209



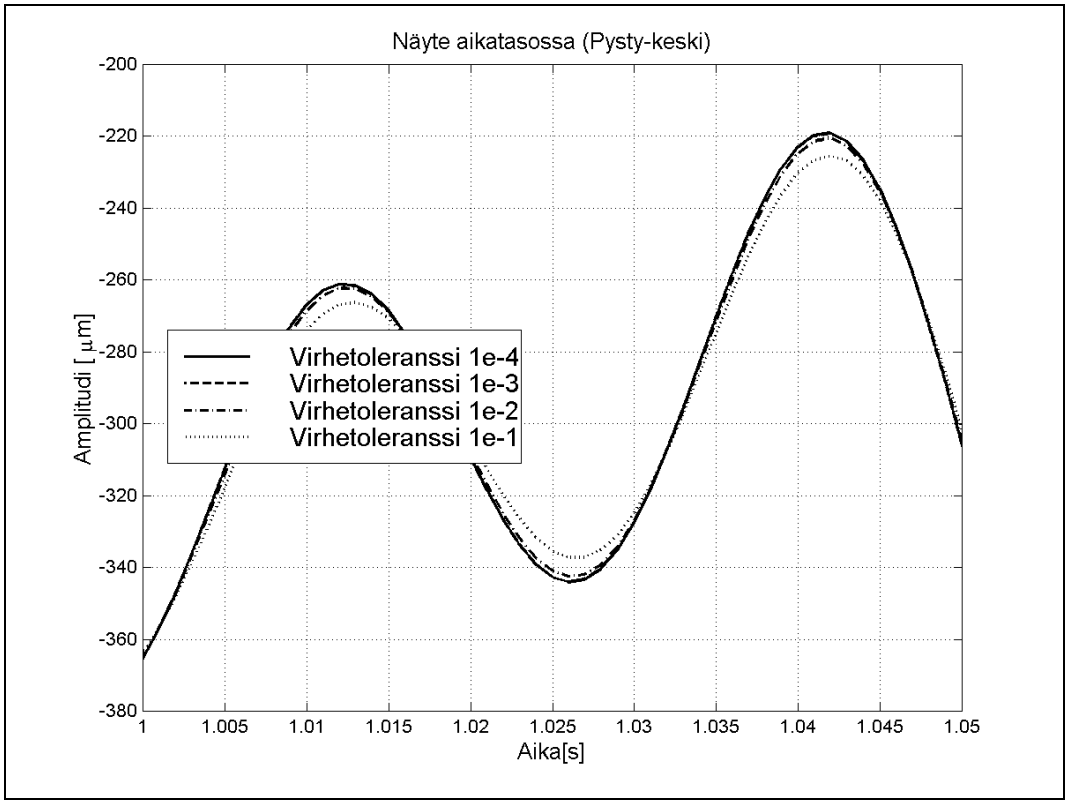
Kuva 5.8. *Keskeltä mitatun pystysuuntaisen heiton kuvaajat eri maksimi aika-askeleen pituuksilla.*

Kuvaajista nähdään, että tulokset ovat yhtenevät ja niin pitääkin olla. Integraattori iteroi tulosta niin pitkään, että asetettu virhetoleranssi saavutetaan. Laskennan tietokoneajoista on selvästi nähtävissä, että maksimiaika-askeleilla 100 μs ja 500 μs laskennan tietokoneajoissa ei ole suurta eroa. Integraattorin laskennallisesti tehokkain maksimiaika-askel on hyvin lähellä 100 μs.

Toisessa sarjassa simulointiajoja käytettiin telassa 30 normaalimuotoa ja 12 staattista korjausmuotoa ja integraattorin maksimiaika-askelta 100 μs. Integraattorin virhetoleranssia varioitiin. Laskennan tietokoneajat ovat taulukossa 5.3 ja heiton kuvaajat eri mittaustuloksissa kuvassa 5.9.

Taulukko 5.3. *Integraattorin virhetoleranssin vaikutus laskenta-aikaan.*

Integraattorin virhetoleranssi	1.0E-04	1.0E-03	1.0E-02	1.0E-01
CPU-aika	6h 40min 45s	5h 47min 50s	6h 1min 5s	4h 35min 44s
Suhteellinen CPU-aika	1.453	1.261	1.310	1.000
Iteraatioita/aika-askel	1.232	1.137	1.573	1.256



Kuva 5.9. *Keskeltä mitatun pystysuuntaisen heiton kuvaajat eri integraattorin virhetoleranssin arvoilla.*

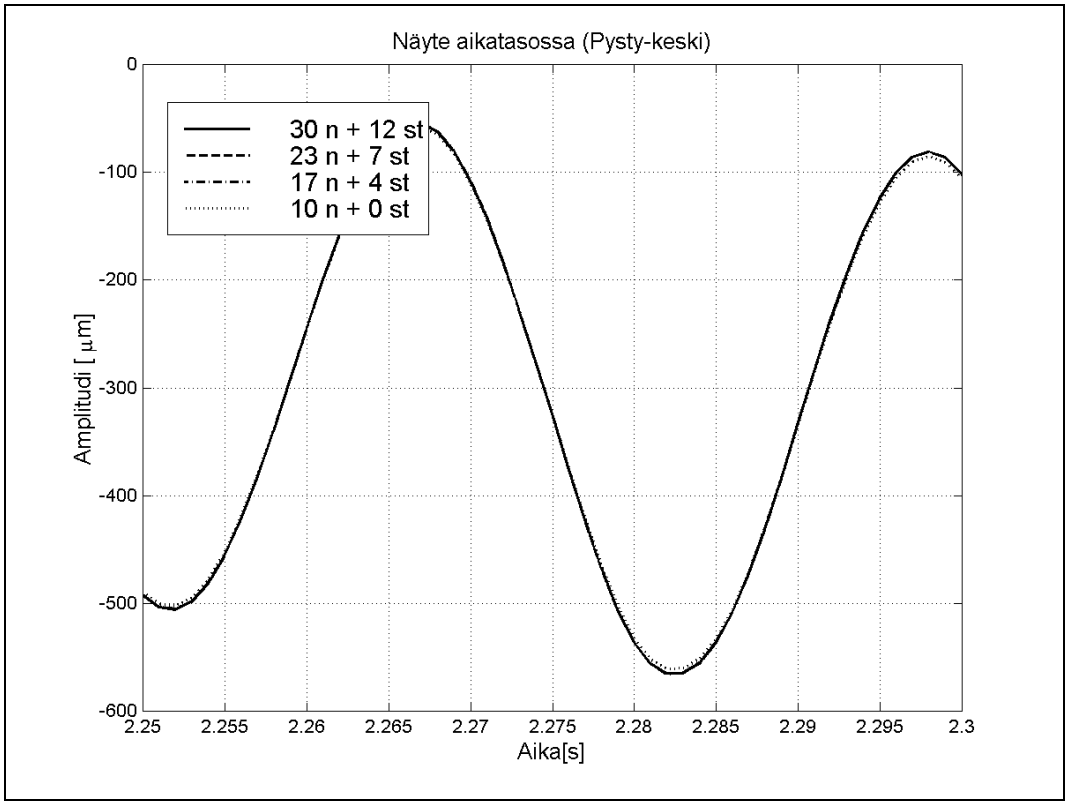
Kuvaajista ja laskenta-ajoista nähdään, että optimaalinen tulos saavutetaan integraattorin virhetoleranssilla 1e-3. Eroa virhetoleranssiin 1e-4 ei ole kuvaajasta havaittavissa. Laskenta-aika virhetoleranssilla 1e-3 on pienempi kuin virhetoleransilla 1e-2, mikä johtuu suuremmasta määrästä iteraatioita.

ADAMS laskee joustavan kappaleen kokonaisvenymäenergian yhtälöstä (3.37). Käytettäessä diagonaalista jäykkyysmatriisia voidaan yksittäisten moodien osuus

kokonaisvenymäenergiasta laskea helposti. Pilottisimuloinnin jälkeen on mahdollista poistaa kokonaisvenymäenergiaan vähän vaikuttavia moodeja käytöstä laskentatarkkuuden siitä paljoakaan kärsimättä. Pilottisimulointina käytettiin taulukon 5.2 ajoa, jossa maksimiaika-askel on 100 μs ja simulointiajot ajettiin samoilla parametreillä varioiden moodien lukumäärää. Taulukossa 5.4 on esitetty venymäenergian perusteella valittujen telan moodien lukumäärä ja sen vaikutus laskenta-aikaan. Kuvassa 5.10 on heiton kuvaajat eri simuloinneissa.

Taulukko 5.4. *Käytettävien moodien lukumäärän vaikutus laskenta-aikaan. n = normaalimuoto, st = staattinen korjausmuoto.*

Moodien venymäenergian osuus	> 0.1 %	> 0.01 %	> 0.001 %	pilottisimulointi
Moodien lkm	10 n + 0 st	17 n + 4 st	22 n + 7 st	30 n + 12 st
CPU-aika	2h 1min 20s	2h 59min 28s	5h 13min 12s	6h 35min 35s
Suhteellinen CPU-aika	1.000	1.479	2.581	3.260
Iteraatioita/aika-askel	1.874	1.235	1.190	1.232



Kuva 5.10. *Keskeltä mitatun pystysuuntaisen heiton kuvaajat. Käytettävien moodien lukumäärää on varioitu.*

Kuvaajista nähdään, että venymäenergiaan perustuva moodien valinta on tehokas keino laskenta-ajan pienentämisessä. Kuvaajat ovat lähes yhtenevät, vain simulointiajo 10:llä normaalimuodolla eroaa muista. Staattisten korjausmuotojen käyttö onkin perusteltua, jos laakeroinnista tulevat herätteet kasvavat. Laskenta-aika on lähes suoraan verrannollinen moodien lukumäärään.

6 JOHTOPÄÄTÖKSET

Työn tarkoituksena oli selvittää kaupallisen yleiskäyttöisen MBS-ohjelmiston soveltuvuus roottoridynamiikan simulointiin. Roottorin dynamiikkaa tutkittiin ADAMS -simulointiohjelmistolla. Tutkittavasta paperikoneen putkitelasta tehtiin ANSYS -ohjelmistolla FE-malli, joka siirrettiin joustavaksi mekanismin jäseneksi ADAMS:iin. Tasapainotuspukin jäykkyyttä määritettiin FE-mallilla, josta siirrettiin massaominaisuudet ADAMS:iin. Telan epäideaalisuuksista mallitettiin vaipan seinämänpaksuuden vaihtelu ja akselikaulojen ympyrämäisyysvirheet. Tulosten tarkkuutta tutkittiin todellisesta telasta tehdyillä mittauksilla.

Simulointimallilla saatiin näkyviin tutkittavan roottorin murtolukukriittiset pyörimisnopeudet. Simulointitulokset vastasivat hyvin mittaustuloksia, varsinkin kun otetaan huomioon, että tutkitut ilmiöt riippuvat hyvin pienistä reaalimaailman epäideaalisuuksista. Simulointimallista saatu telan kriittinen pyörimisnopeus vastasi 0,5 Hz:n tarkkuudella mittaustuloksia. Suurin ero simulointi- ja mittaustulosten välillä oli puolikriittisen pyörimistaajuuden resonanssihuipun amplitudissa. Virhe johtuu joko liian suuresta herätteestä tai liian pienestä vaimennuksesta. Simulointituloksien tarkkuutta voitaisiin parantaa tarkentamalla simuloinnin lähtötietoja. Telakoelaitteiston vaimennusominaisuudet voitaisiin määrittää moodianalyysillä ja telan jäykkyysvaihtelun suuruus sekä suunta voitaisiin määrittää kuormituskokeella.

Käytetty kaupallinen dynamiikansimulointiohjelmisto ADAMS soveltuu roottorin dynamiikan analysointiin. Menetelmä soveltuu roottorin dynamiikkaan vaikuttavien epäideaalisuuksien mallintamiseen. Tuotekehitykseen soveltuvaksi menetelmä voitaisiin automatisoida niin, että ensin tehtäisiin ideaalinen FE-malli roottorista ja sen jälkeen makro-ohjelma asettaisi geometrian vastaamaan mittaustuloksia. Jos roottorin geometrian mittaus on vaikea suorittaa, voitaisiin käyttää tiedossa olevia tilastollisia keskiarvoja. Yleensä käytettävän työstökoneen

tarkkuus on tiedossa. Tilastollisia keskiarvoja voitaisiin käyttää myös laakeroinnista tulevien herätteiden mallintamisessa.

Simulointimallilla voidaan tutkia ja etsiä sopivia parametrejä vaimentamaan murtolukukriittisiä värähtelyjä sekä kriittisen nopeuden ylitystä. Mallilla voidaan simuloida laakeroinnin jäykkyyden sekä vaimennusominaisuuksien muutosten vaikutusta. Myöhemmin kehitettävää aktiivivaimennuksen säätöjärjestelmää voidaan simuloida ennen sen toteuttamista. Simulointimalli on laskennallisesti raskas, mutta laskentatehon jatkuvasti kehittyessä se ei ole enää ongelma. Lisäksi oikealla muotojen valinnalla voidaan tehokkaasti pienentää laskenta-aikaa laskentatarkkuuden siitä paljoa kärsimättä.

Paperikonesovelluksissa telan kuormituksen lisääminen malliin olisi seuraava kehitysaskel. Teloihin kohdistuu aina joko nippivoima tai viirasta tai paperirainasta tuleva voima. Käytetyn menetelmän haittapuolena on, että voimia voidaan määritellä vain joustavan kappaleen solmupisteisiin. Yhdestä suunnasta vaikuttavan nippivoiman kuvaamiseksi on määriteltävä voima kehän jokaiselle solmulle ja voima on aktivoitava sen tullessa nippikontaktin kohdalle. Mallista tulee tällöin laskennallisesti raskas, eikä useiden telojen malleja voida nykyisellä laskentakapasiteetillä toteuttaa. Paperirainasta tai viirasta tuleva voima voitaisiin lisätä malliin etäisyydestä riippuvana voimana. Tällöin yhden tai kahden telan käyttäytymistä voitaisiin tutkia esimerkiksi puolikriittisellä nopeudella.

Käytetty menetelmä ei huomioi pyörimisnopeudesta johtuvaa jäykkyyden kasvamista (stress stiffening). Ilmiölle olennaista on, että värähtelymuodot säilyvät samana, mutta niiden taajuus kasvaa. Työssä saatujen tulosten perusteella tutkitun telan jäykistyminen ei ole merkittävää alikriittisillä pyörimisnopeuksilla. Kuitenkin stress stiffening –ilmiö tulisi huomioida ylikriittisillä pyörimisnopeuksilla ja esimerkiksi turbiineilla, joissa siipiin kohdistuvat keskipakovoimat ovat merkittävät. Jäykistyminen voitaisiin huomioida laskemalla moodit FEM-ohjelmistossa keskipakovoiman aiheuttaman esijännityksen vaikuttaessa roottoriin tai päivittämällä roottorin jäykkyysmatriisia simuloinnin aikana. Ensimmäisessä menetelmässä ratkaistaisiin roottorille moodit kutakin

tutkittavaa kierrosnopeutta varten. Kierrosnopeuden muuttuessa simulointi pysäytettäisiin ja moodit sisältävä tiedosto vaihdettaisiin ja jatkettaisiin simulointia. Toinen menetelmä vaatisi jäykkyysmatriisin korjaustermien analyyttistä määrittämistä, jonka jälkeen jäykkyysmatriisia voitaisiin päivittää kierrosnopeuden mukaan. Menetelmä vaatisi kuitenkin simuloinnin pysäyttämistä.

LÄHDELUETTELO

[1] ADAMS: Mechanical Dynamics, WWW-sivut. [Viitattu 16.8.1999]. Saatavissa: http://www.adams.com/mdi/product/vproto.htm.

[2] PyöriVÄRE, WWW-sivut. [Viitattu 17.8.1999]. Saatavissa: http://www.saunalahti.fi/~katmico/vare/PyoriVARE.htm

[3] Krämer, E. Dynamics of Rotors and Foundation. 1993. 384 s. ISBN 3-540-55725-3.

[4] Rao, J.S. Rotor Dynamics. 1983. 244 s. ISBN 0-852-26787-8

[5] Goodwin, M. J. Dynamics of Rotor-Bearing Systems. 1989. 281 s. ISBN 0-04-621032-6.

[6] Shabana, A. A. Computational Dynamics. 1994. 464 s. ISBN 0-471-30551-0

[7] SKF Elektroninen käsikirja, Oy SKF Ab. 1996.

[8] MATLAB, Using MATLAB. Online Help. The Math Works, Inc. 1998.

[9] Rao, S. S. Mechanical Vibrations. 1990. 718 s. ISBN 0-201-50156-2.

[10] Liu, A.Q., Liew K.M. Non-linear substructure approach for dynamic analysis of rigid-flexible multibody systems. Computer methods in applied mechanics and engineering, Vol. 114, s. 379-396, 1993. ISSN 0045-7825.

[11] Keskiniva, M. Simulation and Balancing of Flexible Rotors in Terms of Semidefinite Modal Coordinates. Doctoral Thesis. Tampere University of Technology. 1997. 125 s.

[12] Ravn, P. Analysis and Synthesis of Planar Mechanical Systems including Flexibility, Contact and Joint Clearance. Doctoral Thesis. Technical University of Denmark. 1998. 156 s.

[13] Wang, W., Kirkhope, J. Complex Component Mode Synthesis for Damped Structures. Journal of Sound and Vibration, Vol. 181, No. 5, s. 781-800, 1995. ISSN 0022-460X.

[14] Craig, R. R. Jr. Structural Dynamics. An Introduction to Computer Methods. 1981. 527 s. ISBN 0-471-04499-7.

[15] Craig, R. R., Bampton, M. C. C. Coupling of Subtructures for Dynamic Analyses. AIAA Journal, Vol. 6, No. 7, July 1968.

[16] ADAMS 9.1 Online Documentation. Mechanical Dynamics, Inc. 1998.

[17] Shabana, A. Dynamics of Multibody Systems. 1998. 372 s. ISBN 0-521-59446-4.

[18] Óttarsson, G. Modal Flexibility Method in ADAMS/FLEX. MDI Technical Paper. 1998. Saatavissa: http://support.adams.com/kb/faq.asp?ID=kb7247.dasp.

[19] ADAMS Knowledge Base, WWW-sivu, Mechanical Dynamics Inc. [viitattu 17.8.1999]. Saatavissa: http://support.adams.com/kb/faq.asp?ID=kb7118.html.

[20] von Hertzen, R., Jorkama, M. Lagrangian Approach to Spinning Asymmetrical Elastic Shafts. 5th Finnish Mechanics Days. Jyväskylä 1994, University of Jyväskylä, s. 127-134.

[21] Pullinen, Jukka ja Juhanko, Jari. Teladynamiikan mittalaite. Posteri. TKK Koneensuunnittelun laboratorio, Espoo, Otaniemi 1998.

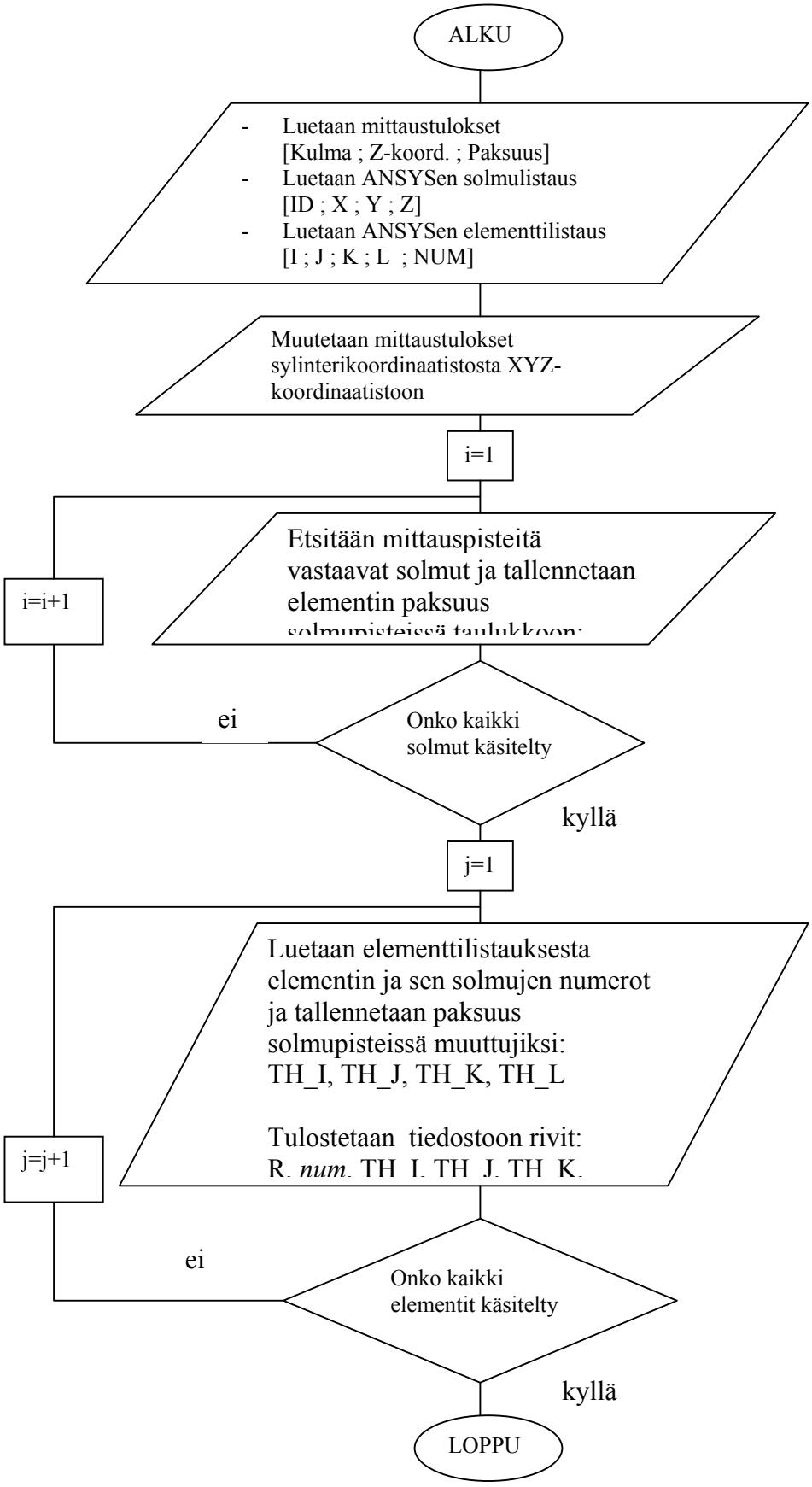
[22] ANSYS 5.4 Elements Reference. On-Line Help. SAS IP, Inc. 1998.

[23] Miekk-Oja, O. Tekniikan käsikirja 1. 1968. 592 s.

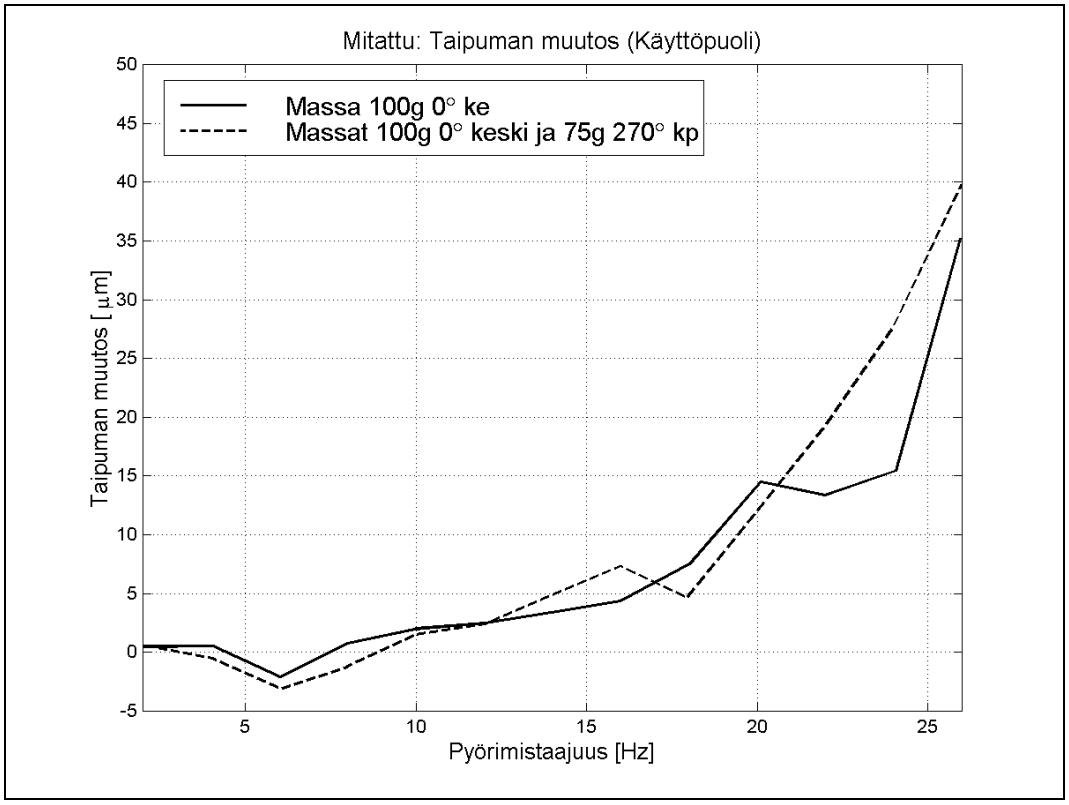
[24] Thomson, W. Theory of Vibration with Applications. 1981. 467 s. ISBN 0-04-620009-6

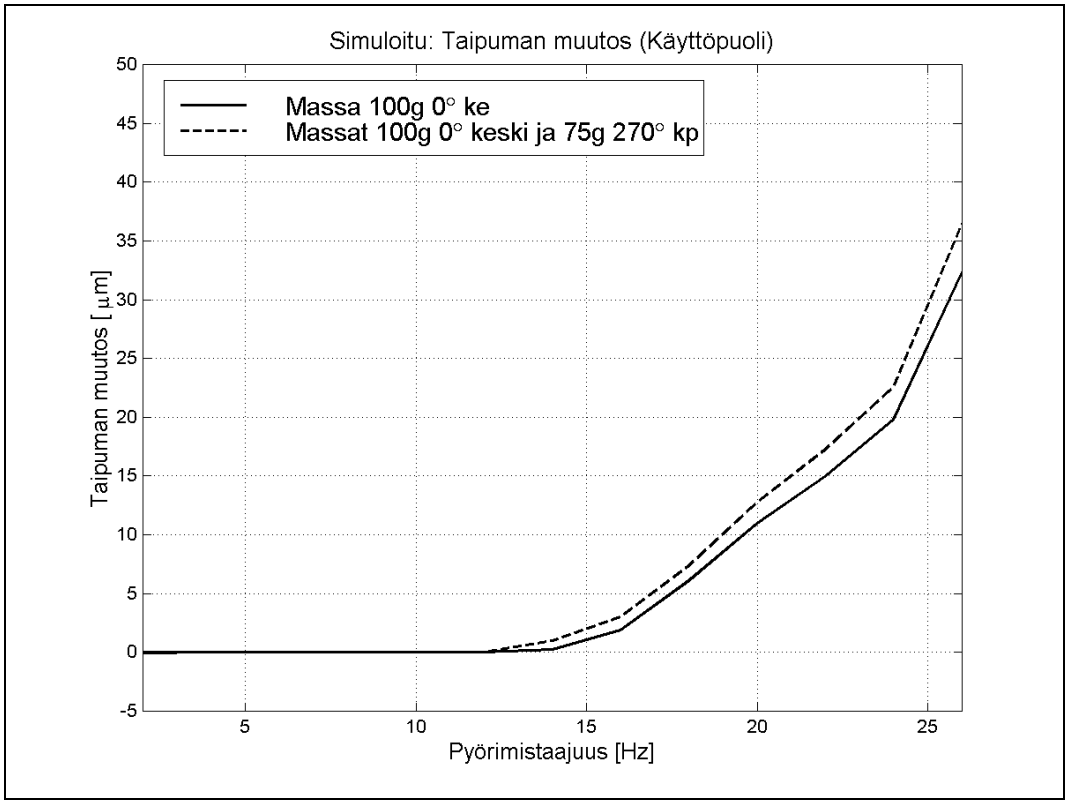
[25] Puhelin keskustelu 10.9.1999, Jari Juhanko, TKK Koneensuunnittelun laboratorio, Projektipäällikkö.

Liite 1. Vuokaavio telan vaipan seinämänpaksuuden asettamiseksi mittaustulosten mukaiseksi.



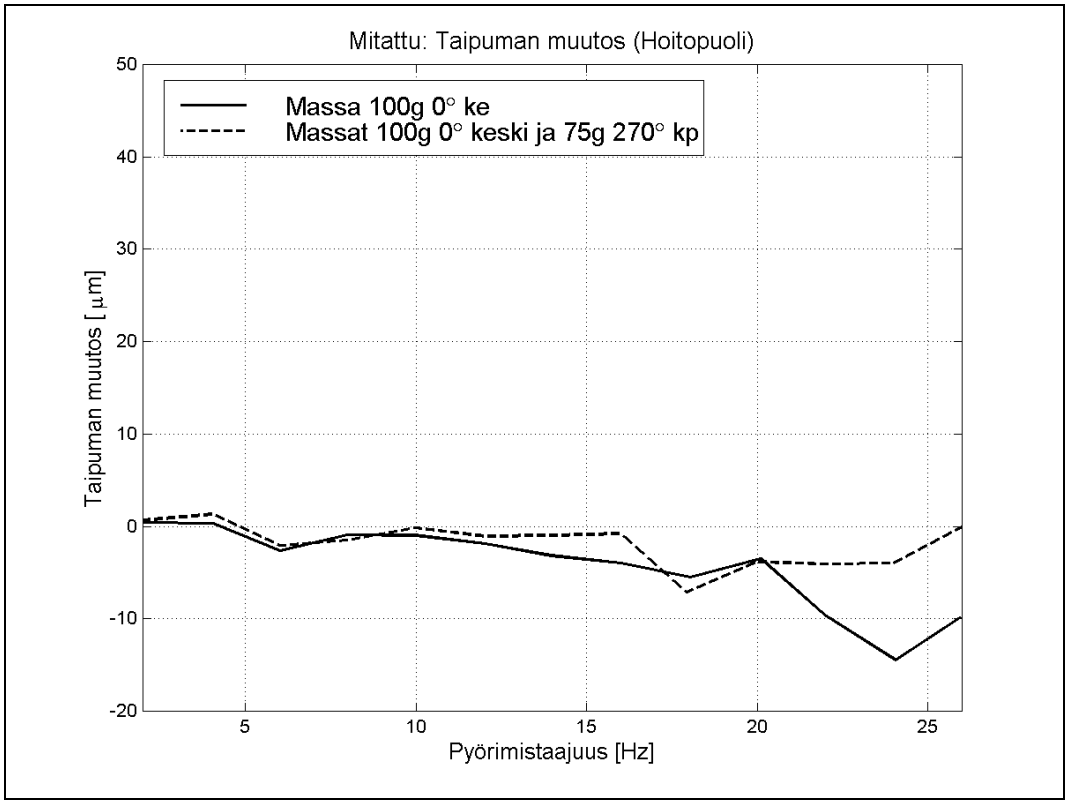
Liite 2. Käyttö- ja hoitopuolen mitatut sekä simuloidut taipuman muutokset.

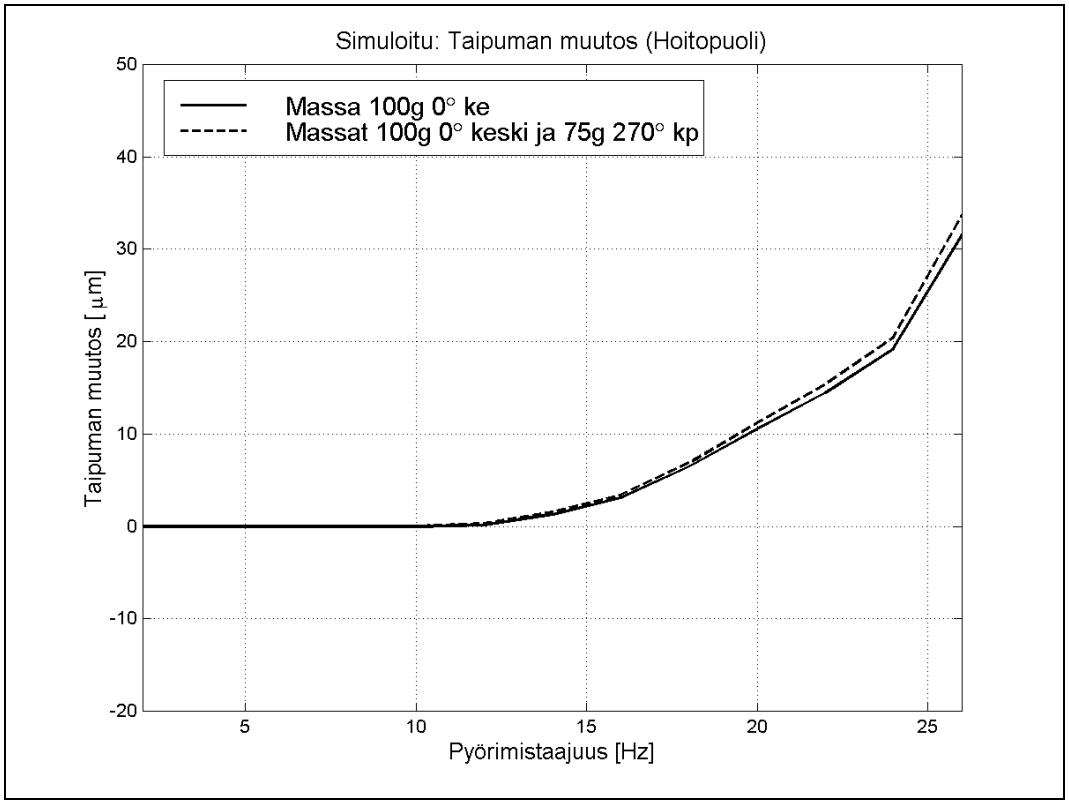




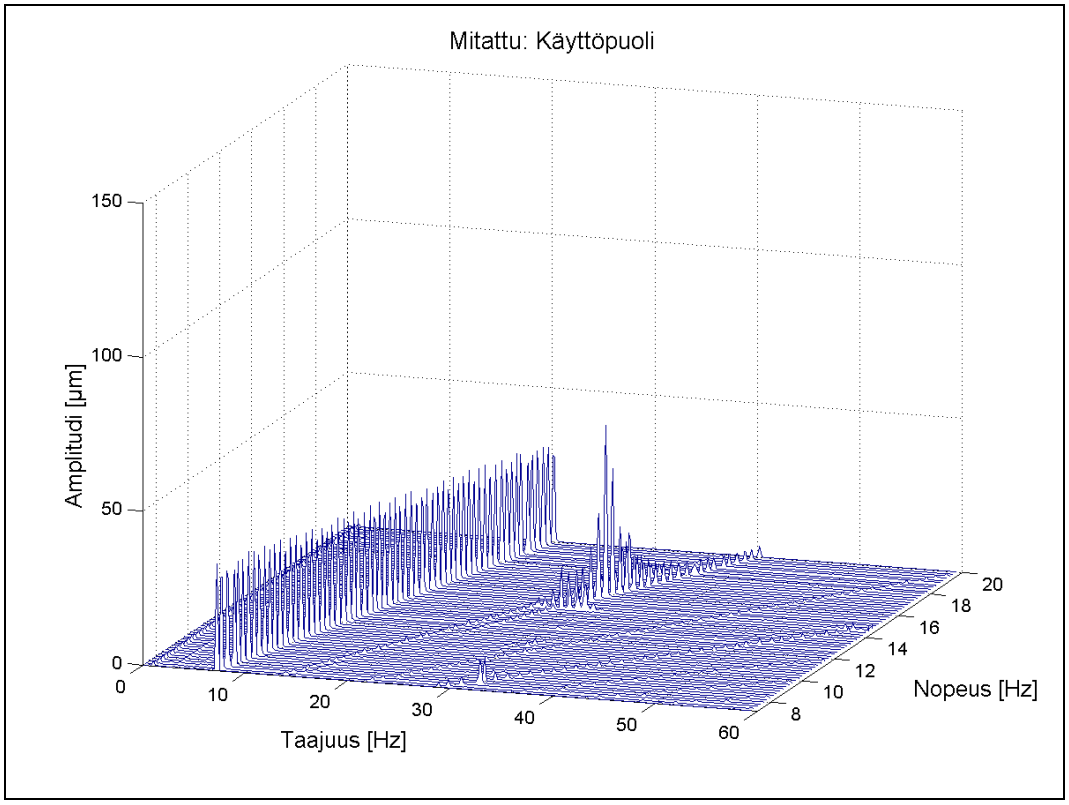
(jatkuu)

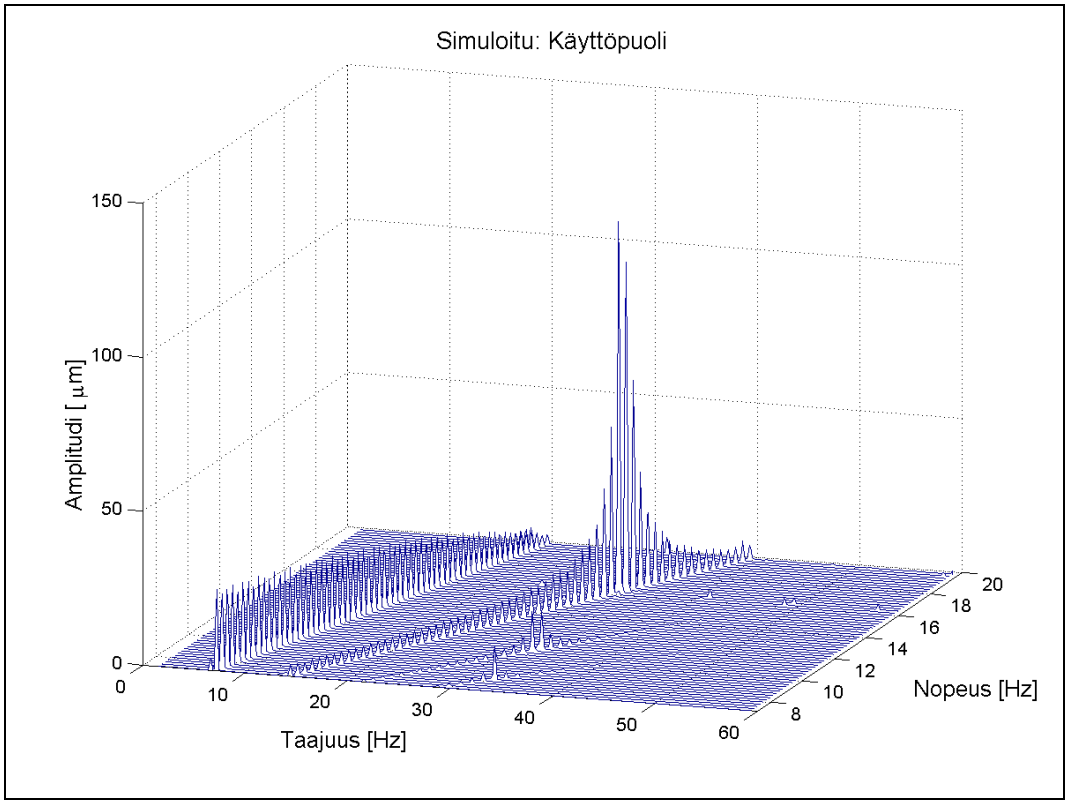
(liite 2 jatkoa)

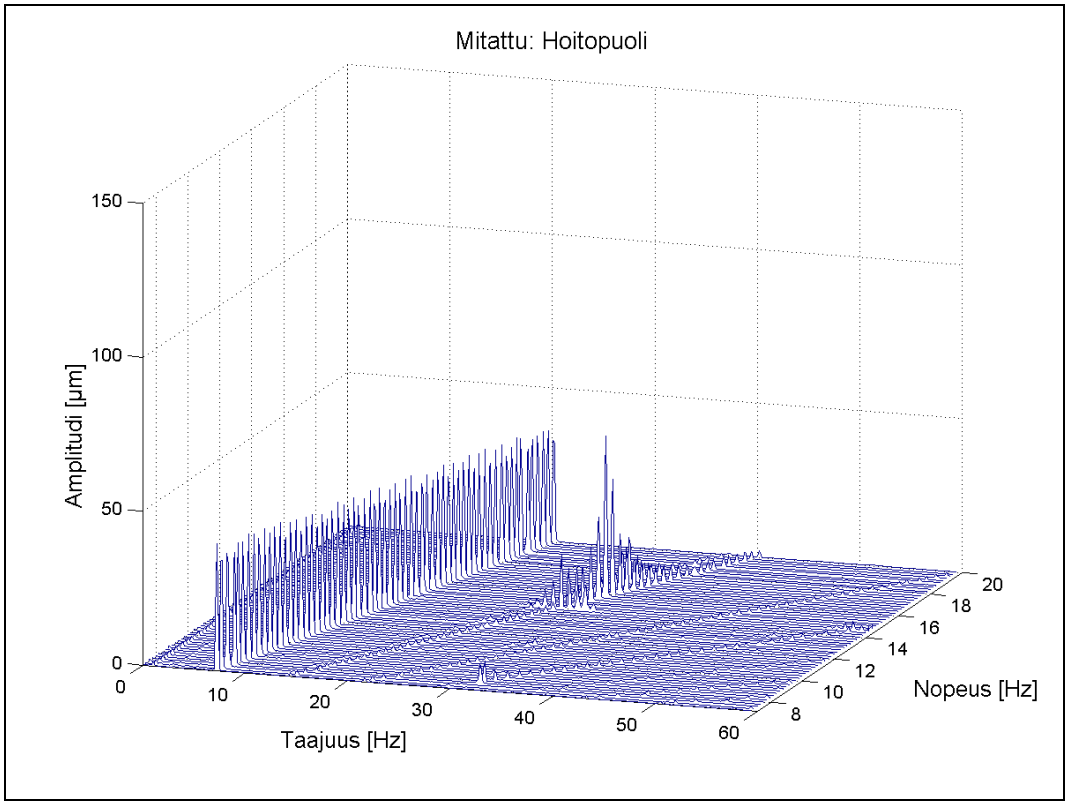
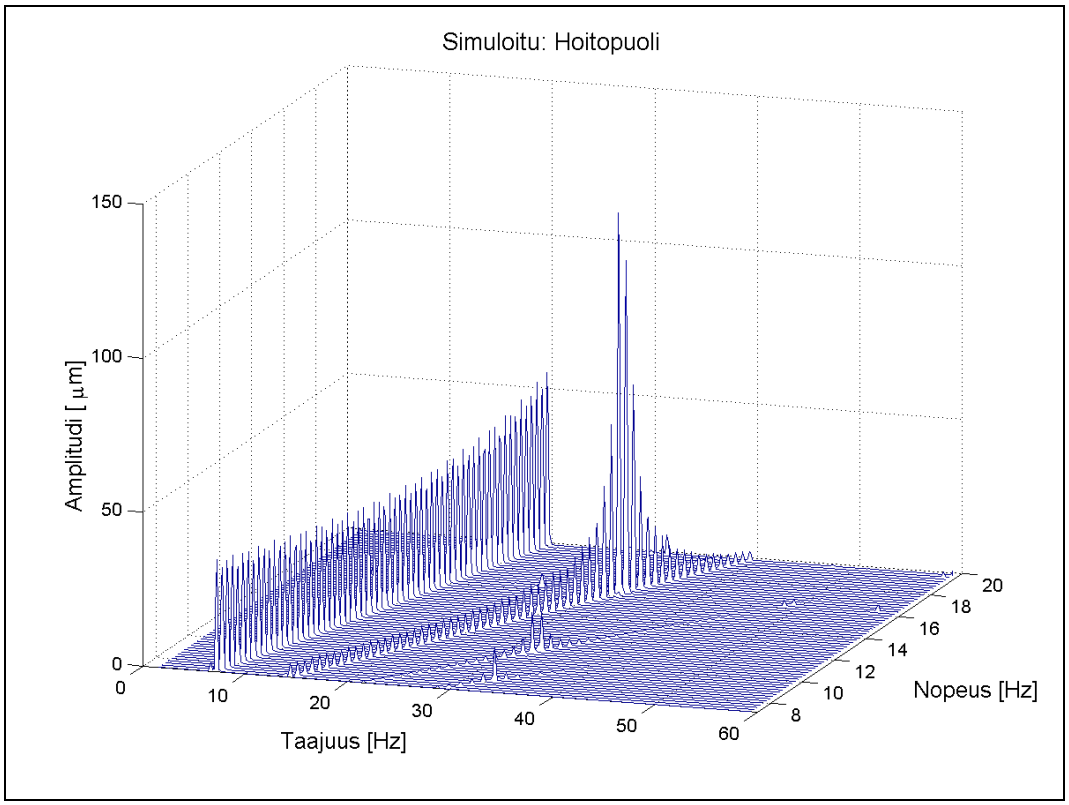




Liite 3. Käyttö- ja hoitopuolen mitatut sekä simuloidut spektrikartat.





(jatkuu)

(liite 3 jatkoa)