LAPPEENRANNAN TEKNILLINEN YLIOPISTO
LUT School of Energy Systems
LUT Kone

Jyrki Rautiainen

HAKEPERÄVAUNUN RUNGON ESIKOROTUKSEN MÄÄRITYS

Työn tarkastajat: Professori Timo Björk
DI Antti Ranta

TIIVISTELMÄ

Lappeenrannan teknillinen yliopisto
LUT School of Energy Systems
LUT Kone

Jyrki Rautiainen

Hakeperävaunun rungon esikorotuksen määrittäminen

Diplomityö

2016

50 sivua, 29 kuvaa, 12 taulukkoa ja 10 liitettä

Tarkastajat: Professori Timo Björk
DI Antti Ranta

Hakusanat: esikorotus, hakeperävaunu, konjugaattipalkkimenetelmä

Hakeperävaunun rungon esikorotuksen suuruutta laskennallisesti ei ollut aiemmin määritetty Konepaja Antti Ranta Oy:ssä. Hakeperävaunun runko on valmistettu teräksestä. Tutkimuksessa luoduilla laskentamalleilla selvitettiin viisiakselisen hakeperävaunun rungon pystysuuntainen taipuma kuormitettuna.

Tutkimus suoritettiin laskemalla hakeperävaunun pystysuuntainen siirtymä 42 tonnin ja 36 tonnin kokonaismassojen kuormituksilla hakeperävaunun rungon pituuden suhteen. Käsinlaskentamenetelmä on tässä tutkimuksessa englannin kieliseltä nimeltään conjugate beam method, suoraan käännettynä konjugaattipalkkimenetelmä. FE-analyysia sovellettiin kahdella eri laskentamallilla; käsinlaskentaa vertailevalla ja todellista hakeperävaunun runkoa vertailevilla FE-analyyseilla.

Tutkimuksessa käytettyjen eri laskentatapojen tulokset vastasivat toisiaan sekä 42 tonnin että 36 tonnin kokonaismassojen kuormituksilla. Esikorotus määritettiin 42 tonnin kokonaismassalla kuormitetun todellista hakeperävaunun runkoa vastaavan 3D-mallin pystysuuntaisesta taipumasta, josta luotiin esikorotettu hakeperävaunun rungon 3D-malli.

Tutkimuksessa kehitettyjä laskentamalleja voidaan tulevaisuudessa käyttää yrityksen tuotekehityksessä. Esikorotuksella voidaan kompensoida pystysuuntaista taipumaa, jos esikorotuksesta ei ole haittaa itse rakenteelle.

ABSTRACT

Lappeenranta University of Technology
LUT School of Energy Systems
LUT Mechanical Engineering

Jyrki Rautiainen

The determination of chip truck trailer frame precamber
Master's thesis
2016

50 pages, 29 figures, 12 tables and 10 appendices

Supervisors: Professor Timo Björk
M. Sc. (Tech.) Antti Ranta

Keywords: precamber, conjugation beam method, chip truck trailer

Deflection of the chip truck trailer frame was not determined analytically before at Konepaja Antti Ranta Ltd. The chip truck trailer frame is made of steel. Vertical deflection of the chip truck trailer frame was determined with in this paper created calculation methods.

Research was made by calculating the frame of the chip truck trailer vertical deflection analytically and numerically with loads of total masses 42 tons and 36 tons. Conjugate beam method was used in this paper. Numerically were calculated two 3D models: analytical and the actual frame of the comparative 3D model.

The results were comparable between 42 and 36 tons loads. Chip truck trailer frame precamber was created from 42 tons load deflection.

The calculations method can be used at Konepaja Antti Ranta Ltd.'s product development. Chip truck trailer frame deflection can be compensated with precamber. It is difficult to determinate shape of precamber, if there is some predetermined deflection shape under the loading.

ALKUSANAT

Haluan kiittää Antti Rantaa mahdollisuudesta tämän diplomityön tekoon ja Tuula Rantaa diplomityön kielellisen ulkoasun vinkeistä. Diplomityöni on ollut haastava ja pitkä prosessi, joten kärsivällisyydestä ja tuesta erityiskiitokset toivotan ystäville ja kotiväelle, erityisesti avovaimolleni Johannalle.

Jyrki Rautiainen
Joensuussa 1.4.2016

SISÄLLYSLUETTELO

TIIVISTELMÄ
ABSTRACT
ALKUSANAT
SISÄLLYSLUETTELO
SYMBOLI- JA LYHENNELUETTELO

1 JOHDANTO 10
2 TUTKIMUSKOHTEEN TARKASTELU 11
3 RUNGON PYSTYSUUNTAISEN TAIPUMAN SELVITYS 16
3.1 Käsinlaskenta 16
3.2 FE-analyysit 22
3.3 Esikorotus 23
4 KUORMITUKSET 25
4.1 Kuormitustavat ja voimat 25
4.2 Kuormitukset 42 ja 36 tonnia 32
4.2.1 Käsinlaskennan 42 ja 36 tonnin kuormituksen tarkastelu 34
4.2.2 FE-analyysin 42 ja 36 tonnin kuormituksen tarkastelu 34
4.3 Tuennat 36
4.3.1 Käsinlaskennan ja käsinlaskentaa vertailevan FE-analyysin tuennat 36
4.3.2 Todellisen hakeperävaunun rungon FE-analyysin tuennat 37
5 TULOKSET 39
5.1 Tulokset 42 ja 36 tonnin kuormituksilla 39
5.2 Pystysuuntaisten taipumien *L / x* -arvot 43
5.3 Hakeperävaunun rungon esikorotus 44
6 TULOSTEN ANALYSOINTI 46
7 JOHTOPÄÄTÖKSET 48
LÄHTEET 49
LIITTEET

LIITE I Hakeperävaunun 42 tonnin kokonaismassan kuormituksen vapaakappalekuva, leikkaus- ja momenttikuvaaja.

LIITE II Voimien F_1 ja F_2 laskenta 42 tonnin kokonaismassan kuormalla.

LIITE III	42 tonnin kokonaismassan kuormituksen *M / EI* -kuvaajan laskenta.
LIITE IV	*M / EI* -kuvaaja 42 tonnin kokonaismassan kuormituksella.
LIITE V	Taipumien laskenta 42 tonnin kokonaismassan kuormituksella.
LIITE VI	Hakeperävaunun 36 tonnin kokonaismassan kuormituksen vapaakappalekuva, leikkaus- ja momenttikuvaaja.
LIITE VII	Voimien F_1 ja F_2 laskenta 36 tonnin kokonaismassan kuormalla.
LIITE VIII	36 tonnin kokonaismassan kuormituksen *M / EI* -kuvaajan laskenta.
LIITE IX	*M / EI* -kuvaaja 36 tonnin kokonaismassan kuormituksella.
LIITE X	Taipumien laskenta 36 tonnin kokonaismassan kuormituksella.

SYMBOLI- JA LYHENNELUETTELO

B	Symmetrisen I-palkin kokonaisleveys [mm]
b	Symmetrisen I-palkin kokonaisleveys vähennettynä uuman paksuudella [mm]
C-C	Tarkasteltavan kappaleen vaakataso C-C
E	Kimmomoduuli [N/mm^2]
EI	Taivutusjäykkyys [Nmm^2]
F_1	Kolmiokuorman resultantti [N]
F_2	Tasaisen kuorman resultantti [N]
F_{ea}	Etutelin akselipukkiin kohdistuva tukivoima [N]
F_{ei}	Etutelin ilmapalkeeseen kohdistuva tukivoima [N]
F_k	Hakeperävaunun kokonaismassasta muodostuva kokonaiskuorma [N]
F_n	Jousituennan tavoite tukivoima [N]
F_{n+1}	Ensimmäisen iterointikierroksen jousen tavoite tukivoima [N]
F_{n+2}	Toisen iterointikierroksen jousen tavoite tukivoima [N]
F_{ta}	Takatelin akselipukkiin kohdistuva tukivoima [N]
F_{ti}	Takatelin ilmapalkeeseen kohdistuva tukivoima [N]
FE	Finite Element, äärellinen elementti
FEM	Finite element method, elementtimenetelmä
G	Liukumoduuli [N/mm^2]
g	Putoamiskiihtyvyys [m/s^2]
G_e	Etutelin akselille kohdistuva massa [kg]
$G_{etuteli}$	Etutelin massa [kg]
G_t	Takatelin akselille kohdistuva massa [kg]
$G_{takateli}$	Takatelin massa [kg]
H	Symmetrisen I-palkin kokonaiskorkeus [mm]
h	Uuman korkeus [mm]
H_{380}	Symmetrisen I-palkin kokonaiskorkeus uuman korkeudella 380 mm [mm]
h_{380}	Uuman korkeus I-palkin uuman korkeudella 380 mm [mm]
I	Taivutusjäyhyys [mm^4]
I_{150}	Taivutusjäyhyys rungon uumakorkeudella 150 mm [mm^4]
I_{380}	Taivutusjäyhyys rungon uumakorkeudella 380 mm [mm^4]
k_{jn}	Ensimmäisen iterointikierroksen jousivakio [N/mm]
k_{jn+1}	Toisen iterointikierroksen jousivakio [N/mm]

L	Rakenteen jänneväli [m]
l	Hakeperävaunun kokonaispituus [m]
l_a	Akselipukin ja akseliputken välinen etäisyys [mm]
l_i	Akseliputken ja ilmapalkeen välinen etäisyys [mm]
l_e	Hakeperävaunun etuylitys [mm]
l_k	Teliväli [mm]
l_r	Akseliväli [mm]
L_1	Konjugaattipalkkimenetelmän esimerkkilaskun palkin kokonaispituus
L / x	Taipuman vertaileva raja-arvo
M	Hakeperävaunun runkoa kuormittava taivutusmomentti [Nm]
$M_n(x)$	Momenttifunktio pisteessä x
M / EI	Konjugaattipalkkimenetelmässä taivutusmomentin suhde taivutus-jäykkyyteen
N_e	Etutelin akselin tukivoima [N]
$N_{etuteli}$	Etutelin tukivoima [N]
N_t	Takatelin akselin tukivoima [N]
$N_{takateli}$	Takatelin tukivoima [N]
o	Konjugaattipalkkimenetelmän esimerkkilaskun voiman etäisyys
r	Uuman korkeuden lähtöpiste
S_1	M / EI -kuvaajan kerroin matalamman ja korkeamman uuman suhteen
S_n	Eri uumakorkeuksien taivutusjäyhyyksien alueiden kerroin
s_n	Jousen kokoonpuristuma [mm]
s_{n+1}	Iteroitu jousen kokoonpuristuma [mm]
t_l	I-palkin laippojen yhteispaksuus
u	Konjugaattipalkkimenetelmän esimerkkilaskun voiman etäisyys
V_n	M / EI -kuvaajan yhden tarkasteltavan osan leikkausvoima [N]
V_s	M / EI -kuvaajan yhden tarkasteltavan osan leikkausvoima uumakorkeudella 150 mm [N]
W_1	Konjugaattipalkkimenetelmän esimerkkivoima [N]
W_2	Konjugaattipalkkimenetelmän esimerkkivoima [N]
w_1	Taipuma pysyvien kuormien vaikuttaessa
w_2	Taipuman pitkäaikaisosuus muuttumattomien kuormien vaikuttaessa
w_3	Taipuman lisäosuus muuttuvien kuormien vaikuttaessa
w_c	Esikorotus kuormittamattomassa rakenneosassa
w_n	Momenttifunktio
w_{tot}	Kokonaistaipuma

w_{max}	Kokonaistaipuman näkyvän osuuden taipuma esikorotus huomioon otettuna eli vaakatason C-C alapuolinen taipuma
x	Hakeperävaunun rungon tarkasteltavan pisteen etäisyys hakeperävaunun pisteestä A
x_0	Taivutussäteen ympyrän kaaren lähtöpiste
x_n	Hakeperävaunun rungon tarkasteltavan pisteen paikka rungon etupäästä
y	Ympyrän kaaren tarkastelu piste
y_n	Ympyrän kaaren keskipiste
v	Taipuma
x_{bar}	Yhden segmentin *M / EI* -kuvaajan painopisteen eli leikkausvoiman painopiste

1 JOHDANTO

Tutkimuksessa selvitetään numeerisesti LIPE-tuotemerkin hakeperävaunun rungon pystysuuntainen siirtymä kahdella eri kuormituksella. Pystysuuntaisesta siirtymästä voidaan laskea tarvittava esikorotus hakeperävaunun rungolle. LIPE-hakeperävaunun runko on tehty teräksestä. LIPE-tuotemerkin hakeperävaunussa käytetään esikorotusta rungon taipuman hallitsemiseen. Esikorotus on ennen tätä tutkimusta määritetty empiirisesti.

Hakeperävaunun kuljetuskapasiteetin täytyisi olla mahdollisimman suuri, koska erilaisilla asetuksilla ja laeilla rajoitetaan kuljetuskaluston kokoa ja kokonaismassaa. Kuljetuskaluston omamassan on oltava myös mahdollisimman pieni, jotta hyötykuorma olisi mahdollisimman suuri. Hyötykuorma on sama kuin kuljetettava tavara. Hakekorin tilavuus olisi oltava myös mahdollisimman suuri, koska hyötykuorman tiheys voi olla pieni.

Tutkimuksella pyritään kehittämään käsinlaskentamalli sekä FE-analyysiin, äärellisiin elementteihin, perustuva laskentamalli hakeperävaunun rungon taipuman selvittämiseksi. Laskentamalleilla pystyttäisiin tarkastelemaan rungon taipuma nopeasti erilaisilla kuormitusmuodoilla sekä perävaunun rungon poikkileikkauksilla. Laskentamalleja voitaisiin käyttää hyödyksi tuotekehityksessä Konepaja Antti Ranta Oy:ssä, joka valmistaa LIPE-tuotemerkin hakeperävaunuja ja -koreja sivukaato- ja ketjupurkutoimilaitteilla toteutettuna Liperin Ylämyllyllä.

Tutkimuksessa luodaan laskentamallit hakeperävaunun rungon pystysuuntaisen taipuman selvittämiseen perävaunun rungon pituuden funktiona. Numeerisesti lasketusta taipumaviivasta määritetään hakeperävaunun rungolle esikorotus, josta peilaamalla vaakasuoran tason suhteen saadaan hakeperävaunun rungolle esikorotettu muoto. Tätä hakeperävaunun esikorotettua muotoa kuormitetaan samalla kuormalla, millä esikorotettu muoto saatiin. Tuloksien avulla hakeperävaunun taipumiskäyttäytymistä voidaan kontrolloida perävaunun valmistuksessa ja sen käytönaikaisessa toiminnassa.

Tutkimuksen alussa perehdytään tutkimusaiheen rajoituksiin lakien ja käytännön rajoitteiden kautta. Teoriaosuuden jälkeen perehdytään hakeperävaunun kuormituksiin ja tuentoihin. Lopuksi tarkastellaan tutkimuksen tuloksia ja niiden tuomia etuja hakeperävaunun valmistuksessa ja käytössä.

2 TUTKIMUSKOHTEEN TARKASTELU

Perävaunu on auton perässä vedettävä tavaran kuljetukseen tarkoitettu hinattava ajoneuvo, jotka jaetaan O1 – O4 luokkiin (L 1090/2002, 17§). Työssä tarkasteltava hakeperävaunu kuuluu ajoneuvoluokkaan O4. Ajoneuvoluokassa O4 perävaunun kokonaismassa on yli 10 tonnia (L 1090/2002, 17§). Hakeperävaunulla kuljetetaan muun muassa haketta ja turvetta. Hakekorin kattona on hydraulisesti toimiva pressukate, joka käännetään hakekorin päältä korin sivulle hakkeen tai turpeen lastauksen ajaksi. Pressukate koostuu rautakehikkoon kiinnitetystä kestopeitteestä.

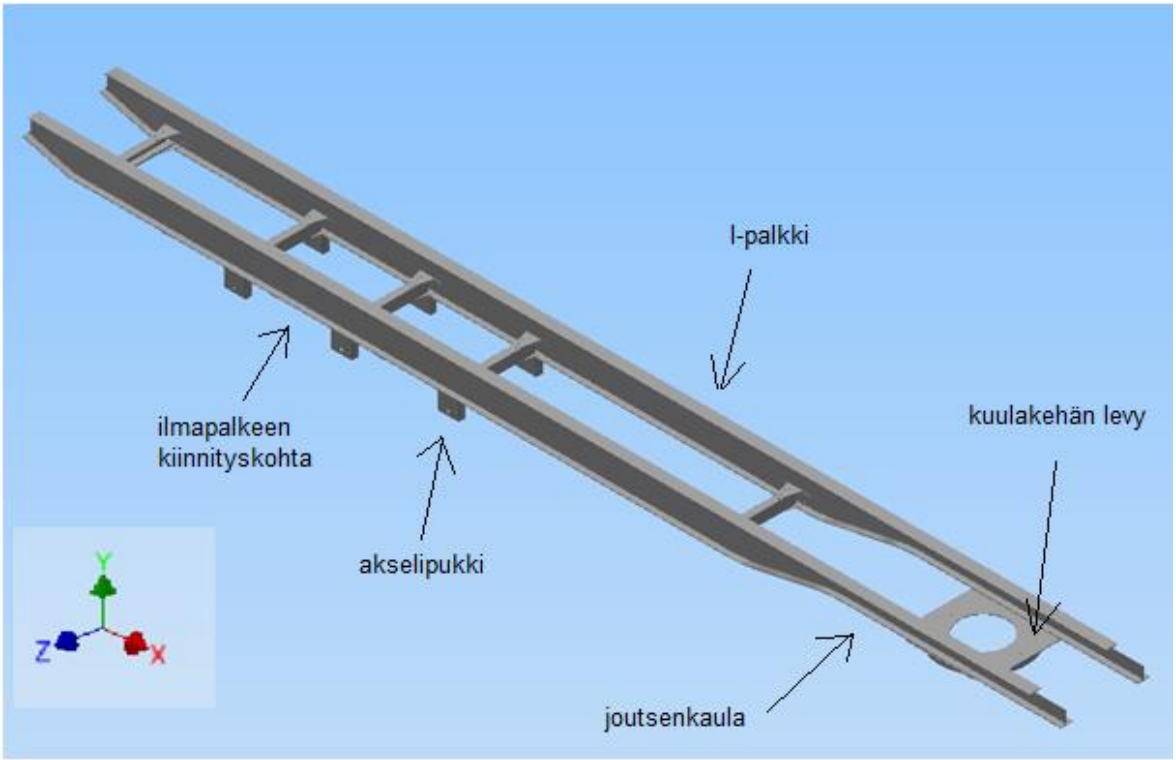
Varsinaisessa perävaunussa etuakselistoa eli etuteliä ohjaa vetolaite, joka ei välitä vetävään ajoneuvoon pystysuuntaisia voimia. Vetolaite eli vetoaisa on perävaunuun nähden nivelöity pystysuunnassa liikkuvaksi. (A 1248/2002, 11§.)

Kerroslevyrakenteella valmistetut seinä- ja pohjaelementit muodostavat hakekorin. Hakekori liimataan varsinaisen perävaunun runkopalkkien päälle, mutta tässä työssä hakekoria ja sen jäykistävää vaikutusta hakeperävaunun runkoon ei oteta huomioon. Runkopalkit ovat hitsattuja I-profiileja, jotka on kiinnitetty sideliitoksilla toisiinsa. Sideliitosten vaikutusta ei oteta huomioon hakeperävaunun rungon taipuman määrittämisessä muuten kuin todellista hakeperävaunua kuvaavassa elementtimallissa etuvaunun symmetrian osalta.

Kuvassa 1 on esitetty tutkimuksessa tarkasteltavan 13,6 metriä pitkän hakeperävaunun kori, vetoaisa, etuakselisto eli etuteli ja taka-akselisto eli takateli. Etutelistä käytetään myös termiä etuvaunu.

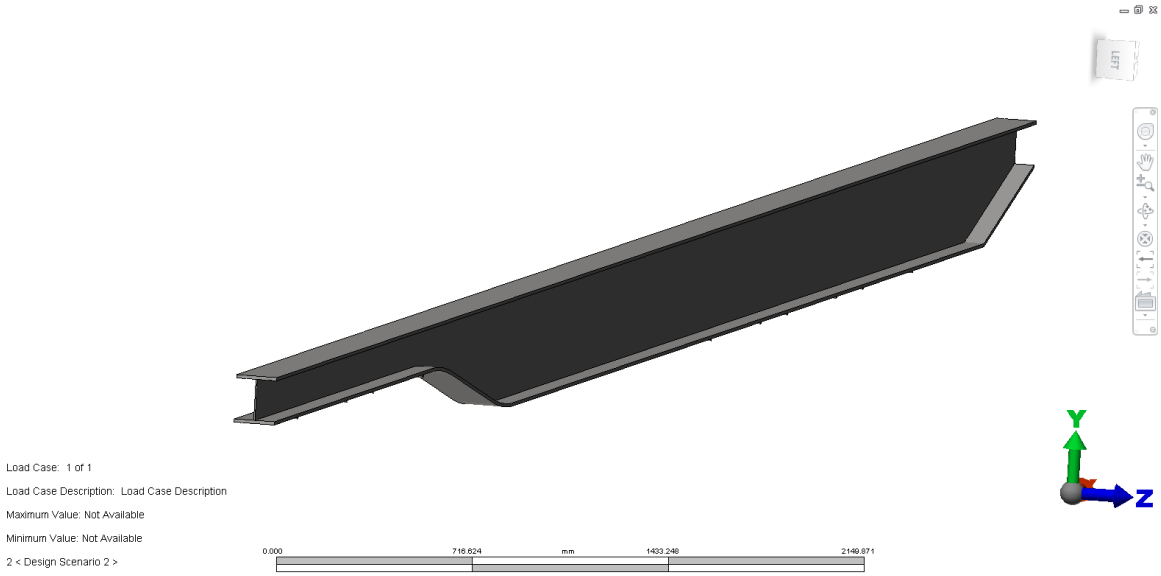
Kuva 1. Viisiakselinen varsinainen hakeperävaunu

Kuvassa 2 on mallinnettu hakeperävaunun runko ilman etuvaunua. Kuulakehän levyn, akselipukkien ja ilmapalkeiden vaikutus rungon taipumaan, joka kuvassa 2 on y-akselin suuntainen taipuma eli pystysuuntainen siirtymä, on otettu huomioon vain todellista hakeperävaunun runkoa vastaavassa FE-analyysissa. Kuvassa 2 on esitetty työssä tarkasteltavan hakeperävaunun rungon 3D-malli.



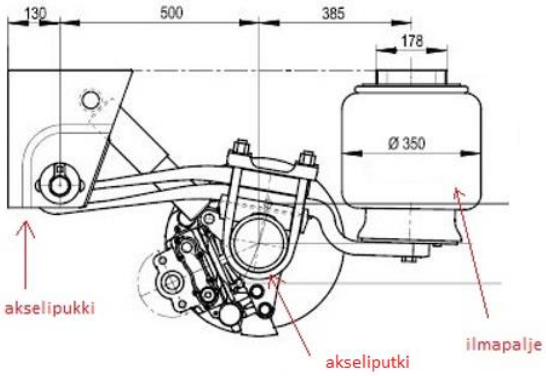
Kuva 2. Hakeperävaunun runko.

Kuvassa 3 on esitetty käsinlaskennassa ja käsinlaskentaa vertailevassa FE-analyysissa käytettävän hakeperävaunun rungon 3D-malli. Hakeperävaunun rungon I-palkkien taivutusjäyhyys *I* on vaihteleva rungon pituuden *l* suhteen.



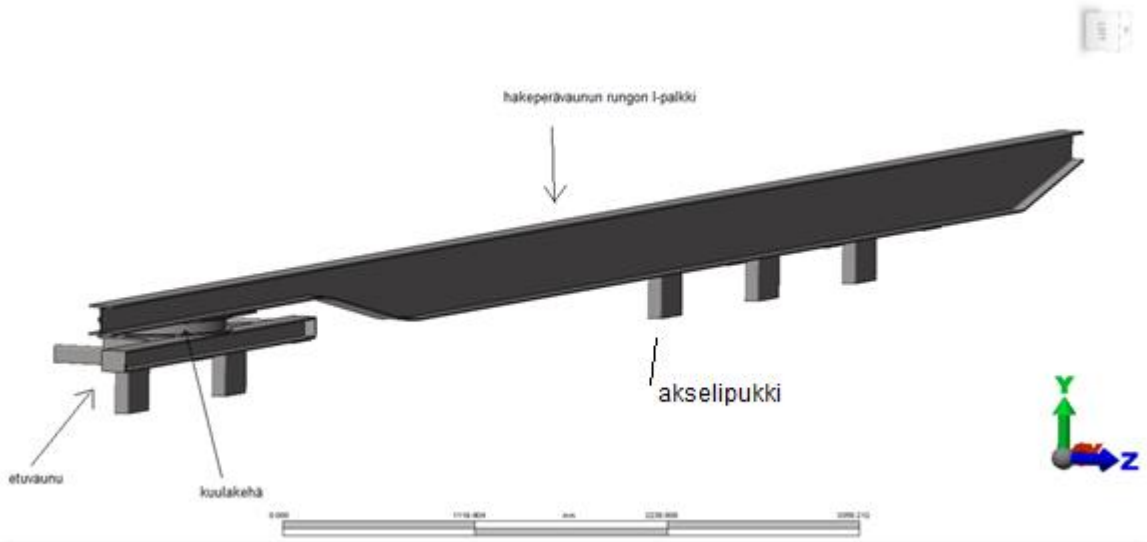
Kuva 3. Käsinlaskentaa kuvaava hakeperävaunun rungon 3D-malli.

Kuvassa 4 on esitetty akseliston rakenne, johon kuuluvat akselipukki, akseliputki ja ilmapalje. Tutkimuksessa puhutaan akselille kohdistuvasta massasta, joka välittyy akseliputken päihin kiinnitettyjen renkaiden kautta tiehen. Akseleille kohdistuvat massat voidaan punnita raskaan kaluston ajoneuvovaa'alla (Wireless wheel and axle weighing platforms, s.1). Perävaunu oletetaan punnittavan akselikohtaisesti tässä tutkimuksessa.



Kuva 4. Akseliston rakenne ja mitat (Design manual modul 2010, s. 20).

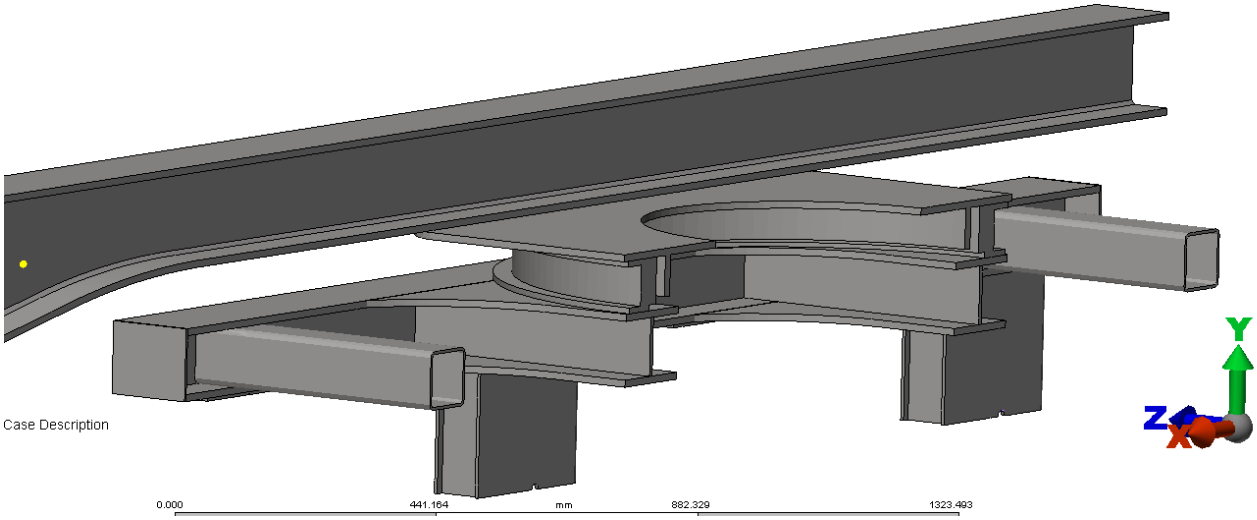
Kuvassa 5 on esitetty laskennassa käytettävää todellista hakeperävaunun runkoa vastaava 3D-malli.



Kuva 5. Todellista runkoa kuvaava 3D-malli.

Kuvista 5 ja 3 vertailemalla nähdään voimien välittymisen eroavaisuudet todellisen rungon FE-analyysin ja käsinlaskentamallin välillä. Kuvassa 3 voimat vaikuttavat suoraan hakeperävaunun rungon I-palkin laippoihin, kun kuvassa 5 voimat välittyvät etuvaunun akselipukkien ja ilmapalkeiden kautta hakeperävaunun rungon I-palkkiin. Etuvaunu on kiinnitetty

hakeperävaunun I-runkopalkkeihin kuulakehän avulla. Kuulakehä välittää kuulakehän levyn kautta etutelin eli etuvaunuakselien akselimassojen tukivoimat hakeperävaunun I-runkopalkeille. Kuvassa 6 on etuvaunu esitetty toisesta kuvakulmasta sekä kuvattu FEM-mallissa, elementtimenetelmässä, käytettyä symmetriaa.



Kuva 6. Todellista runkoa kuvaavassa FEM-mallissa on käytetty symmetriaa hyväksi z-akselin suhteen

Uuman korkeus I-profiilissa vaihtuu 150 millimetristä 380 millimetriin hakeperävaunun rungon pituuden *l* matkalla. Matalampaa uumakorkeuden aluetta kutsutaan joutsenkaulaksi (Ranta, 2014). Matalammalla uuman korkeudella saadaan hakeperävaunun kontin tilavuus suuremmaksi. Asetus ajoneuvojen käytöstä tiellä rajoittaa perävaunun suurinta sallittua korkeutta 4,4 metriin (A 1257/1992, 25§).

Työn tavoitteena on rakentaa laskentamallit, jotta tuotekehitystä voidaan viedä eteenpäin kokonaisvaltaisemmin. Tutkimuksen tuloksia verrataan standardin SFS-EN 1993-1-1: 2005 kansallisen liitteen 9 taipuman raja-arvoihin (Kansallinen liite standardiin SFS-EN 1993-1-1: 2005, Liite 9, s. 5).

Käsinlaskenta suoritettiin Mathcad Prime 2.0 - ja SkyCiv Beam -ohjelmalla. Jousien jousivakioiden iterointi tehtiin Excel 2013 -ohjelmalla. Hakeperävaunun 3D-malli luotiin Autodesk Inventor 2015 -ohjelmalla ja FE-analyysit suoritettiin Autodesk Simulation Mechanical 2015 -ohjelmalla.

3 RUNGON PYSTYSUUNTAISEN TAIPUMAN SELVITYS

Käsinlaskennan ja käsinlaskentaa vertailevan FE-analyysin laskelmissa käytettävät rungot ovat geometrialtaan samanlaiset, mutta niiden laskutavat ovat erilaisia. Todellista hakeperävaunun runkoa vastaava FE-analyysi on tieliikennekäytössä olevan hakeperävaunun runkomalli, johon asetetaan sama kuormitus kuin käsinlaskennassa ja käsinlaskentaa vertailevassa FE-analyysissa. Todellista runkoa vertailevan FE-analyysin tuenta tehdään tukijousilla, joiden jousivakio määritetään akselikohtaisesti iteroimalla FE-analyysin tuloksista. Tulos on vertaileva todelliseen tilanteeseen hakeperävaunun käyttäytymisessä lastattuna. Näitä kolmea eri tulosta vertaillaan keskenään.

Rungon taipumaa selvitetään ensin käsinlaskentamallilla, jonka jälkeen tehdään käsinlaskentaa vertaileva FE-analyysi. Viimeiseksi tehdään todellista runkoa vertaileva FE-analyysi. Todellista hakeperävaunun runkoa vertailevassa FEM-mallissa on laskennassa mukana etuvaunu, johon etutelin akselit on kiinnitetty. Käsinlaskennassa ja käsinlaskentaa vertailevassa FE-analyysissa laskennassa käsitellään vain hakeperävaunun runkopalkkia. Etutelin akseleista johtuvat voimat on kiinnitetty samoille kohdille pitkin runkopalkkia kuin todellista runkoa vertailevassa FE-analyysissa.

Työssä tarkastellaan vain hakeperävaunun pystysuuntaista taipumaa. Työssä hakeperävaunun rungon materiaali on teräs, jonka kimmomoduuli E on 210 GPa ja liukumoduuli G on 78500 MPa.

3.1 Käsinlaskenta

Käsinlaskennalla pyritään selvittämään hakeperävaunun rungon taipuman teoreettinen käyttäytyminen. Käsinlaskennalla pyritään löytämään keinot, joiden avulla pystytään tarkastamaan rungon taipumiskäyttäytyminen ennalta määrätyllä kuormituksella ja rungon profiililla. Käsinlaskennalla voidaan kokeilla erilaisia runkoprofiileja ja tarkastella niiden yksityiskohtien vaikutuksia kokonaistaipumaan. Tällöin voidaan tarkastella uudenlaisia runkoprofiileja nopeasti ja vertailla tuloksia keskenään.

Käsinlaskennassa pystysuuntaisen taipuman laskentamenetelmänä tässä tutkimuksessa on, englannin kieliseltä nimeltään *conjugate beam method*, suoraan käännettynä konjugaattipalkkimenetelmä. Konjugaattipalkkimenetelmä on kätevä laskettaessa palkin taipumaa, kun taivutusjäykkyys EI ei ole palkissa yhtenäinen. Konjugaattipalkkimenetelmän

kehitti H. Müller-Breslau vuonna 1865. (Hibbeler, 2006, s. 314.) Konjugaattipalkkimenetelmä perustuu momenttipintamenetelmän laajennukseen, joka taas perustuu Euler-Bernoullin palkkiteorian integrointiin (Prakash, 1997, s. 71). Tutkimuksessa käytetään menetelmää ennalta määritettyjen hakeperävaunun rungon kohtien pystysuuntaisen taipuman määrittämiseen.

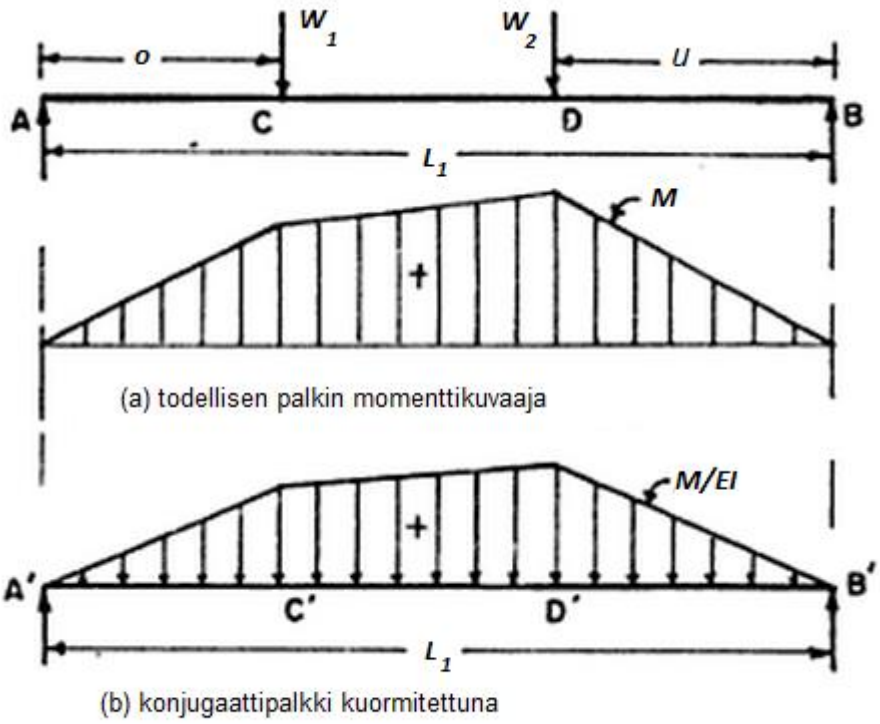
Konjugaattipalkki on kuviteltu sekundäärinen palkki, jonka kuormitus on samansuuruinen kuin todellisen palkin *M / EI* -kuvaaja. *M* on hakeperävaunun runkoa kuormittava momentti. Konjugaattipalkki on kuvaus todellisesta palkista, mutta tuentaehdot muuttuvat niin, että konjugaatipalkki täyttää sille asetetut reunaehdot.
(Punmia et al., 2002, s. 523.)

Konjugaattipalkki ei ole kuormitettu todellisella kuormalla vaan kimmoisella kuormalla *M / EI*, joka kuvaa taivutusmomentin suhdetta palkin taivutusjäykkyyteen. *M / EI* -kuvaaja on verrattavissa todellisiin kuormituksiin. Konjugaattipalkin leikkausjännitys missä tahansa pisteessä antaa todellisen palkin kiertymän. Konjugaattipalkin taivutusmomentti määrätyssä pisteessä puolestaan antaa todellisen palkin taipuman samassa pisteessä. (Punmia et al., 2002, s. 524.)

Kuvassa 7 on esitetty yksinkertaisesti tuettu palkki. Kuvan 7 kohdassa a on yksinkertaisesti tuetulle palkille laskettu momenttikuvaaja. Kohdassa *u* on konjugaattipalkki A'B', jossa kuormitus on sama kuin todellisen palkin *M / EI* -kuvaaja. Konjugaattipalkki on myös tuettu tukivoimilla kohdissa A' ja B' *M / EI* -kuvaajan mukaisen kuormituksen lisäksi, koska taivutusmomentin on oltava nolla konjugaattipalkissa tuentojen kohdalla, jotta taipuma *v* todellisessa palkissa on nolla tukien kohdalla. (Punmia et al., 2002, s. 525.)

Kuvassa 7 W_1 ja W_2 on konjugaattipalkkimenetelmän esimerkkivoimia, *o* on konjugaattipalkin esimerkkivoiman etäisyys pisteestä A, *u* on konjugaattipalkkimenetelmän esimerkkivoiman etäisyys pisteestä B, L_1 on konjugaattipalkkimenetelmän esimerkkilaskun palkin pituus.

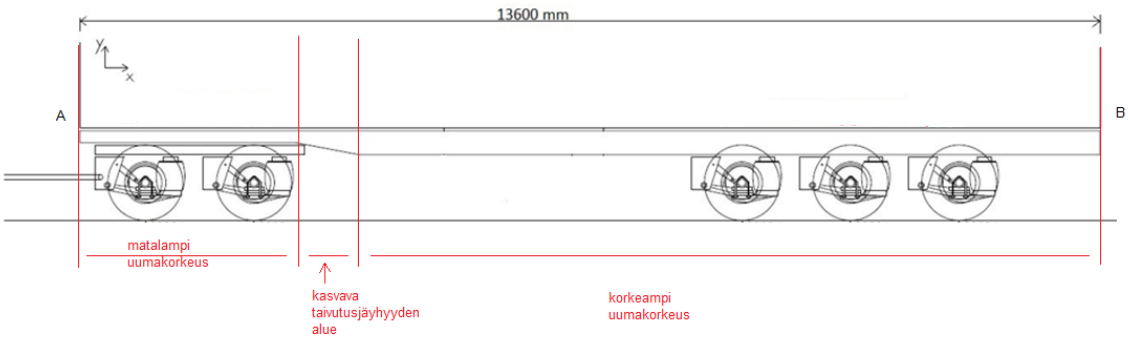
Työssä lasketaan konjugaattipalkkimenetelmällä hakeperävaunun rungon pystysuuntainen taipuma. Konjugaattipalkkimenetelmän yhtenä vaiheena on laskea hakeperävaunun rungon *M / EI* -kuvaaja rungon pituuden funktiona.



Kuva 7. Konjugaattipalkkimenetelmän laskentaperiaate (muokattu Punmia et al., 2002, s. 525).

Konjugaattipalkkimenetelmässä momentti on suhteellisesti sama pitkin runkopalkkia. Vaihtuva runkopalkin taivutusjäykkyys otetaan huomioon kertoimella, joka on suhteutettu korkeamman uumakorkeuden suhteen.

Työssä lasketaan *M / EI* -kuvaaja hakeperävaunun pisteiden A ja B väliltä eli 13,6 metrin pituudelta. Kuvassa 8 piste A on hakeperävaunun etupää eli etäisyys 0 metriä hakeperävaunun etupäästä ja piste B on hakeperävaunun takapää eli etäisyys 13,6 metriä hakeperävaunun etupäästä. *M / EI* -kuvaajaan vaikuttaa kuormitusta vastaava momenttikuvaaja ja hakeperävaunun rungon uumakorkeuden vaihtelusta johtuva hakeperävaunun runkopalkin vaihteleva taivutusjäykkyys. *M / EI* -kuvaajassa hakeperävaunun runkopalkin tuentapisteet ovat kohdissa A ja B. Kuvassa 8 on esitetty myös hakeperävaunun rungon taivutusjäyhyyden eri alueet.



Kuva 8. Hakeperävaunun rungon taivutusjäyhyyden eri alueet.

Hakeperävaunun momenttikuvaaja jaetaan eri momenttifunktioiden alueisiin ja kustakin momenttifunktion alueesta lasketaan *M / EI* -kuvaajan määrittelemä pinta-ala eli momenttifunktion kunkin alueen leikkausvoima. *M / EI* -kuvaajan leikkausvoima V_n lasketaan korkeamman uumakorkeuden alueella (Punmia, 2002, s.524).

$$V_n = \int w_n(x)dx = \int \frac{M}{EI} dx \tag{1}$$

Yhtälössä 1 *M* on momentti ja *EI* on taivutusjäykkyys yhden momenttifunktion alueella.

Matalamman ja korkeamman uumakorkeuden taivutusjäyhyyden kerroin S_1 lasketaan seuraavasti.

$$S_1 = \frac{I_{380}}{I_{150}} \tag{2}$$

Yhtälössä 2 I_{150} on hakeperävaunun rungon taivutusjäyhyys matalalla uuman korkeudella ja I_{380} on taivutusjäyhyys hakeperävaunun rungon korkealla uuman korkeudella.

M / EI -kuvaajan leikkausvoima V_s lasketaan matalamman uumakorkeuden alueella.

$$V_s = S_1 * \int w_n(x)\, dx \tag{3}$$

Yhtälössä 3 $w_n(x)$ on momenttifunktio.

Kaksoissymmetrisen I-palkin taivutusjäyhyys *I* lasketaan seuraavasti (Valtanen, 2013, s. 314).

$$I = \frac{BH^3 - bh^3}{12} \tag{4}$$

Yhtälössä 4 *B* on symmetrisen I-palkin kokonaisleveys, *H* on symmetrisen I-palkin kokonaiskorkeus, *b* on symmetrisen I-palkin kokonaiskorkeuskorkeus vähennettynä laippojen paksuudet ja *h* on symmetrisen I-palkin kokonaisleveys vähennettynä uuman paksuus.

Vaihtuvan uumakorkeuden alueella *M / EI* -kerroin S_n kohdassa x_n lasketaan seuraavasti.

$$S_n(x_n) = \frac{I_{380}}{I(x_n)} \tag{5}$$

Yhtälössä 5 S_n on matalamman ja korkeamman uumakorkeuden taivutusjäyhyyden kerroin pisteessä x_n kuvan 8 matalamman uuman korkeuden alueelta siirryttäessä kasvavan taivutusjäyhyyden alueelle.

Vaihtuvan uumakorkeuden alueella *M / EI* -kertoimen S_n laskenta on avattu yhtälön 4 avulla seuraavasti.

$$S_n(x_n) = \frac{\frac{BH_{380}{}^3 - bh_{380}{}^3}{12}}{\frac{BH(x_n)^3 - bh(x_n)^3}{12}} \tag{6}$$

Yhtälössä 6 H_{380} on symmetrisen I-palkin kokonaiskorkeus uuman korkeudella 380 mm ja h_{380} on symmetrisen I-palkin kokonaiskorkeus vähennettynä laippojen paksuudella. Näihin arvoihin verrataan kohdassa x_n tarkasteltavaa uumakorkeutta taivutusjäyhyyden kerroimen S_n laskemiseksi. Liitteessä III ja VIII on esitetty tarkemmin *M / EI* -kertoimien laskenta rungon eri taivutusjäyhyyden alueilla.

Hakeperävaunun rungon joutsenkaulan särmäys on valmistettu erittäin suurella taivutussäteellä, joten ympyrän yhtälöä käytetään määrittämään I-palkin kokonaiskorkeus *H* pisteessä x_n. Taivutusjäyhyys vaihtelee ympyrän kaaren yhtälön mukaisesti, koska hakeperävaunun rungossa joutsenkaulan särmäys on valmistettu erittäin suurella taivutussäteellä. I-palkin kokonaiskorkeus hakeperävaunun joutsenkaulan alueella on laskettu seuraavasti.

$$H(x_n) = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - r \tag{7}$$

Yhtälössä 7 x_n on hakeperävaunun rungon tarkasteltavan pisteen paikka rungon etupäästä, x_0 on taivutussäteen ympyrän kaaren lähtöpiste, y on ympyrän kaaren tarkastelupiste, y_n on ympyrän kaaren keskipiste ja r on uuman korkeuden lähtöpiste.

I-palkin korkeus h pisteessä x_n on laskettu seuraavasti.

$$h(x_n) = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - r - t_l \tag{8}$$

Yhtälössä 8 t_l on I-palkin laippojen paksuudet yhteen laskettuna.

M / EI -kuvaajan yhden tarkasteltavan osan leikkausvoima V_n vaihtelevan taivutusjäykkyyden alueella lasketaan seuraavasti.

$$V_n = S_n * \int w_n(x)dx = S_n * \int \frac{M}{EI} dx \tag{9}$$

Yhtälössä 9 M on hakeperävaunun runkoa kuormittava taivutusmomentti ja EI on hakeperävaunun rungon taivutusjäykkyys korkeammalla uuman korkeudella, kuten kuvassa 8 on esitetty.

Yhden tarkasteltavan osan *M / EI* -kuvaajan painopisteen eli leikkausvoiman painopiste x_{bar} lasketaan seuraavasti.

$$x_{bar} = \frac{\int x * M_n(x)\, dx}{\int M_n(x)\, dx} \tag{10}$$

Yhtälössä 10 $M_n(x)$ on momenttifunktio pisteessä x.

Hakeperävaunun staattisten leikkaus- ja momenttifunktioiden määrittämiseen käytetään verkkopohjaista SkyCiv-palkkilaskentaohjelmaa usean pistevoiman ja tasaisesti muuttuvan kuorman vuoksi.

Käsinlaskennassa ja käsinlaskentaa vertailevassa FE-analyysissa käytetään nivel- ja rullatukia runkopalkin päissä kuvassa 8 kuvatuissa pisteissä A ja B. Konjugaattipalkkimenetelmässä nivel- ja rullatuetussa todellisessa palkissa pystysuuntainen siirtymä on nolla, jolloin konjugaattipalkissa niveltuennan kohdalla esiintyy leikkausta, mutta ei momenttia.

3.2 FE-analyysit

FE-analyysi tehdään käsinlaskentaa vertailevalle runkorakenteelle ja todellista runkoa vertailevalle runkorakenteelle. Käsinlaskentaa vertailevassa FE-analyysissa käytetään samoja kuormituksia ja tukia kuin käsinlaskennassa. Todellista runkoa vertailevassa FE-analyysissa käytetään runkorakenteen tukina jousitukia, kun käsinlaskennassa käytettiin kiinteitä rulla- ja niveltukia. Kuormitukset ovat samat kaikissa kolmessa eri laskentatavassa.

Hakeperävaunun runkoa tarkastellaan FE-analyysilla Autodesk Simulation Mechanical 2015 -ohjelmalla. Staattista analyysia käytetään työssä hakeperävaunun kuormitusten FE-analyysissa. FE-analyysi suoritetaan lineaarisella analyysilla. FEM-mallissa käytetään rungon symmetriaa hyväksi laskennan nopeuttamiseksi. Elementteinä käytetään samassa laskentamallissa kuutio-, kiila-, pyramidi- ja tetraedrielementtejä.

Taulukoissa 1 ja 2 on esitetty käsinlaskentaa ja todellista runkoa vertailevan FEM-mallin elementtien ja solmujen kappalemäärät.

Taulukko 1. Käsinlaskentaa vertailevan FE-analyysia kuvaavan FEM-mallin elementtijaottelu.

	kpl
Osia mallissa	2
Elementtejä	16668
Solmuja	33658

Taulukko 2. Todellisen hakeperävaunun rungon FEM-mallin elementtijaottelu.

	Kpl
Osia mallissa	23
Elementtejä	80447
Solmuja	717520

Hakeperävaunun runkopalkin translaatio z-akselin suuntaan on estetty työssä olevien eri laskujen keskenään vertailtavuuden vuoksi. Käsinlaskentaa vertailevan FE-analyysin laskentamalli on niveltuettu kohdasta A ja rullatuettu kohdasta B, jotka on kuvattu kuvissa 8 ja 13. Kuormituksena hakeperävaunun y-akselin negatiiviseen suuntaan on vaihteleva

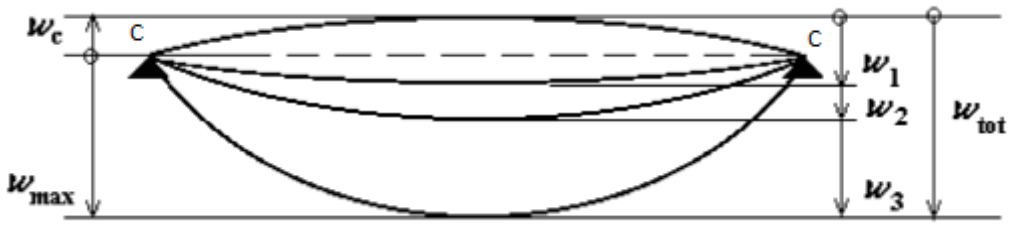
paine. Tukivoimina y-akselin positiiviseen suuntaan ovat akseleista runkoon aiheutuneet tukivoimat.

3.3 Esikorotus

Rakenteiden suunnitteluperusteet standardissa SFS-EN 1990 + A1 + A6 rakenteen käyttörajatilaksi on valittava rajatilat, jotka liittyvät rakenteen toimintaan normaalikäytössä sekä rakenteen ulkonäköön (SFS-EN 1990 + A1 + A6, s. 54). Hakeperävaunun runko ei saa taipua liikaa, jotta rakenteen toimivuus ja ulkonäkö ovat sallituissa rajoissa.

Esikorotusta voidaan käyttää pienentämään vaakatason alapuolista taipumaa w_{max} pysyvien kuormitusten vaikuttaessa (Hitsatut profiilit, 2010, s.10). I-runkopalkin esikorotus voidaan tehdä leikkaamalla uuma esikorotettuun muotoon tai hitsausvaiheessa hitsausjärjestyksellä voidaan tehdä pieni esikorotus (Hitsatut profiilit, 2010, s. 549).

Kuvassa 9 tarkastellaan rakenneosan pystysuuntaista taipumaa standardin SFS-EN 1990 + A1 + AC mukaan. Tarkasteltavan kappaleen vaakataso C-C on piirretty katkoviivalla kuvaan 9.



Kuva 9. Palkin pystysuuntainen taipuma (muokattu SFS-EN 1990 + A1 + AC, s.94).

Kuvassa 9 w_c on kuormittamattoman rakenneosan esikorotus, w_1 on kuormitusyhdistelmän taipuman alkuarvo muuttumattomien kuormien vaikuttaessa, w_2 on taipuman pitkäaikaisosuus muuttumattomien kuormien vaikuttaessa, w_3 on kuormitusyhdistelmän taipuman lisäosuus muuttuvista kuormista, w_{tot} on taipumien w_1, w_2 ja w_3 summa ja w_{max} on kokonaistaipuman näkyvä osuus esikorotus huomioon otettuna. (SFS-EN 1990 + A1 + AC, s.94.)

Rakenteessa taipumien w_1, w_2 ja w_3 summa w_{tot} on vakio ja esikorotusta w_c suurentamalla näkyvän taipuman osuus w_{max} pienenee (SFS-EN 1993-1-1: 2005, Liite 9, s. 5).

Todellista hakeperävaunun rungon taipumaa on ollut vaikea mitata tarkasti hankalapääsyisen rungon sekä muun mittausdatan puutteen vuoksi. Käsinlaskennalla ja FE-analyysilla pystytään laskemaan rungon pystysuuntainen siirtymä pysyvien kuormien vaikuttaessa hakeperävaunun runkoon. Saaduista tuloksista voidaan laskea tarvittava esikorotus hakeperävaunun rungolle.
Pystysuuntaisten taipumien tuloksista lasketaan hakeperävaunun rungolle esikorotus 42 tonnin kokonaismassan kuormalla. Tavoitteena esikorotuksessa on, että runko olisi suora eli vaakatasossa C-C, kuten kuvassa 9. Esikorotus määritetään peilaamalla rungon pystysuuntaisen taipuman tulos x-akselin suhteen. Tuloksena saadaan esikorotettu hakeperävaunun esikorotusprofiili. Esikorotetun hakeperävaunun rungon taipuma 42 tonnin kokonaismassan kuormituksen vaikuttaessa lasketaan esikorotetun hakeperävaunun rungon esikorotusprofiilin ja esikorotetun hakeperävaunun pystysuuntaisten taipumien summana.

Tutkimuksessa lasketaan hakeperävaunun rungon laskentatapauksille taipuman vertailuarvot L / x, joita verrataan standardin SFS-EN 1993-1-1: 2005 kansallisen liitteen 9 teräsrakenteiden suunnittelun yleisiin ja rakennuksia koskeviin sääntöihin. Kyseisessä standardissa määritetyt lopputaipumien w_{max} raja-arvot ovat välillä L / 100 - L / 400.

Muotolevyjen ulokkeiden lopputaipuman w_{max} raja-arvoksi L / 100 ja asuinrakennuksen ylä- ja alakerran välisen välipohjan pääkannattimien lopputaipuman w_{max} raja-arvoksi L / 400, joissa L on rakenteen jänneväli. (Kansallinen liite standardiin SFS-EN 1993-1-1: 2005, Liite 9, s.5)

Rakennusten ulkonäköä tarkasteltaessa käytetään kuormituksen pitkäaikaisyhdistelmää määritettäessä rakenteen taipuman raja-arvoa. Koneiden toimintaa tarkasteltaessa otetaan tarkastelussa huomioon rakenteessa vaikuttavien muuttuvien kuormien vaikutukset. (Standardin SFS-EN 1990 + A1 + AC, s. 96.)

Esikorotus määritellään siten, että runko on suora, kun perävaunu on kuormattu eli hakeperävaunun kokonaismassa on tavoitellun suuruinen. Hakeperävaunun runkokorkeus on kääntäen verrannollinen kuljetettavaan tilavuuteen. Hakeperävaunun rungon uuman korkeus h on suoraan verrannollinen rungon taipuman kolmanteen potenssiin (Niemi, 2003, s. 34).

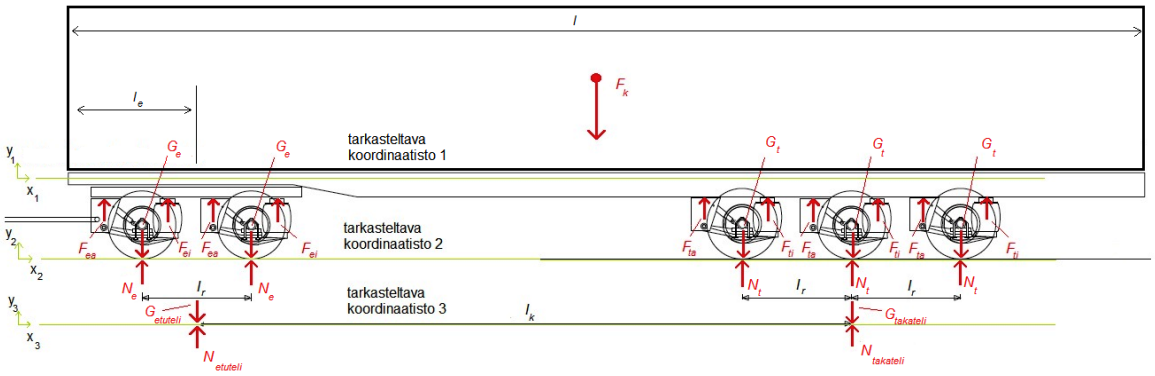
4 KUORMITUKSET

Tutkimuksessa tarkastellaan kahden eri kokonaismassan vaikutusta hakeperävaunun rungon pystysuuntaiseen taipumaan staattisilla kuormituksilla. Huomioon otetaan 1.10.2013 voimaan astunut Valtioneuvoston asetusmuutos ajoneuvon käytöstä tiellä. Asetusmuutoksessa raskaan kaluston suurin sallittu yhdistelmän kokonaismassa muuttui. Yhdistelmän suurin sallittu kokonaismassa ennen 1.10.2013 oli 60 tonnia (A 531/1993, 23§). 1.10.2013 voimaan astuneessa asetusmuutoksessa yhdistelmän suurin sallittu kokonaismassa on 76 tonnia (A 407/2013, 23§).

4.1 Kuormitustavat ja voimat

Tutkimuksessa tarkastellaan hakeperävaunun rungon pystysuuntaista taipumaa kahdella eri kokonaismassan kuormituksella. Ensimmäiseksi kuormaksi valittiin ajoneuvojen käytöstä tiellä asetuksen suurin sallittu perävaunun kokonaismassa 42 tonnia (A 1257/1992, 20§). Ennen 1.10.2013 O4-luokan perävaunun kokonaismassa oli 42 tonnia, mutta suurin sallittu yhdistelmämassa oli 60 tonnia (A 531/1993, 23§). Tuolloin 36 tonnia oli varsin yleinen perävaunun kokonaismassa (Rautiainen, 2015), minkä vuoksi toiseksi tarkasteltavaksi kokonaismassaksi valittiin 36 tonnia. Tutkimuksessa ei oteta huomioon hakeperävaunun rungon omaa massaa liikesalaisuuksiin vedoten. Tutkimuksessa tarkastellaan, paljonko on hakeperävaunun pystysuuntainen siirtymä kokonaismassasta aiheutuneilla voimilla. Kokonaismassa määritellään hakeperävaunun ollessa pysäytettynä kuormattuna vaa'alla. Asetus ajoneuvon käytöstä tiellä -asetuksessa puhutaan akseleille kohdistuvasta massasta (A 1257/1992, 20§). Perävaunun akselikohtainen punnitus suoritetaan yksi akseli kerrallaan, josta yksittäiset punnitukset yhteen laskemalla saadaan perävaunun kokonaismassa

Kuvassa 10 on esitetty hakeperävaunun kokonaismassan vaikutukset tarkasteltavissa koordinaatistoissa, koska tässä työssä puhutaan teli-, akseli- ja kokonaismassoista. Kuva 10 erittelee työssä käytetyt asiakokonaisuudet omiksi osikseen. Tässä työssä keskitytään pystysuuntaisten taipumien selvittämisessä tarkasteltavan koordinaatiston 1 tilanteeseen. Muut koordinaatistot ovat pohjatietoja, jotka pohjautuvat ajoneuvoasetuksiin ja käytännön sovelluksiin. Kuvassa 10 jokaisessa tarkasteltavassa koordinaatistossa on voima ja vastavoima. Eri tilanteesta riippuu, onko voima vai vastavoima määritelty ennalta asetuksen vai käytännön kannalta.



Kuva 10. Hakeperävaunun vapaakappalekuva kolmessa eri tarkastettavassa koordinaatistossa.

Kuvassa 10 esitetyssä kolmessa eri tarkasteltavassa koordinaatistossa tarkastellaan vaikuttavia voimia suhteessa toisiinsa. 42 tonnin kokonaismassatarkastelussa kaksiakselisen telin suurin sallittu massa on 18 tonnia, kun akseliväli on 1,3–1,8 metriä. Kolmiakseliselle telille suurin sallittu massa on 24 tonnia, kun akseliväli on enemmän kuin 1,3 metriä. (A 1257/1992, 20§.) Tutkimuksessa hakeperävaunun etuteli on kaksiakselinen teli ja takateli on kolmeakselinen teli.

Tässä tutkimuksessa oletetaan, että hakeperävaunun kuormitusmuoto on puolisuunnikkaan muotoinen perustuen Immosen 2015 antamaan lausuntoon, joten hakeperävaunun kokonaismassasta johtuva kuorma jaetaan kolmiokuormaan F_1 ja tasaiseen kuormaan F_2.

Kuvassa 10 tarkasteltavassa koordinaatistossa 2 tarkastellaan akselikohtaisia voimia. Voimat jakautuvat useampaan osaan siirryttäessä tarkasteltavasta koordinaatistosta toiseen. Jokainen tarkasteltava koordinaatisto on tasapainossa oman koordinaatistonsa suhteen ja jokaisessa tarkasteltavassa koordinaatistossa kokonaisvoimat ovat samat. Taulukossa 3 on esitetty kuvan 10 symbolien selitykset.

Taulukko 3. Kuvan 10 symbolien selitykset.

Symboli	Selitys
F_{ea}	Etutelin akselipukkiin kohdistuva tukivoima
F_{ei}	Etutelin ilmapalkeeseen kohdistuva tukivoima
F_k	Hakeperävaunun kokonaismassasta muodostuva kokonaiskuorma
F_{ta}	Takatelin akselipukkiin kohdistuva tukivoima
F_{ti}	Takatelin ilmapalkeeseen kohdistuva tukivoima
G_e	Etutelin akselille kohdistuva massa
G_t	Takatelin akselille kohdistuva massa
N_e	Etutelin akselin tukivoima
N_t	Takatelin akselin tukivoima
$G_{etuteli}$	Etutelin massa
$G_{takateli}$	Takatelin massa
$N_{etuteli}$	Etutelin akselin tukivoima
$N_{takateli}$	Takatelin akselin tukivoima
l	Hakeperävaunun kokonaispituus
l_e	Hakeperävaunun etuylitys
l_k	Teliväli
l_r	Akseliväli

Taulukossa 4 on esitelty tutkimuksessa tarkasteltavien 42 ja 36 tonnin kokonaismassojen hakeperävaunun akseleille kohdistuvat tavoitemassat. Akseleille kohdistuneita tavoitemassoja tarvitaan kuormitusmuodon selvittämiseksi. Akseleille kohdistuvat tavoitemassat on valittu pohjautuen asetukseen ajoneuvon käytöstä tiellä antaviin suurimpiin sallittuihin telimassoihin (A 1257/1992, 20 §) Suurin sallittu telimassa saadaan yhteenlaskemalla kyseisen telin akseleille kohdistuneista massoista.

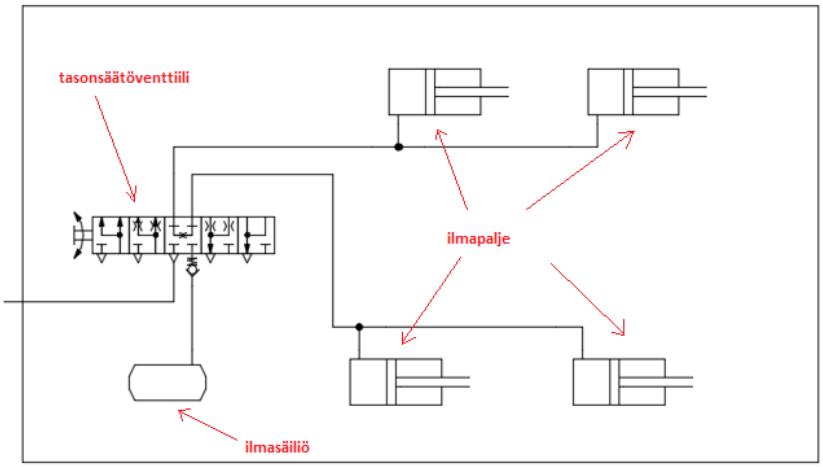
36 tonnin kokonaismassan tarkastelussa ajoneuvon käytöstä tiellä asetus antaa samat telikohtaiset suurimmat sallitut akseleille kohdistuvat massat, mutta yhdistelmän kokonaismassarajoitus rajoittaa suurimmat sallitut akseleille kohdistuvat massat taulukon 4 kohdan kokonaismassan 36 t mukaisiksi. (A 670/1997, 23§.)

Taulukko 4. Akseleille kohdistuvat tavoite massat eri kuormitustilanteissa.

Akseleille kohdistuvat massat [t]				
			Kokonaismassa	
			42 t	36 t
Tarkasteltava akseli	Etuteli	1.	9	7,5
		2.	9	7,5
	Takateli	3.	8	7
		4.	8	7
		5.	8	7

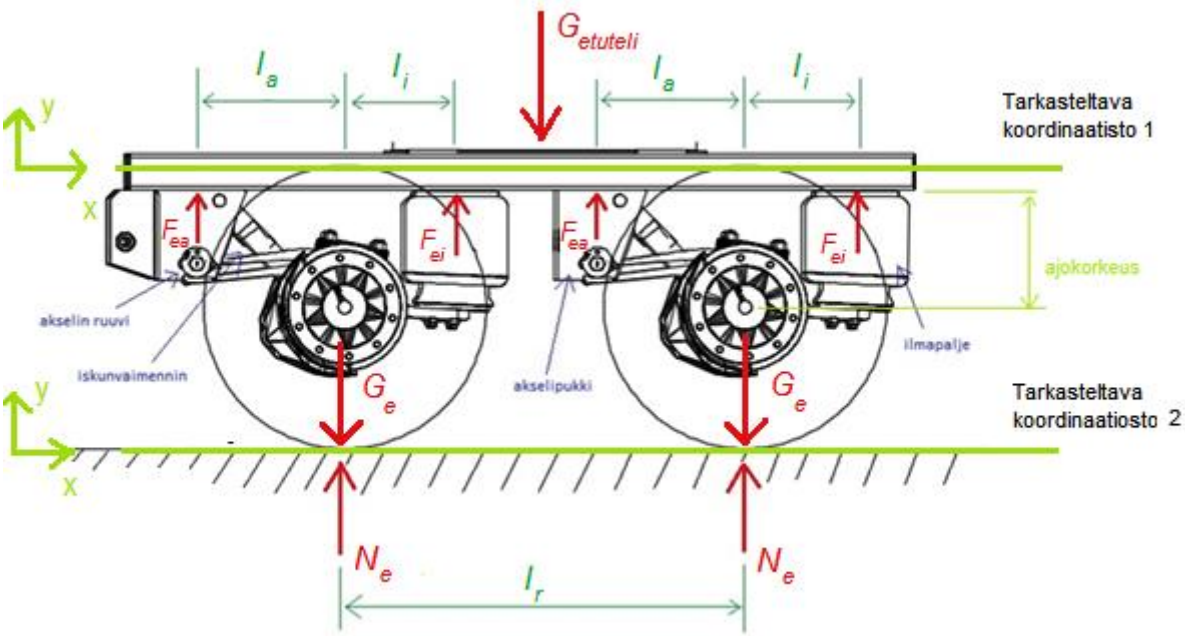
Kuormitukset jakautuvat etu- ja takatelille. Etu- ja takatelillä on itsenäisesti ohjatut ilmajousituksen piirit, jotka ohjaavat ilmapalkeiden painetta. Etu- ja takatelillä on omat tasonsäätöventtiilit, joista etutelin piiri on kuvattuna kuvassa 11. Etu- ja takatelillä on kummallakin omat kuvan 11 mukaiset ilmajouston ilmanpainepiirit. Erona etu- ja takatelin ilmajouston piireissä on ilmapalkeiden määrä. Takatelillä on kolmella akselilla yhteensä kuusi ilmapaljetta ja etutelillä kahdella akselilla on neljä ilmapaljetta.

Kuvassa 11 esitetään tasosäätöventtiilin periaatetoiminta telin ilmajousituksen ajokorkeuden säädössä. Ajokorkeus on visualisoitu kuvassa 12. Ajokorkeus määrittää rungon alalaipan ja akseliputken välisen korkeuden, mikä asetetaan manuaalisesti tasonsäätöventtiilin ja vipuvarren avulla. Vipuvarsi on kiinnitetty akseliputkeen ja tasonsäätöventtiili on kiinnitetty perävaunun runkoon. Tasonsäätöventtiilin ollessa keskiasennossa ajokorkeus on halutulla tasolla. Kuormaa lisätessä runkolaipan ja akseliputken välinen korkeus pienenee, jolloin tasosäätöventtiilin mekaaninen ohjaus säätää tasonsäätöventtiiliä niin, että ilmasäiliöstä paineilma virtaa ilmapalkeille, kunnes haluttu ajokorkeus saavutetaan. Tämän jälkeen tasonsäätöventtiili kääntyy keskiasentoonsa ja ilmapalkeiden paineilmapiiri sulkeutuu. Kuorman keventyessä ajokorkeus kasvaa, jolloin tasonsäätöventtiili siirtyy keskiasennostaan kuvassa 11 katsottuna vasemmalle ja ilmapalkeista paineilma virtaa systeemin ulkopuolelle. (Wabco, 1998.)



Kuva 11. Etutelin ilmajouston paineilmapiirin kaavio (muokattu Wabco, 1998).

Kuvassa 12 on esitetty akselille kohdistuvan massan jakautuminen lähemmin hakeperävaunun runkorakenteeseen. Akselille kohdistuva massa toisin sanottuna pinnan tukivoima N_e jakautuu hakeperävaunun runkoon akselipukin tukivoiman F_{ea} ja ilmapalkeen tukivoiman F_{ei} kautta. Kuvassa 12 on myös esitetty etuvaunun eli etutelin akselistorakenne.



Kuva 12. Akseleille kohdistuvat massat jakautuvat tarkasteltavien koordinaatistojen mukaisesti. Kaksiakselisen telin osat ja ajokorkeus on esitetty kuvassa (muokattu Design manual modul, s. 17).

Taulukossa 5 on esitetty etu- ja takatelin akselistorakenteen mitat, jotka on esitetty kuvassa 12.

Taulukko 5. Akselien akseliputken, akselipukin ja ilmapalkeen väliset mitat.

Mitat	[mm]	Selitys
l_r	1360	Akseliväli
l_a	500	Akselipukin ja akseliputken etäisyys toisistaan
l_i	385	Akseliputken ja ilmapalkeen etäisyys toisistaan

Akselille kohdistuvista massoista G_e välittyvät voimat F_{ea} ja F_{ei} lasketaan seuraavasti.

$$F_{ea} = \frac{G_e * g * l_i}{2*(l_a+l_i)} \tag{11}$$

$$F_{ei} = \frac{G_e * g * l_a}{2*(l_a+l_i)} \tag{12}$$

Yhtälössä 11 F_{ea} on etutelin akselipukin tukivoima ja yhtälössä 12 F_{ei} on etutelin ilmapalkeen tukivoima. Yhtälöissä 11 ja 12 G_e on etutelin akselimassa, g on putoamiskiihtyvyys, l_i on akseliputken ja ilmapalkeen sekä l_a on akselipukin ja akseliputken etäisyys toisistaan.

Akselille kohdistuvasta massasta G_t välittyy voimat F_{ta} ja F_{ti} lasketaan seuraavasti.

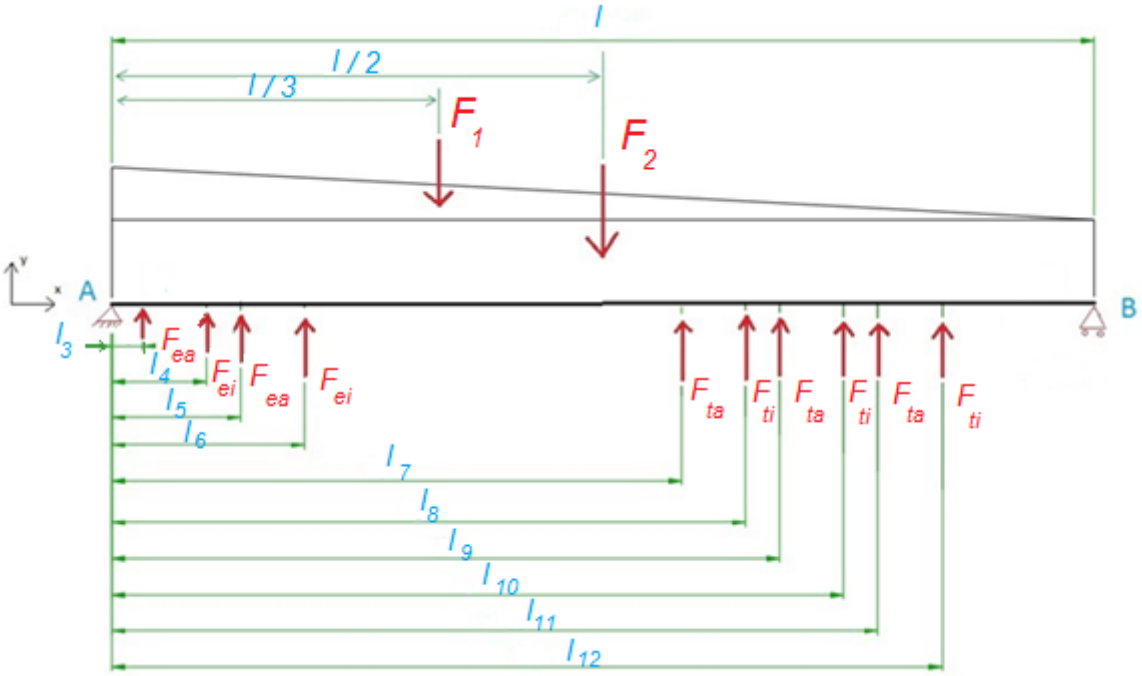
$$F_{ta} = \frac{G_t * g * l_i}{2*(l_a+l_i)} \tag{13}$$

$$F_{ti} = \frac{G_t * g * l_a}{2*(l_a+l_i)} \tag{14}$$

Yhtälössä 13 F_{ta} on takatelin akselipukin tukivoima ja yhtälössä 14 F_{ti} on takatelin ilmapalkeen tukivoima. Yhtälöissä 13 ja 14 G_t on takatelin akselimassa, g on putoamiskiihtyvyys, l_i on akseliputken ja ilmapalkeen sekä l_a on akselipukin ja akseliputken etäisyys toisistaan.

Akselipukkien ja ilmapalkeiden voimat jakautuvat hakeperävaunun rungossa kokonaisuudessaan kuvan 13 mukaisesti. Tukien A ja B tukivoimien oletetaan olevan nolla ja kuvassa 13 esitettyjen voimien summa on nolla. Systeemi on tasapainossa, joten voimat F_1 ja F_2 voidaan laskea ennalta määrättyjen akseleista aiheutuneiden tukivoimien avulla. Kuorman oletetaan olevan lineaarisesti kasvava tai vähenevä. Haketta yleensä lastataan edestä

niin täyteen kuin kuormatila sallii ja taakse lisätään haketta niin paljon, että suurimmat sallitut akselimassat täyttyvät (Immonen, 2015).



Kuva 13. Akselipukkien ja ilmapalkeiden voimat käsinlaskennassa käytetyillä mitoilla.

Tutkimuksen laskelmissa käytetään apuna symmetriaa, joten kuvan 13 voimat ovat yhtä runkopalkkia kohden. Kuvassa 13 on esitetty yhden hakeperävaunun runkopalkin tukipisteet ja runkoon vaikuttavat voimat. Kuva 13 on samasta tarkasteltavasta koordinaatistosta, kuin kuvan 10 tarkasteltava koordinaatisto 1. Taulukossa 6 on esitetty kuvan 13 symbolien selitykset.

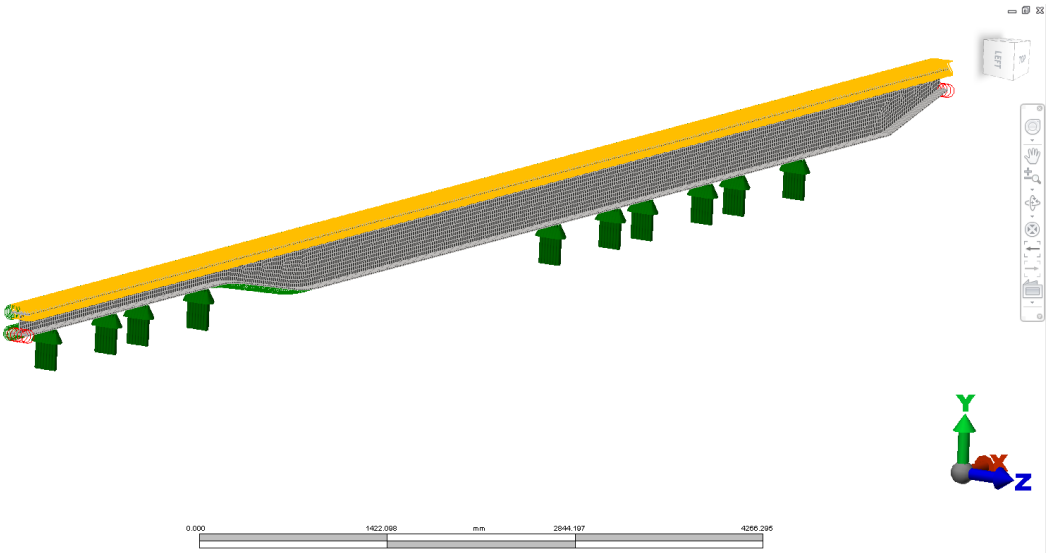
Taulukko 6. Kuvan 13 symbolien selitykset.

Symboli	Selitykset
F_1	Kolmiokuorman resultantti
F_2	Tasaisen kuorman resultantti
l	Hakeperävaunun kokonaispituus
$l / 2$	Tasaisen kuorman painopiste
$l / 3$	Kolmiokuorman painopiste
l_3	1. akselin akselipukin ja hakeperävaunun rungon pisteen A etäisyys
l_4	1. akselin ilmapalkeen ja hakeperävaunun rungon pisteen A etäisyys

Taulukko 6 jatkuu. Kuvan 13 symbolien selitykset.

Symboli	Selitykset
l_5	2. akselin akselipukin ja hakeperävaunun rungon pisteen A etäisyys
l_6	2. akselin ilmapalkeen ja hakeperävaunun rungon pisteen A etäisyys
l_7	3. akselin akselipukin ja hakeperävaunun rungon pisteen A etäisyys
l_8	3. akselin ilmapalkeen ja hakeperävaunun rungon pisteen A etäisyys
l_9	4. akselin akselipukin ja hakeperävaunun rungon pisteen A etäisyys
l_{10}	4. akselin ilmapalkeen ja hakeperävaunun rungon pisteen A etäisyys
l_{11}	5. akselin akselipukin ja hakeperävaunun rungon pisteen A etäisyys
l_{12}	5. akselin ilmapalkeen ja hakeperävaunun rungon pisteen A etäisyys

Kuvassa 14 on esitetty tutkimuksessa käsinlaskentaa vertailevan FE-analyysin FEM-malli. Keltaiset renkaat rungon päällä kuvaavat lineaarisesti vaihtelevaa painetta, nuolet ovat akselimassojen tukivoimia, rungon päissä olevat punaiset renkaat ovat nivel- ja rullatukia. Rullatuessa translaatio x-suuntaan on sallittu. Rungon takana olevat vihreät renkaat rajoittavat mallin runkopalkin siirtymän z-suuntaan.

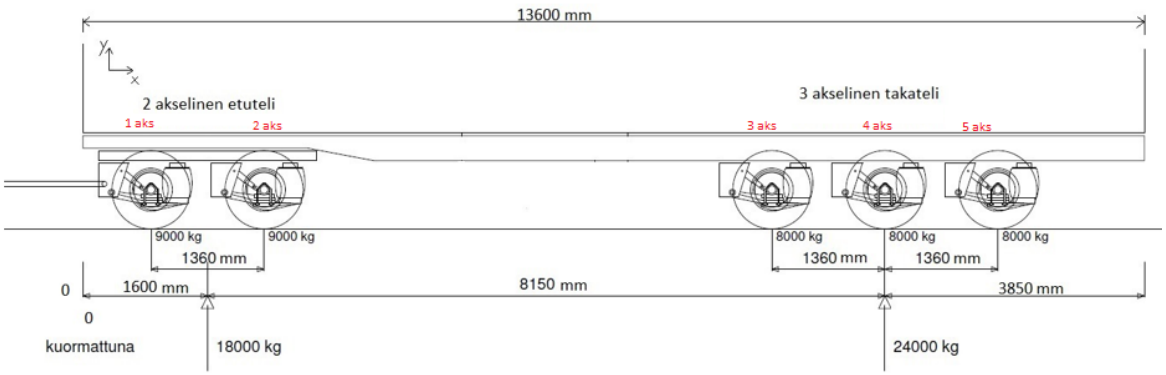


Kuva 14. Käsinlaskentaa vertailevan FE-analyysin FEM-malli hakeperävaunun rungosta.

4.2 Kuormitukset 42 ja 36 tonnia

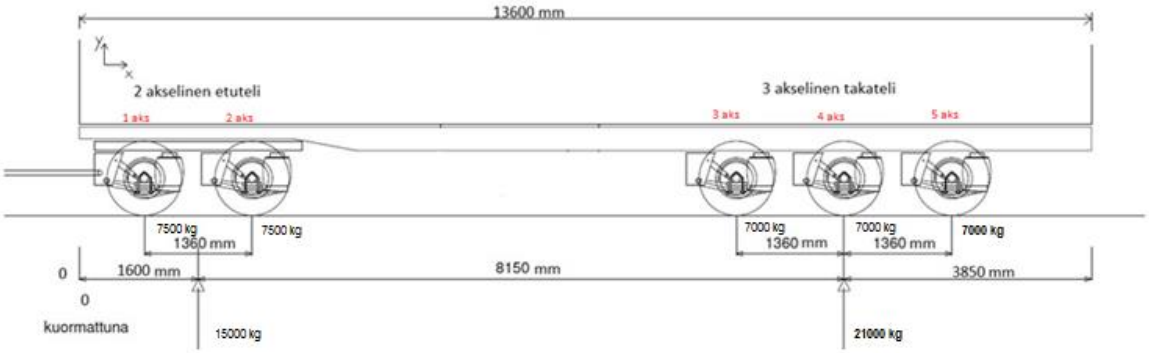
42 tonnin hakeperävaunun kokonaismassan vaikutus runkorakenteeseen määritetään lakisääteisten asetusten mukaisesti ja puolestaan 36 tonnin kokonaismassan kuorma kokemusperusteisesti. Teliväli l_k on asetuksen 1257/1992 26§ mukaan 8,15 metriä. (A 1257/1992, 25§.) Asetuksessa 1257/1992 olevien telille kohdistuvien suurimpien sallittujen massojen ja akselivälin perusteella viisiakselisessa perävaunussa viiden akselin akse-

lipainot jakautuvat 42 tonnin kokonaismassan tapauksessa kuvan 15 mukaisesti. Hakeperävaunun kokonaismassa, 42 tonnia, saadaan etu- ja takatelin suurimpien sallittujen telille kohdistuvien massojen summasta.



Kuva 15. Laskennassa käytettävät akseleille ja teleille kohdistuvat massat 42 tonnin kokonaismassan tarkastelussa.

Vastaavasti 36 tonnin kokonaismassa jakautuu akseleille ja teleille kuvan 16 mukaisesti.



Kuva 16. Laskennassa käytettävät akseleille ja teleille kohdistuvat massat 36 tonnin kokonaismassan tarkastelussa.

Taulukossa 7 on laskettu 42 ja 36 tonnin kokonaismassoja vastaavien akselimassojen vaikutus etu- ja takatelin akselipukkeihin ja ilmapalkeisiin. Samalla on laskettu resultanttivoimat F_1 ja F_2, joista lasketaan lineaarisesti laskeva tasainen kuormitus. Suurimpien sallittujen telimassojen pohjalta lasketaan tutkimuksessa akselimassojen kuormitus puolisuunnikaskuormana, jossa kuormitus laskee tasaisesti hakeperävaunun etupäästä takapäähän.

Taulukko 7. Tukivoimat 42 ja 36 tonnin kokonaismassa tarkasteluissa yhtä runkopalkkia kohden

Systeemissä vallitsevat voimat [N]	Kokonaismassa 42 t	36 t
F_1	49339	34732
F_2	156671	141848
F_{ea}	19204	16003
F_{ei}	24941	20784
F_{ta}	17071	14937
F_{ti}	22169	19398

4.2.1 Käsinlaskennan 42 ja 36 tonnin kuormituksen tarkastelu

Taulukon 8 tulokset on laskettu tasaisena kuormana F_2 ja kolmiokuormana F_1, joista on laskettu rungon etu-ja takapäädyn jakautunut kuorma. Pisteet A ja B on esitetty kuvassa 13.

Taulukko 8. 42 ja 36 tonnin kokonaismassan lineaarisesti muuttuvan tasaisen kuorman raja-arvot pisteissä A ja B

	42 t		36 t	
	A	B	A	B
Tasainen kuormitus [N/m]	18776	11520	15538	10430

4.2.2 FE-analyysin 42 ja 36 tonnin kuormituksen tarkastelu

FE-analyysissa hakeperävaunun kokonaismassa simuloidaan hakeperävaunun runkomalliin vaihtelevana paineena ylälaipan päälle. Paine kohdistuu y-akselin negatiiviseen suuntaan.

Taulukossa 9 on esitetty 150 millimetriä leveän runkopalkin ylälaippaan kohdistuva paine.

Taulukko 9. FE-analyysissä 42 ja 36 tonnin kokonaismassan tarkastelussa käytetty kuorman paineet pisteissä A ja B

	42 t		36 t	
	A	B	A	B
Paine [MPa]	0,125	0,077	0,104	0,07

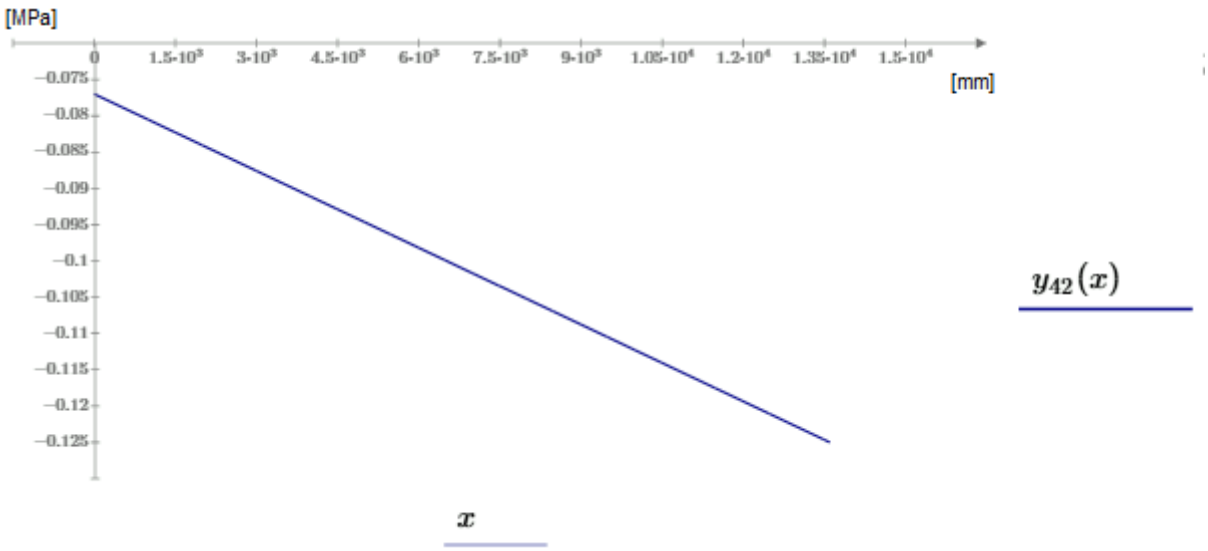
Taulukon 9 painearvoja käytettiin määrittämään FE-analyyseissä käytettäviä painefunktiota. Positiivinen *x*-suunta on hakeperävaunun perästä eteenpäin, koska Autodesk Simulation Mechanical 2015 -ohjelmassa vaihteleva paine toimi paremmin näin päin asetettuna. Taulukosta 9 johdetut painefunktiot 42 ja 36 tonnin kokonaismassan kuormituksilla ovat seuraavat.

$$f_{vaihteleva\ paine\ 42\ t}(x) = -3544 * 10^{-9} * x - 768 * 10^{-4} \tag{15}$$

$$f_{vaihteleva\ paine\ 36\ t}(x) = -2500 * 10^{-9} * x - 700 * 10^{-4} \tag{16}$$

Yhtälöissä 15 ja 16 *x* on runkopalkin pisteen paikka x-akselin suuntaisena hakeperävaunun rungossa. Liitteen II osassa 2 on esitetty yhtälön 15 laskenta.

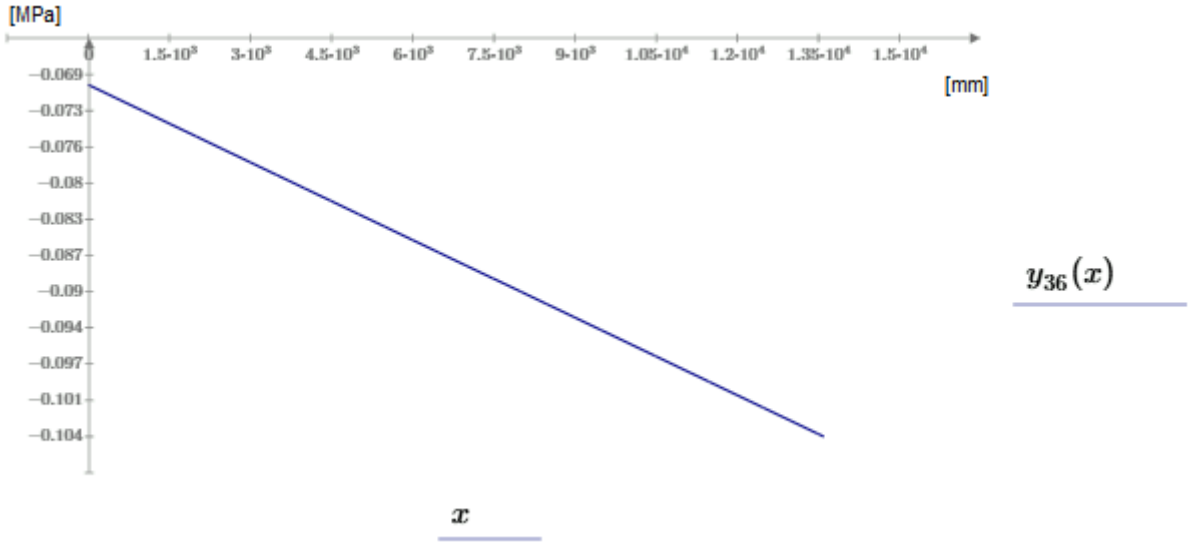
Kuvassa 17 on esitetty yhtälön 15 kuvaaja välillä 0 - 13600 mm.



Kuva 17. 42 tonnin kokonaismassan kuormituksen lineaarisesti muuttuva paine.

Liitteissä I - V on esitetty 42 tonnin hakeperävaunun rungon kokonaismassan kuormituksen pystysuuntaisen taipuman tulokset eri pisteissä.

Kuvassa 18 on esitetty yhtälön 16 kuvaaja välillä 0 - 13600 mm.



Kuva 18. 36 tonnin kokonaismassan kuormituksen lineaarisesti muuttuva paine.

4.3 Tuennat

Hakeperävaunun rungon pystysuuntaisten taipumien laskelmissa käytetään eri tuentatapoja: jousia sekä nivel- ja rullatukia. Kunkin akselin oletetusti punnitusta akselille kohdistuvasta massasta johdettuja voimia käytetään hakeperävaunun rungon tukivoimina.

4.3.1 Käsinlaskennan ja käsinlaskentaa vertailevan FE-analyysin tuennat

Käsinlaskennassa käytetään nivel- ja rullatukea. Tukien A ja B tukivoimien ajatellaan tosin olevan olemattomia, koska hakeperävaunu on ilmajousitettu, eikä rungossa siis ole jäykkiä tukia. Systeemin ajatellaan olevan tasapainossa akselimassoista johtuvista voimista y-akselin positiiviseen suuntaan ja kuormasta y-akselin negatiiviseen suuntaan.

Ensiksi määritellään kuormituksen mukaiset akseleille kohdistuvat massat, joista lasketaan hakeperävaunun runkoon vaikuttavat voimat. Akseleille kohdistuvista massoista lasketaan hakeperävaunun kuormituksen muoto, jotta systeemi on tasapainossa.

Hakeperävaunun 42 tonnin kokonaismassan kuormituksen tukivoimat N_e ja N_t on johdettu kuvan 15 mukaisesti akseleille kohdistuvista massoista ja 36 tonnin kokonaismassan kuormitus on johdettu kuvan 16 mukaisesti akseleille kohdistuvista massoista.

4.3.2 Todellisen hakeperävaunun rungon FE-analyysin tuennat

FE-analyyseissa käytetään kahta eri tuentatapaa. Käsinlaskentaa kuvaavassa FEM-mallissa käytetään tuentoina akseleille kohdistuvista massoista johdettuja voimia ja todellista runkoa kuvaavan FEM-mallin tuentoina käytetään eri jousivakiollisia puristusjousia.

Jousivakiot lasketaan iteroimalla jousivakio jousen jousivakiosta ja jousen kasaan puristumisesta. Todellista runkoa kuvaavan FEM-mallin tuennat mallinnetaan eri jousivakiollisilla jousilla, jotta akselituennat saadaan halutun suuruisiksi. Iteroimalla FEM-mallin jousien jousivakioita määritetään kullekin akselille oma jousivakio tietynlaiselle kuormitukselle. Jousien tukivoimat vastaavat ennalta määrättyjä akseleille kohdistuvista massoista johdettuja voimia. Ensimmäisen iterointikierroksen jousivakio k_{jn} lasketaan seuraavasti.

$$k_{jn} = \frac{F_n}{10\ mm} \tag{17}$$

Yhtälössä 17 F_n on kunkin jousituennan tavoitetukivoima ja 10 mm on jousen kokoonpuristuman alkuarvo.

Uusi jousen tukivoima F_{n+1} lasketaan seuraavasti.

$$k_{jn} * s_n = F_{n+1} \tag{18}$$

Yhtälössä 18 s_n on jousen kokoonpuristuma FEM-mallissa.

Yhtälön 18 tulosta käytetään hyväksi laskettaessa uutta jousivakiota k_{jn+1}.

$$\left[\frac{k_{jn}}{\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)}\right] = k_{jn+1} \tag{19}$$

Jousen uusi tukivoima F_{n+2} lasketaan seuraavasti.

$$k_{jn+1} * s_{n+1} = F_{n+2} \tag{20}$$

Yhtälössä 20 s_{n+1} on iteroitu jousen kokoonpuristuma. Iterointia jatketaan, kunnes tavoiteltu jousen tukivoima on saavutettu. Jousien tavoite tukivoimat on esitetty taulukossa 7.

Taulukossa 10 on esitetty 42 ja 36 tonnin kokonaismassan kuormitusten iteroidut jousivakiot akselien akselipukkien ja ilmapalkeiden kohdilla. Jousivakioiden sijainnit ovat nähtävissä myös kuvassa 13.

Taulukko 10. Jousivakiot 42 ja 36 tonnin kokonaismassojen tarkasteluissa

Sijainti	Jousivakio 42 t [N/mm]	Jousivakio 36 t [N/mm]
1. akselin akselipukki	26673	17081
1. akselin ilmapalje	2474	2461
2. akselin akselipukki	1355	1562
2. akselin ilmapalje	1263	1760
3. akselin akselipukki	878	1157
3. akselin ilmapalje	1496	1781
4.akselin akselipukki	1371	1475
4. akselin ilmapalje	2627	2094
5. akselin akselipukki	2583	1653
5. akselin ilmapalje	5944	2132

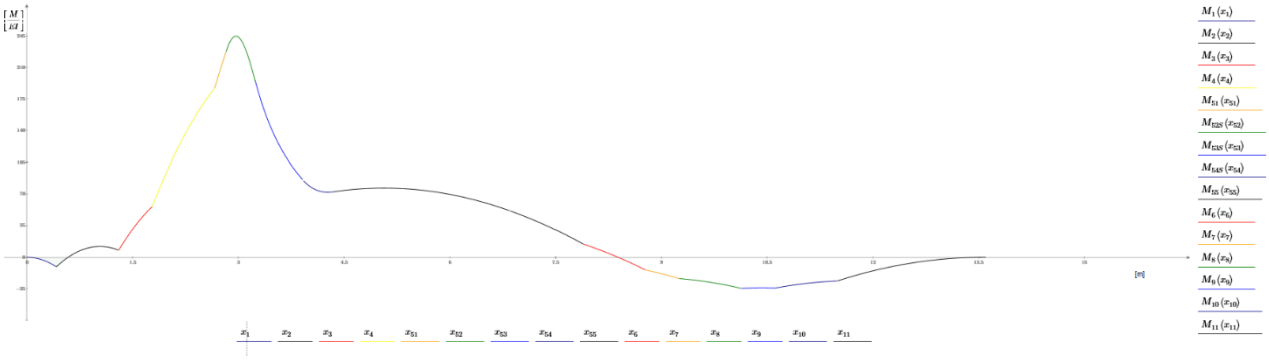
5 TULOKSET

Tulokset jakautuvat 42 ja 36 tonnin kokonaismassojen tuloksiin. Molemmissa kuormitustapauksissa tarkasteltiin hakeperävaunun rungon taipumaa käsinlaskennalla, käsinlaskentaa kuvaavalla FE-analyysilla sekä todellista runkoa vastaavalla FE-analyysilla. Pystysuuntaisten taipumien mittapisteiksi on FEM-malleissa valittu hakeperävaunun runkopalkin ylälaipan yläreuna. Kuvaajissa origo on hakeperävaunun rungon etupäädyssä.

5.1 Tulokset 42 ja 36 tonnin kuormituksilla

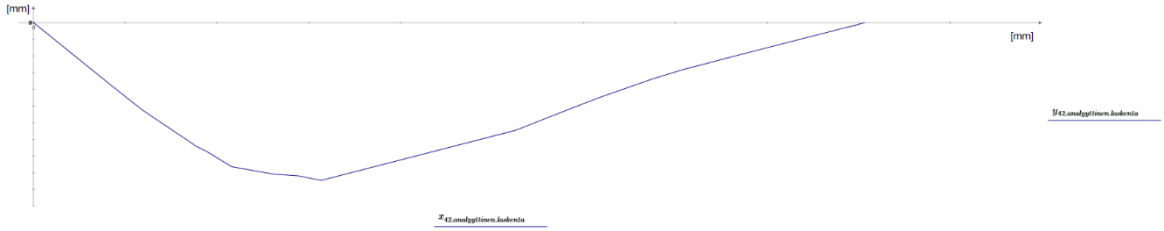
Hakeperävaunun rungon 42 tonnin kokonaismassan kuormituksesta aiheutuneita taipumia tarkastellaan käsinlaskennan, käsinlaskentaa kuvaavan FE-analyysin ja todellista runkoa kuvaavan FE-analyysin tuloksilla.

Kuvassa 19 on esitetty hakeperävaunun rungon *M / EI* -kuvaaja 42 tonnin kokonaismassan kuormituksella. Kuvasta 19 ja 23 huomaa noin kolmen metrin kohdalla rungon etupäästä funktion maksimin, jossa kyseisellä kohdalla vaikuttava momentti suhteessa kyseisen kohdan runkopalkin taivutusjäyhyyden ja kimmomoduulin tuloon nähden on suurin eli kyseisessä kohdassa taivutusmomentti *M* on suurin suhteessa taivutusjäykkyyteen *EI.*



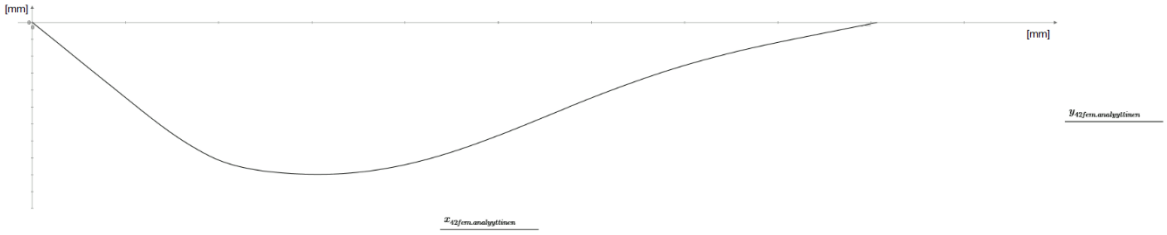
Kuva 19. M / EI -kuvaaja 42 tonnin kokonaismassan kuormituksella hakeperävaunun rungon pituuden suhteen.

Kuvassa 20 on esitetty 42 tonnin kokonaismassan kuormituksen hakeperävaunun rungon käsinlaskennan pystysuuntaisen taipuman tulos.



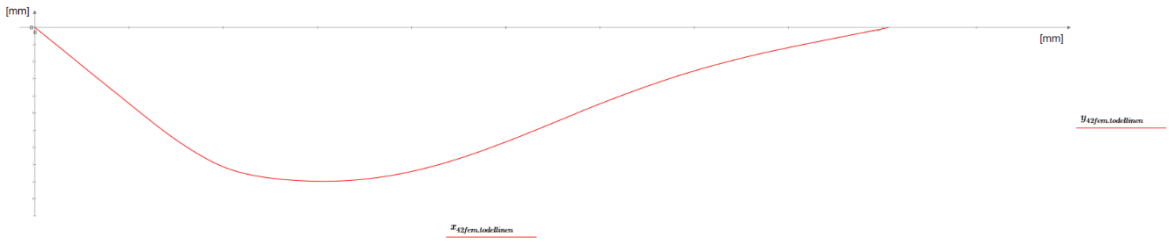
Kuva 20. Käsinlaskettu hakeperävaunun rungon pystysuuntainen taipuma rungon pituuden suhteen 42 tonnin kokonaismassan kuormituksella.

Kuvassa 21 on esitetty hakeperävaunun rungon pystysuuntainen siirtymä staattisella kuormalla käsinlaskentaa vertailevalla FE-analyysilla laskettuna.



Kuva 21. Käsinlaskentaa vertailevan FE-analyysin hakeperävaunun rungon pystysuuntainen taipuma rungon pituuden suhteen 42 tonnin kokonaismassan kuormituksella.

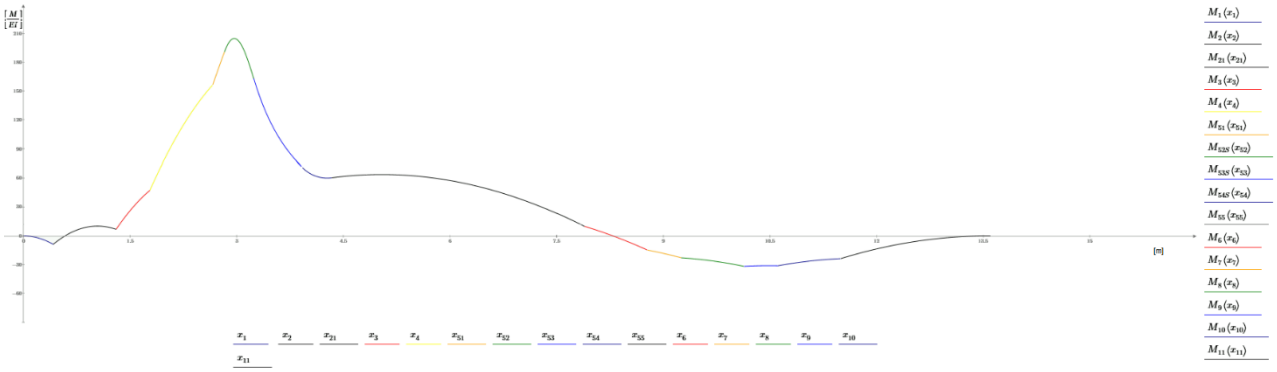
Kuvassa 22 on esitetty todellista runkoa vastaavan FE-analyysin tulos hakeperävaunun rungon pystysuuntaiselle taipumalle.



Kuva 22. Hakeperävaunun todellista runkoa vastaavan FE-analyysin pystysuuntainen taipuma rungon pituuden suhteen 42 tonnin kokonaismassan kuormituksella.

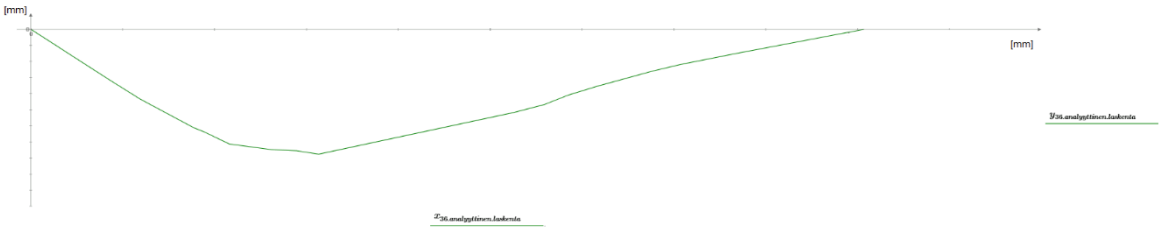
Hakeperävaunun rungon taipumien tuloksia 36 tonnin kokonaismassan kuormituksilla tarkastellaan käsinlaskennan, käsinlaskentaa kuvaavan FE-analyysin ja todellista runkoa kuvaavan FE-analyysin tuloksilla.

Kuvassa 23 on esitetty hakeperävaunun rungon *M / EI* -kuvaaja 36 tonnin kokonaismassan kuormalla.



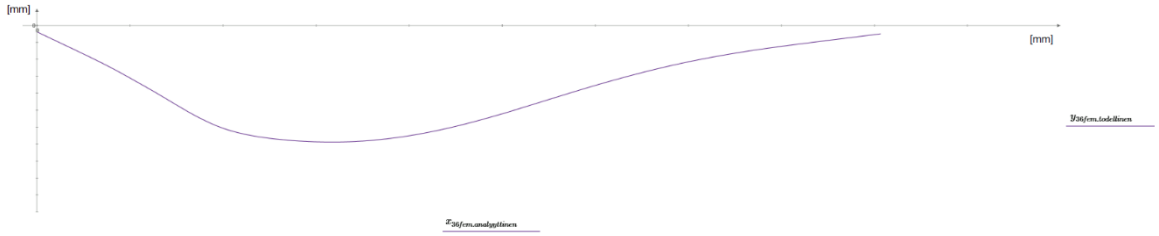
Kuva 23. M / EI-kuvaaja 36 tonnin kokonaismassan kuormituksella hakeperävaunun rungon pituuden suhteen.

Kuvassa 24 on esitetty käsinlaskennan tulos hakeperävaunun rungon pystysuuntainen taipuma 36 tonnin kokonaismassan kuormituksella.



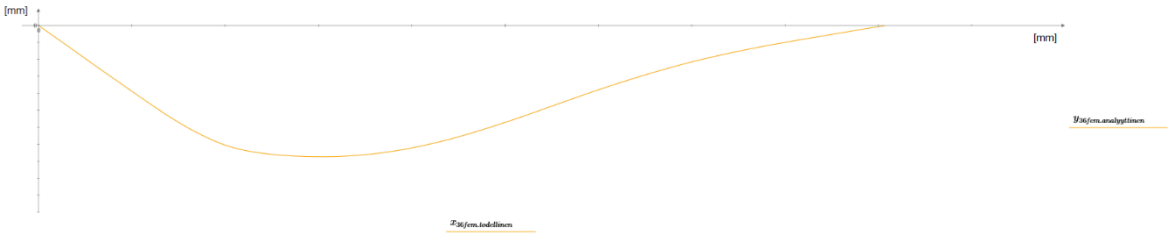
Kuva 24. Käsinlaskettu hakeperävaunun rungon pystysuuntainen taipuma rungon pituuden suhteen 36 tonnin kokonaismassan kuormituksella.

Kuvassa 25 on esitetty hakeperävaunun käsinlaskentaa vertaileva FE-analyysin pystysuuntainen taipuma rungon pituuden suhteen 36 tonnin kokonaismassan kuormalla.



Kuva 25. Käsinlaskentaa vertailevan FE-analyysin hakeperävaunun rungon pystysuuntainen taipuma rungon pituuden suhteen 36 tonnin kokonaismassan kuormituksella.

Kuvassa 26 on esitetty hakeperävaunun 36 tonnin kokonaismassan todellista runkoa vastaavan FEM-mallin pystysuuntainen taipuma rungon pituuden suhteen.



Kuva 26. Hakeperävaunun todellista runkoa vastaavan FE-analyysin taipuma rungon pituuden suhteen 36 tonnin kokonaismassan kuormituksella.

Taulukossa 11 on esitetty hakeperävaunun rungon suurimmat pystysuuntaiset siirtymät 42 ja 36 tonnin kokonaismassan kuormituksella.

Taulukko 11. Hakeperävaunun rungon pystysuuntaiset suurimmat siirtymät kahdella eri kokonaismassan kuormituksella

Kokonaismassa [t]	Pystysuuntainen siirtymä [mm]		
	Käsinlaskenta	Käsinlaskentaa vertaileva FE-analyysi	Todellista runkoa vertaileva FE-analyysi
42	38	36	36
36	31	31	28

5.2 Pystysuuntaisten taipumien *L / x* -arvot

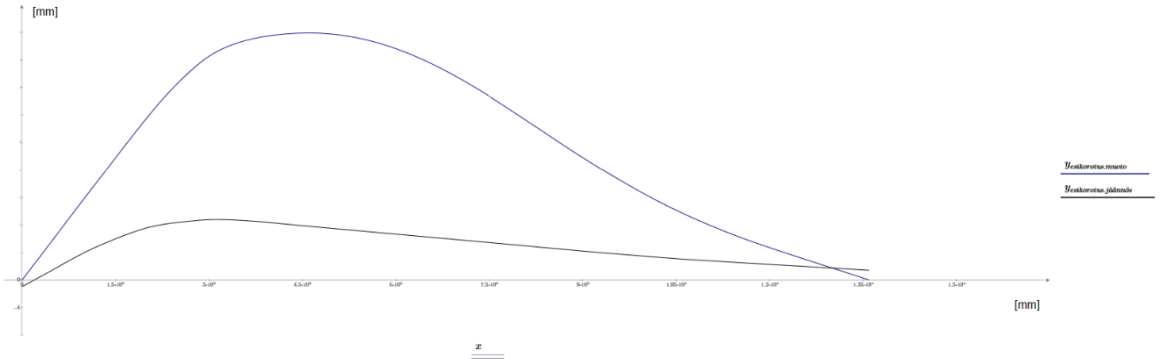
Taulukossa 12 on ilmoitettu eri kuormitustapausten ja laskentatapojen L / x -arvot, joita standardi SFS-EN 1993:1-1 kansallinen liite 9 määrää eri rakenteille.

Taulukko 12. L / x -arvot eri laskentavoilla ja kuormituksilla laskettuna

Kokonaismassa [t]	*L / x* -arvot		
	Käsinlaskenta	Käsinlaskentaa vertaileva FE-analyysi	Todellista runkoa vertaileva FE-analyysi
42	*L / 358*	*L / 378*	*L / 378*
36	*L / 439*	*L / 439*	*L / 486*

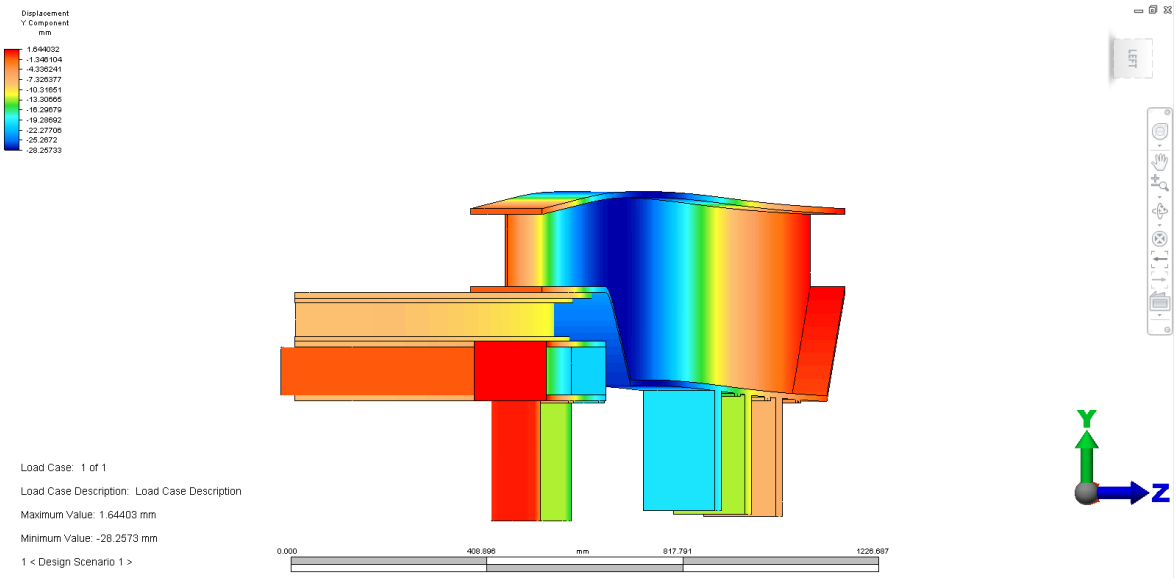
5.3 Hakeperävaunun rungon esikorotus

Tutkimuksessa luotiin esikorotettu hakeperävaunun runko saaduista tutkimuksen tuloksista. Kuvassa 27 on esitetty hakeperävaunun esikorotuksen muoto ja esikorotetun hakeperävaunun rungon taipuma 42 tonnin kokonaismassan kuorman vaikuttaessa.



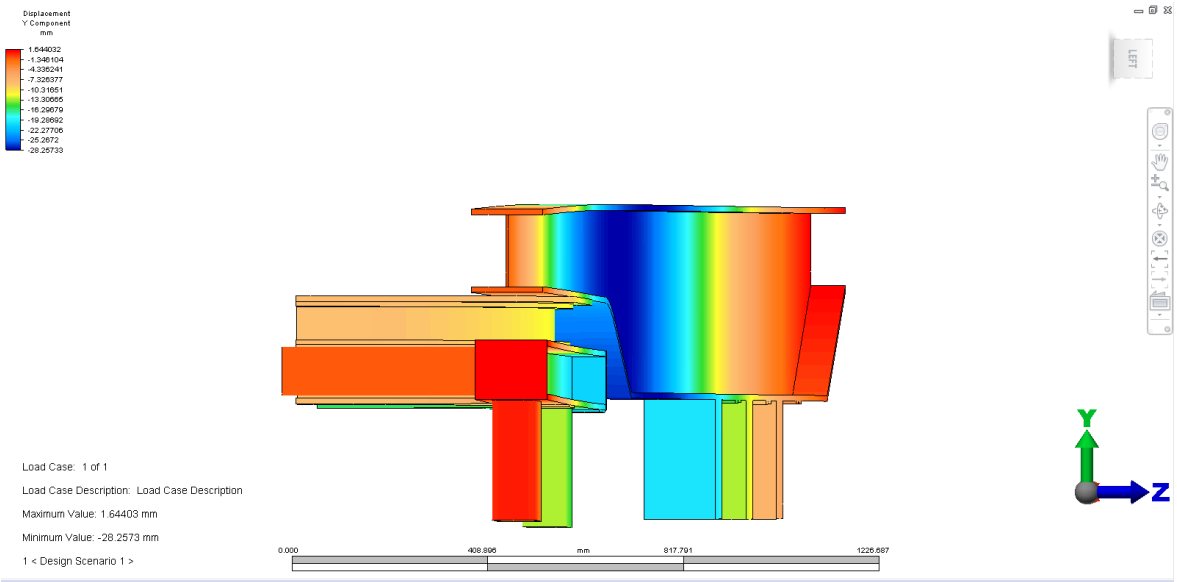
Kuvassa 27. Hakeperävaunun rungon esikorotus ja esikorotetun rungon taipuma 42 tonnin kokonaismassan kuorman vaikuttaessa.

Kuvassa 28 on esitetty tutkimuksessa määritetyn hakeperävaunun esikorotus 42 tonnin kokonaismassan kuormituksella.



Kuva 28. Esikorotettu runko edestä päin kuvattuna 42 tonnin kokonaismassalla kuormittamattomana.

Kuvassa 29 on esitetty tutkimuksessa määritetyn hakeperävaunun esikorotuksen taipunut runko. Taipuman suhde kuvassa 29 on 1:1.



Kuva 29. Esikorotettu hakeperävaunun runko edestä päin kuvattuna 42 tonnin kokonaismassalla kuormitettuna taipuman suhde on 1:1.

6 TULOSTEN ANALYSOINTI

Eri laskentatavoilla saadut pystysuuntaiset taipumat vastaavat hyvin toisiaan, tosin pientä tulosten vaihtelua on havaittavissa. Käsinlaskennassa ja käsinlaskentaa vertailevassa FE-analyysissa hakeperävaunun rungon päädyt A ja B pysyvät paikallaan y-akselin suuntaisesti kuormaamattomana ja kuormitettuna, koska pisteet A ja B ovat nivel- ja rullatuilla kiinnitetty. Todellista runkoa kuvaavassa FEM-mallissa hakeperävaunun rungon päädyt A ja B liikkuvat y-akselin suuntaisesti kuormitettaessa, koska päädyt A ja B eivät ole tuettu y-akselin suuntaan.

Hakeperävaunun 42 tonnin kokonaismassan kuormituksella todellista hakeperävaunun runkoa kuvaavan FEM-mallin rungon päädyt nousevat yli kuormittamattoman lähtötason, kun muu runko taipuu lähtötason alapuolelle. 36 tonnin kokonaismassan kuormituksella samaiset päädyt laskevat saman lähtötason alapuolelle muun rungon taipuessa rungon päitä enemmän lähtötason alapuolelle. 36 tonnin kokonaismassan kuormituksella akseleille kohdistuvat massat ovat tasaisempia koko rungon pituudelta, mikä vaikuttaa hakeperävaunun kuormituksen muotoon eli kuormitus 36 tonnin kokonaismassalla on tasaisempi kuin 42 tonnin kokonaismassan kuormituksella. Kuormituksen muotoa hakeperävaunun etu- ja takapäässä on havainnollistettu taulukossa 8.

Käsinlaskennan pystysuuntaisten taipumien kuvaajat ovat kulmikkaampia kuin FE-analyysilla lasketut pystysuuntaisten taipumien kuvaajat, koska käsinlaskennassa on käytetty vähemmän laskentapisteitä.

Hakeperävaunun rungon suurimmasta pystysuuntaisesta siirtymästä saatu L / x -arvo on käsinlaskentaa vertailevassa FE-analyysissa 5,3 % pienempi kuin käsinlaskennasta saatu arvo 42 tonnin kokonaismassan kuormituksella. Käsinlaskentaa vertailevan FE-analyysin ja todellista runkoa vertailevan FE-analyysin suurimmat pystysuuntaiset siirtymät vastaavat toisiaan.

36 tonnin kokonaismassan kuormituksella käsinlaskennan ja käsinlaskentaa vertailevan FE-analyysin L / x -arvot vastaavat toisiaan. 36 tonnin kokonaismassan kuormituksella todellista runkoa kuvaavan FE-analyysin L / x -arvo on 9,7 % pienempi kuin käsinlaskentaa vertaileva FE-analyysi.

42 tonnin kokonaismassan taipumatarkastelun *L / x* -arvojen vaihteluväli on *L / 358* - *L / 378* ja 36 tonnin kokonaismassan taipumatarkastelun *L / x* -arvojen vaihteluväli on *L / 439* - *L / 486*. Kun tutkimuksessa saatuja *L / x* -arvoja verrataan suurpiirteisesti standardin SFS-EN 1993-1-1 kansallisen liitteen 9 *L / x* -arvojen vaihteluväliin, huomataan *L / x*-arvojen olevan samaa suuruusluokkaa.

Tutkimuksessa määritetty esikorotus jää hieman tavoitteestaan. Pyrittäessä täysin vaakatason taipumaan muuttumattomien kuormien vaikuttaessa, täytyisi suoran rungon ja esikorotetun rungon taivutusjäyhyyksien olla täysin samat. Kuvassa 29 näkyy, ettei runko taivu täysin vaakatasoon, koska taivutusjäyhyydet eivät ole täysin samoja suorassa ja esikorotetussa hakeperävaunun rungossa.

7 JOHTOPÄÄTÖKSET

Tutkimuksessa havaittiin, että kuormitusmuoto vaikuttaa hakeperävaunun rungon taipumaan. Tutkimuksessa laskettiin vain kahden eri kuormituksen vaikutukset hakeperävaunun rungon pystysuuntaiseen taipumaan. Eri kuormitusmuotoja olisi tarkasteltava lisää, jotta tiedettäisiin mahdollisesti eri ääritapausten pystysuuntaiset taipumat.

Käsinlaskenta antaa yksityiskohtaisia tuloksia laskennan eri vaiheista. Näitä eri laskentavaiheita tarkastelemalla voidaan keskittyä kokonaisuuden kannalta merkitsevien yksityiskohtien käsittelyyn. Toisin sanoen voidaan keskittyä tuotteen tuotekehityksessä ongelmakohtien ratkaisuun, eikä yleiskuvan ratkaisuun. Kokonaisuus voidaan käsinlaskennassa pilkkoa osiin ja keskittyä tarkemmin yksittäisen osan ongelman ratkaisemiseen. Eri runkomalleista voidaan esimerkiksi keskittyä M / EI -kuvaajaan, joka vaikuttaa rungon taipumaan.

Tutkimuksessa tarkasteltujen 42 ja 36 tonnin kokonaismassojen kuormitusten muoto hakeperävaunun rungon etu- ja takapään suhteen ovat reilusti eriävät. Homogeenisen kuljetettavan tavaran sivuprofiili on puolisuunnikaskuorman mukainen. Homogeenisella kuljetettavalla tavaralla lastatun korin etupäädyssä on kuljetettavan homogeenisen tavaran korkeus suurempi kuin hakeperävaunun perässä. Jatkotutkimuksessa olisi mielenkiintoista selvittää, mahtuuko homogeenista kuljetettavaa tavaraa hakeperävaunun korin kyytiin tarpeeksi, jos tavoitellaan ajoneuvon käytöstä tiellä olevan asetuksen 1257/1992 momentin 20 mukaisia suurimpia sallittuja telimassoja.

Tutkimuksessa havaittiin, kun taipuma hieman muuttuu FE-analyysin elementtiverkotuksen tai tuentapisteiden sijaintien muutoksesta, muuttuu myös L / x -arvo. Jos hakeperävaunulle tullaan määräämään L / x -arvo, vaatii L / x -arvon määritys lisätutkimuksia.

FE-analyysien elementtiverkkoja ei varioitu tutkimuksen aikana, joten FE-analyysin tuloksia ei voida vakiinnuttaa. Jatkotutkimuksena voisi selvittää, vakiintuvatko FE-analyysien tulokset elementtiverkkoa muuttamalla. Tutkimuksessa ei käsitelty hakeperävaunun dynaamisia kuormituksia. Jatkotutkimuksissa olisi järkevää tutkia dynaamisten kuormitusten vaikutusta hakeperävaunun rungon käyttäytymiseen.
Tavoiteltaessa tietynlaista esikorotuksen vaikutusta rungon pystysuuntaisen taipuman muotoon, olisi otettava yksityiskohtaisesti huomioon vaihtuvat suureet. Tämä vaatisi koh-

tuuttoman paljon työtä saavutettuun hyötyyn nähden, koska tietynlainen esikorotus toimii halutulla tavalla vain tietynlaisella kuormituksella. Tärkeämpää olisi keskittyä esikuormitusmuotojen tutkimiseen ja eri kuormitusmuodoista tehtyyn esikorotuksen tarkasteluun. Esikorotuksen on oltava kompromissi monimutkaisissa rakenteissa.

Laskentamallit ovat erilaisia käsinlaskentaa vertailevissa ja todellista runkoa vertailevissa FE-analyyseissa. Todellista runkoa vertailevan FE-analyysin 3D-mallissa on mallinnettu etuvaunu ja akselipukit, kun käsinlaskentaa vertailevan FE-analyysin 3D-mallissa on mallinnettu vain hakeperävaunun varsinainen runko. Jos tulosten haluaisi vastaavan täysin toisiaan, täytyisi kaikkien muuttujien muun muassa elementtien ja solmujen määrän, 3D-mallin, tuentojen sekä kuormitusten vastata toisiaan. Tutkimuksessa käsinlaskentaan ja todellista runkoa vertailevan FE-analyysin tuloksiin haettiin varmuutta käsinlaskentaa vertailevalla FE-analyysilla. Tulokset vastaavat riittävästi toisiaan, joten Konepaja Antti Ranta Oy:ssä voidaan jatkossa käyttää tutkimuksessa käytettyjä käsinlaskentaa ja todellista runkoa kuvaavaa FE-analyysia tuotekehityksen yhtenä osa-alueena.

LÄHTEET

11.12.2002/1090. Ajoneuvolaki.

407/2013. Valtioneuvoston asetus ajoneuvojen käytöstä tiellä annetun asetuksen muuttamisesta.

670/1997. Asetus ajoneuvojen käytöstä tiellä annetun asetuksen muuttamisesta.

1248/2002. Liikenne- ja viestintäministeriön asetus autojen ja perävaunujen rakenteesta ja varusteista.

4.12.1992/1257. Asetus ajoneuvon käytöstä tiellä.

Design manual modul. Edition 2010-09. SAF Holland Group. 2010. Verkkodokumentti. SAF Hollandin verkkosivusto. 109 s. [Viitattu 5.2.2015]. http://ww1.safholland.nl/sites/damedit/literature/SAF-HOLLAND_Design_handbook_MODUL_en-DE.pdf

Hibbeler, R.C. 2006. Structural analysis. Sixth Edition in SI Units. Singapore: Prentice-Hall. 644 s.

Hitsatut profiilit. 2010. Hitsatut profiilit EN 1993 -käsikirja. Uudistettu 3. painos. Helsinki: Rautaruukki Oyj. 608 s.

Immonen, J. 2015. Insinööri. Konepaja Antti Ranta Oy. Haastattelu 14.1.2015.

Kansallinen liite standardiin SFS-EN 1993-1-1:2005 Eurokoodi 3: Teräsrakenteiden suunnittelu. Osa 1-1: Osa 1-1: Yleiset säännöt ja rakennuksia koskevat säännöt. Ympäristöministeriön asetus Eurocode -standardien soveltamisesta talonrakennuksessa. Helsinki. 15.10.2007. Liite 9. 102 s. Verkkodokumentti. Ympäristöministeriön sivusto. [Viitattu 2.2.2015]. http://www.ym.fi/download/noname/%7B145E3C8B-A8CB-48B4-A3B4-AD53CD9BF2AF%7D/31605

Niemi, E. 2003. Levyrakenteiden suunnittelu. Tekninen tiedotus 2/2003. Helsinki: Teknologiainfo Teknova Oy. 136 s.

Prakash, D.S. 1997. Graphical Methods in Structural Analysis. Hyderguda: Universities Press. 200 s.

Punmia, B.C., Jain, Ashok Kr. & Jain, Arun Kr. 2002. Mechanics of Material. New Delhi: Laxmi Publications. 953 s.

Ranta, A. 2014. Toimitusjohtaja, DI. Konepaja Antti Ranta Oy. Haastattelu 15.10.2014.

Rautiainen, A. 2015. Kuljetusyrittäjä. Karjalan Metsäajo Oy. Haastattelu 15.1.2015.

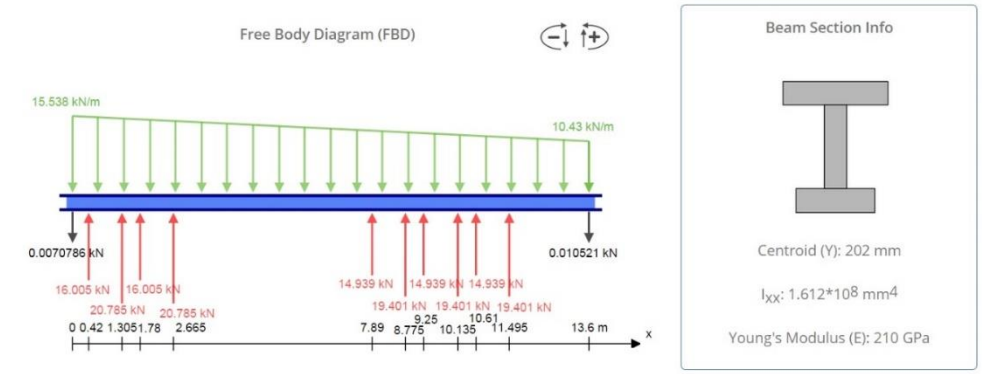
SFS-EN 1990 + A1 + A6. 2006. Eurokoodi. Rakenteiden suunnitteluperusteet. Helsinki: Suomen standardisoimisliitto SFS. 54 s. 94 s.

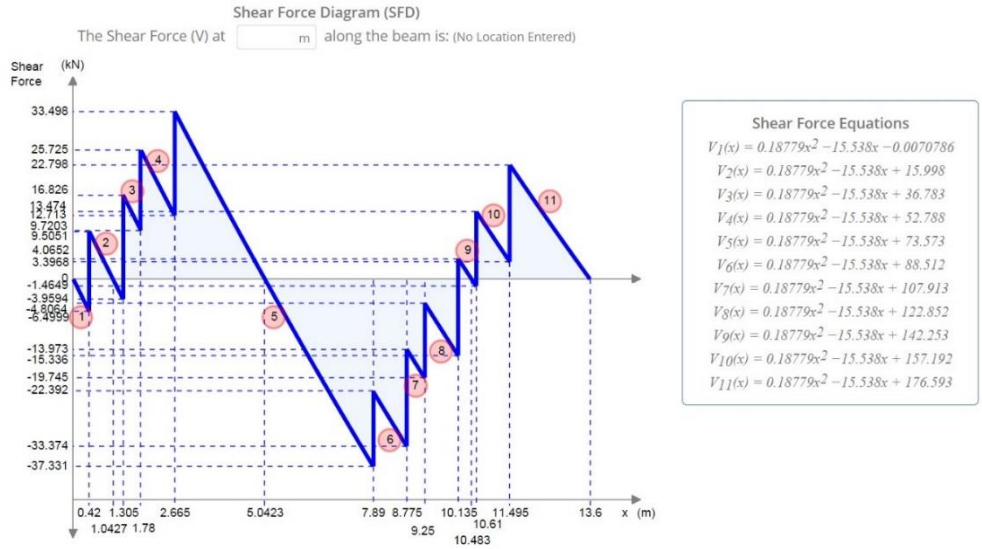
Valtanen, E. 2013. Tekniikan taulukkokirja. 20.painos. Jyväskylä: Genesis-Kirjat Oy. 1194 s.

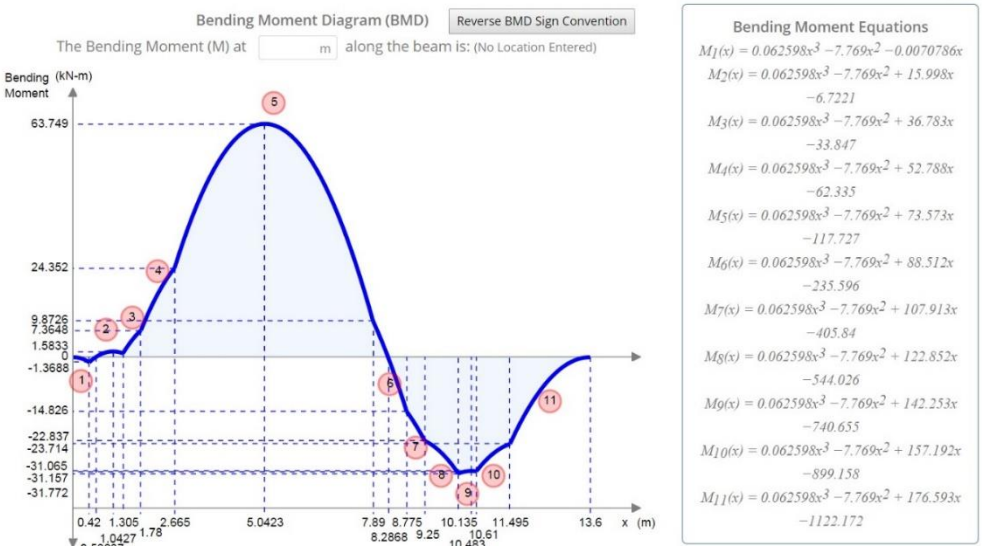
Wabco, 1998. Levelling valve 464 006. Verkkodokumentti. Wabco Product Catalog: Product number -sivusto. [Viitattu 5.3.2015]. http://inform.wabco-auto.com/scripts/download.php?from=/intl/en/inform.php&lang=&keywords=4640060000&file=../intl/ drw/1/1445.pdf

Wireless wheel and axle weighing platforms. Dini Argeo. Verkkodokumentti. Dini Argeon verkkosivusto. 1 s. [Viitattu 31.3.2016]. http://www.diniargeo.com/file/47831-3-2016+19-11-26-813.pdf

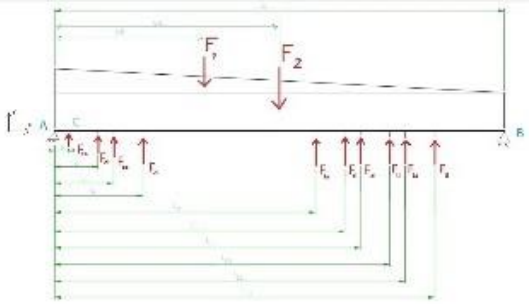
Hakeperävaunun 42 tonnin kokonaismassan kuormituksen vapaakappalekuva, leikkaus- ja momenttikuvaaja.







Voimien F_1 ja F_2 laskenta 42 tonnin kokonaismassan kuormalla, osa 1.



Laskennassa oletetaan voiman ja vastavoima periaatteeseen eli jolloin y-akselin suuntaiset tukireaktiot pisteissä A ja B ovat 0 N. Runko kietyy pisteiden A ja B kautta.

$F_{ea} := 19204 \cdot N$ $\quad F_{ia} := 17071 \cdot N$

$F_{eb} := 24941 \cdot N$ $\quad F_{ib} := 22169 \cdot N$

$l := 13600 \cdot mm$

$l_3 := 420 \cdot mm$

$l_4 := 1305 \cdot mm$

$l_5 := 1780 \cdot mm$

$l_6 := 2665 \cdot mm$

$l_7 := 7890 \cdot mm$

$l_8 := 8775 \cdot mm$

$l_9 := 9250 \cdot mm$

$l_{10} := 10135 \cdot mm$

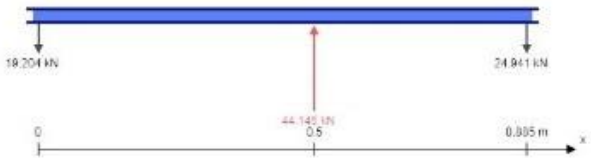
$l_{11} := 10610 \cdot mm$

$l_{12} := 11495 \cdot mm$

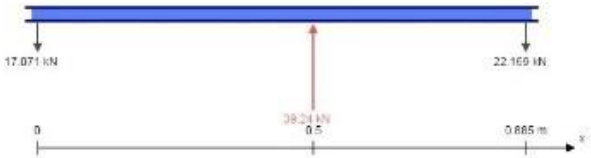
$F_A := 0 \cdot N$

$F_B := 0 \cdot N$

Etuvaunun akselipaino 9 tonnia



Taka-telin akselipaino 8 tonnia



$M_C = 0$

$$-F_A \cdot l_3 + F_{ea} \cdot (l_4 - l_3) + F_{ea} \cdot (l_5 - l_3) + F_{ea} \cdot (l_6 - l_3) - F_1 \cdot \left(\frac{l}{3} - l_3\right) - F_2 \cdot \left(\frac{l}{2} - l_3\right) + F_{ia} \cdot (l_7 - l_3) + F_{ia} \cdot (l_8 - l_3) + F_{ia} \cdot (l_9 - l_3) + F_{ia} \cdot (l_{10} - l_3) + F_{ia} \cdot (l_{11} - l_3) + F_{ia} \cdot (l_{12} - l_3) + F_B \cdot (l - l_3) \xrightarrow{solve, F_2} \frac{240501813 \cdot N}{1276} - \frac{617 \cdot F_1}{957}$$

$$F_{ea} \cdot (l_4 - l_3) + F_{ea} \cdot (l_5 - l_3) + F_{ea} \cdot (l_6 - l_3) - F_1 \cdot \left(\frac{l}{3} - l_3\right) - F_2 \cdot \left(\frac{l}{2} - l_3\right) + F_{ia} \cdot (l_7 - l_3) + F_{ia} \cdot (l_8 - l_3) + F_{ia} \cdot (l_9 - l_3) + F_{ia} \cdot (l_{10} - l_3) + F_{ia} \cdot (l_{11} - l_3) + F_{ia} \cdot (l_{12} - l_3) + F_B \cdot (l - l_3) \xrightarrow{solve, F_1} \frac{721505439 \cdot N}{2468} - \frac{957 \cdot F_2}{617}$$

$\Sigma F_y = 0$

$$F_A + F_{ea} + F_{ea} + F_{ea} + F_{ea} - F_1 - F_2 + F_{ia} + F_{ia} + F_{ia} + F_{ia} + F_{ia} + F_{ia} + F_B \xrightarrow{solve, F_2} 206010 \cdot N - F_1$$

$$F_A + F_{ea} + F_{ea} + F_{ea} + F_{ea} - F_1 - F_2 + F_{ia} + F_{ia} + F_{ia} + F_{ia} + F_{ia} + F_{ia} + F_B \xrightarrow{solve, F_1} 206010 \cdot N - F_2$$

$$F_1 := 206010 \cdot N - F_1 = \frac{240501813 \cdot N}{1276} - \frac{617 \cdot F_1}{957} \xrightarrow{solve, F_1} \frac{67100841 \cdot N}{1360} = 49.339\ kN$$

$$F_2 := 206010 \cdot N - F_2 = \frac{721505439 \cdot N}{2468} - \frac{957 \cdot F_2}{617} \xrightarrow{solve, F_2} \frac{213072759 \cdot N}{1360} = 156.671\ kN$$

Lasketaan resultanttivoimista F1 ja F2 puolisuunnikaskuorma

$$F_2 = l \cdot w_{F2} \qquad w_{F2} := \frac{F_2}{l} = 11.52\ \frac{kN}{m}$$

$$F_1 = \frac{l \cdot w_{F1}}{2} \qquad w_{F1} := \frac{F_1 \cdot 2}{l} = 7.256\ \frac{kN}{m}$$

Etupäässä

$$w_{etu} := w_{F1} + w_{F2} = 18.776\ \frac{kN}{m}$$

$$p_{etu} := \frac{w_{etu} \cdot l}{150 \cdot mm \cdot l} = 0.125\ MPa$$

Takapäässä

$$w_{F2} = 11.52\ \frac{kN}{m}$$

$$p_{taka} := \frac{w_{F2} \cdot l}{150\ mm \cdot l} = 0.077\ MPa$$

Vaihtuvan paineen yhtälö

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad y - y_0 = k\,(x - x_0) \qquad x := 0, 1 .. 13600$$

$$k := \frac{0.077 - 0.125}{13600 - 0} = -3.529 \cdot 10^{-6}$$

$$y(x) := -3.529 \cdot 10^{-6} \cdot x - 0.077$$

42 tonnin kokonaismassan kuormituksen *M / EI* -kuvaajan laskenta, osa 1.

$$S := \frac{I_{380}}{I_{150}} = 6.43$$

$$x_1 := 0, 0.01 .. 0.42$$

$$M_1(x_1) := S \cdot \left(0.088922 \cdot x_1^3 - 9.388 \cdot x_1^2 + 0.0017244 \cdot x_1\right)$$

$$x_2 := 0.42, 0.43 .. 1.305$$

$$M_2(x_2) := S \cdot \left(0.088922 \cdot x_2^3 - 9.388 \cdot x_2^2 + 19.206 \cdot x_2 - 8.0657\right)$$

$$x_3 := 1.305, 1.306 .. 1.78$$

$$M_3(x_3) := S \cdot \left(0.088922 \cdot x_3^3 - 9.388 \cdot x_3^2 + 44.147 \cdot x_3 - 40.614\right)$$

$$x_4 := 1.78, 1.79 .. 2.665$$

$$M_4(x_4) := S \cdot \left(0.088922 \cdot x_4^3 - 9.388 \cdot x_4^2 + 63.351 \cdot x_4 - 74.797\right)$$

$$x_{51} := 2.665, 2.666 .. 2.829$$

$$M_{51}(x_{51}) := S \cdot \left(0.088922 \cdot x_{51}^3 - 9.388 \cdot x_{51}^2 + 88.292 \cdot x_{51} - 141.265\right)$$

$$x_{52} := 2.829, 2.830 .. 3.241$$

$$M_{52}(x_{52}) := 0.088922 \cdot x_{52}^3 - 9.388 \cdot x_{52}^2 + 88.292 \cdot x_{52} - 141.265$$

$$x_{53} := 3.241, 3.242 .. 3.927$$

$$M_{53}(x_{53}) := 0.088922 \cdot x_{53}^3 - 9.388 \cdot x_{53}^2 + 88.292 \cdot x_{53} - 141.265$$

$$x_{54} := 3.927, 3.928 .. 4.339$$

$$M_{54}(x_{54}) := 0.088922 \cdot x_{54}^3 - 9.388 \cdot x_{54}^2 + 88.292 \cdot x_{54} - 141.265$$

$$x_{52} := 2.829, 2.830 .. 3.241$$

$$M_{52S}(x_{52}) := \left(\frac{\dfrac{0.15 \cdot 0.404^3 - 0.145 \cdot 0.38^3}{12}}{\dfrac{0.15 \left(\left(-\sqrt{2^2 - (x_{52} - 2.829)^2} + 2.150\right) + 0.024\right)^3 - 0.145 \cdot \left(-\sqrt{2^2 - (x_{52} - 2.829)^2} + 2.150\right)^3}{12}} \right) \cdot \left(0.088922 \cdot x_{52}^3 - 9.388 \cdot x_{52}^2 + 88.292 \cdot x_{52} - 141.265\right)$$

$$x_{53} := 3.241, 3.283 .. 3.927$$

$$M_{53S}(x_{53}) := \left(\frac{\dfrac{0.15 \cdot 0.404^3 - 0.145 \cdot 0.38^3}{12}}{\dfrac{0.15 \left((0.21 (x_{53}) - 0.488) + 0.024\right)^3 - 0.145 \cdot (0.21 (x_{53}) - 0.488)^3}{12}} \right) \cdot \left(0.088922 \cdot x_{53}^3 - 9.388 \cdot x_{53}^2 + 88.292 \cdot x_{53} - 141.265\right)$$

42 tonnin kokonaismassan kuormituksen *M / EI* -kuvaajan laskenta, osa 2.

$M_{55}(x_{55}) = 0.088922 \cdot x_{55}^3 - 9.388 \cdot x_{55}^2 + 88.292 \cdot x_{55} - 141.265$

$x_6 = 7.89, 7.90 .. 8.775$

$M_6(x_6) = 0.088922 \cdot x_6^3 - 9.388 \cdot x_6^2 + 105.363 \cdot x_6 - 275.955$

$x_7 = 8.775, 8.776 .. 9.25$

$M_7(x_7) = 0.088922 \cdot x_7^3 - 9.388 \cdot x_7^2 + 127.532 \cdot x_7 - 470.488$

$x_8 = 9.25, 9.26 .. 10.135$

$M_8(x_8) = 0.088922 \cdot x_8^3 - 9.388 \cdot x_8^2 + 144.603 \cdot x_8 - 628.394$

$x_9 = 10.135, 10.136 .. 10.61$

$M_9(x_9) = 0.088922 \cdot x_9^3 - 9.388 \cdot x_9^2 + 166.772 \cdot x_9 - 853.077$

$x_{10} = 10.61, 10.62 .. 11.495$

$M_{10}(x_{10}) = 0.088922 \cdot x_{10}^3 - 9.388 \cdot x_{10}^2 + 183.843 \cdot x_{10} - 1034.201$

$x_{11} = 11.495, 11.496 .. 13.6$

$M_{11}(x_{11}) = 0.088922 \cdot x_{11}^3 - 9.388 \cdot x_{11}^2 + 206.012 \cdot x_{11} - 1289.033$

$x_{54} = 3.927, 3.968 .. 4.339$

$$M_{545}(x_{54}) = \left(\frac{\frac{0.15 \cdot 0.404^3 - 0.145 \cdot 0.38^3}{12}}{\frac{0.15 \left(\left(\sqrt{2^2 - (x_{54} - 4.339)^2} - 1.62 \right) + 0.024 \right)^3 - 0.145 \cdot \left(\sqrt{2^2 - (x_{54} - 4.339)^2} - 1.62 \right)^3}{12}} \right) \cdot \left(0.088922 \cdot x_{54}^3 - 9.388 \cdot x_{54}^2 + 88.292 \cdot x_{54} - 141.265 \right)$$

Momentti 1

$a_1 = \int_0^{0.42} M_1(x_1)\, dx_1 = -1.485$ pinta-ala $\frac{a_1}{E \cdot I}$

$m_{x1} = \int_0^{0.42} x_1 \cdot M_1(x_1)\, dx_1 = -0.468$ momenttivarsi

$x_{1bar} := \frac{m_{x1}}{a_1} = 0.315$ painopiste

Momentti 2

$a_2 = \int_{0.42}^{0.588} M_2(x_2)\, dx_2 = -0.844$ pinta-ala

$m_{x2} = \int_{0.42}^{0.588} x_2 \cdot M_2(x_2)\, dx_2 = -0.4$ momenttivarsi

$x_{2bar} := \frac{m_{x2}}{a_2} = 0.474$ painopiste

Momentti 21 Momentin nollakohta

$a_{21} = \int_{0.588}^{1.305} M_2(x_2)\, dx_2 = 6.392$ pinta-ala

$m_{x21} = \int_{0.42}^{1.305} x_2 \cdot M_2(x_2)\, dx_2 = 5.982$ momenttivarsi

$x_{21bar} := \frac{m_{x21}}{a_{21}} = 0.936$ painopiste

42 tonnin kokonaismassan kuormituksen *M / EI* -kuvaajan laskenta, osa 3.

Momentti 3

$a_3 := \int_{1.305}^{1.78} M_3(x_3)\,dx_3 = 16.199$ pinta-ala

$m_{z3} := \int_{1.305}^{1.78} x_3 \cdot M_3(x_3)\,dx_3 = 25.896$ momenttivarsi

$x_{3bar} := \frac{m_{z3}}{a_3} = 1.599$ painopiste

Momentti 4

$a_4 := \int_{1.78}^{2.665} M_4(x_4)\,dx_4 = 113.993$ pinta-ala

$m_{z4} := \int_{1.78}^{2.665} x_4 \cdot M_4(x_4)\,dx_4 = 261.873$ momenttivarsi

$x_{4bar} := \frac{m_{z4}}{a_4} = 2.297$ painopiste

Momentti 51 joutsenkaulan kohdalla

$a_{51} := \int_{2.665}^{2.829} M_{51}(x_{51})\,dx_{51} = 34.016$ pinta-ala

$m_{z51} := \int_{2.665}^{2.829} x_{51} \cdot M_{51}(x_{51})\,dx_{51} = 93.533$ momenttivarsi

$x_{51bar} := \frac{m_{z51}}{a_{51}} = 2.75$ painopiste

$a_{52S} := \int_{2.829}^{3.241} M_{52S}(x_{52})\,dx_{52} = 95.028$ pinta-ala

$m_{z52S} := \int_{2.829}^{3.241} x_{52} \cdot M_{52S}(x_{52})\,dx_{52} = 287.882$ momenttivarsi

$x_{52Sbar} := \frac{m_{z52S}}{a_{52S}} = 3.029$ painopiste

Momentti 53S joutsenkaulan vino osa

$a_{53S} := \int_{3.241}^{3.927} M_{53S}(x_{53})\,dx_{53} = 88.352$ pinta-ala

$m_{z53S} := \int_{3.241}^{3.927} x_{53} \cdot M_{53S}(x_{53})\,dx_{53} = 312.487$ momenttivarsi

$x_{53Sbar} := \frac{m_{z53S}}{a_{53S}} = 3.537$ painopiste

Momentti 54S joutsenkaulan kaareva osa

$a_{54S} := \int_{3.927}^{4.339} M_{54S}(x_{54})\,dx_{54} = 31.044$ pinta-ala

$m_{z54S} := \int_{3.927}^{4.339} x_{54} \cdot M_{54S}(x_{54})\,dx_{54} = 128.137$ momenttivarsi

$x_{54Sbar} := \frac{m_{z54S}}{a_{54S}} = 4.128$ painopiste

$x_{21bar} := \frac{m_{z21}}{a_{21}} = 0.936$ painopiste

Momentti 55 rungon paksuimmalla osalla

$a_{55} := \int_{4.339}^{7.89} M_{55}(x_{55})\,dx_{55} = 212.29$ pinta-ala

$m_{z55} := \int_{4.339}^{7.89} x_{55} \cdot M_{55}(x_{55})\,dx_{55} = 1.237 \cdot 10^3$ momenttivarsi

$x_{55bar} := \frac{m_{z55}}{a_{55}} = 5.827$ painopiste

Momentti 6 rungon paksuimmalla osalla

$a_6 := \int_{7.89}^{8.381} M_6(x_6)\,dx_6 = 3.734$ pinta-ala

$m_{z6} := \int_{7.89}^{8.381} x_6 \cdot M_6(x_6)\,dx_6 = 30.081$ momenttivarsi

$x_{6bar} := \frac{m_{z6}}{a_6} = 8.057$ painopiste

Momentti 61 rungon paksuimmalla osalla Momentin nollakohta

$a_{61} := \int_{8.381}^{8.775} M_6(x_6)\,dx_6 = -2.721$ pinta-ala

$m_{z61} := \int_{8.381}^{8.775} x_6 \cdot M_6(x_6)\,dx_6 = -23.522$ momenttivarsi

$x_{61bar} := \frac{m_{z61}}{a_{61}} = 8.646$ painopiste

42 tonnin kokonaismassan kuormituksen *M / EI* -kuvaajan laskenta, osa 4.

Momentti 7 rungon paksuimmalla osalla

$a_7 := \int_{8.775}^{9.25} M_7(x_7)\,dx_7 = -8.875$ pinta-ala

$m_{x7} := \int_{8.775}^{9.25} x_7 \cdot M_7(x_7)\,dx_7 = -80.165$ momenttivarsi

$x_{7bar} := \frac{m_{x7}}{a_7} = 9.033$ painopiste

Momentti 8 rungon paksuimmalla osalla

$a_8 := \int_{9.25}^{10.135} M_8(x_8)\,dx_8 = -25.007$ pinta-ala

$m_{x8} := \int_{9.25}^{10.135} x_8 \cdot M_8(x_8)\,dx_8 = -243.09$ momenttivarsi

$x_{8bar} := \frac{m_{x8}}{a_8} = 9.721$ painopiste

Momentti 9 rungon paksuimmalla osalla

$a_9 := \int_{10.135}^{10.61} M_9(x_9)\,dx_9 = -16.23$ pinta-ala

$m_{x9} := \int_{10.135}^{10.61} x_9 \cdot M_9(x_9)\,dx_9 = -168.339$ momenttivarsi

$x_{9bar} := \frac{m_{x9}}{a_9} = 10.372$ painopiste

Momentti 10 rungon paksuimmalla osalla

$a_{10} := \int_{10.61}^{11.495} M_{10}(x_{10})\,dx_{10} = -26.068$ pinta-ala

$m_{x10} := \int_{10.61}^{11.495} x_{10} \cdot M_{10}(x_{10})\,dx_{10} = -287.604$ momenttivarsi

$x_{10bar} := \frac{m_{x10}}{a_{10}} = 11.033$ painopiste

Momentti 11 rungon paksuimmalla osalla

$a_{11} := \int_{11.495}^{13.6} M_{11}(x_{11})\,dx_{11} = -18.333$ pinta-ala

$m_{x11} := \int_{11.495}^{13.6} x_{11} \cdot M_{11}(x_{11})\,dx_{11} = -220.332$ momenttivarsi

$x_{11bar} := \frac{m_{x11}}{a_{11}} = 12.018$ painopiste

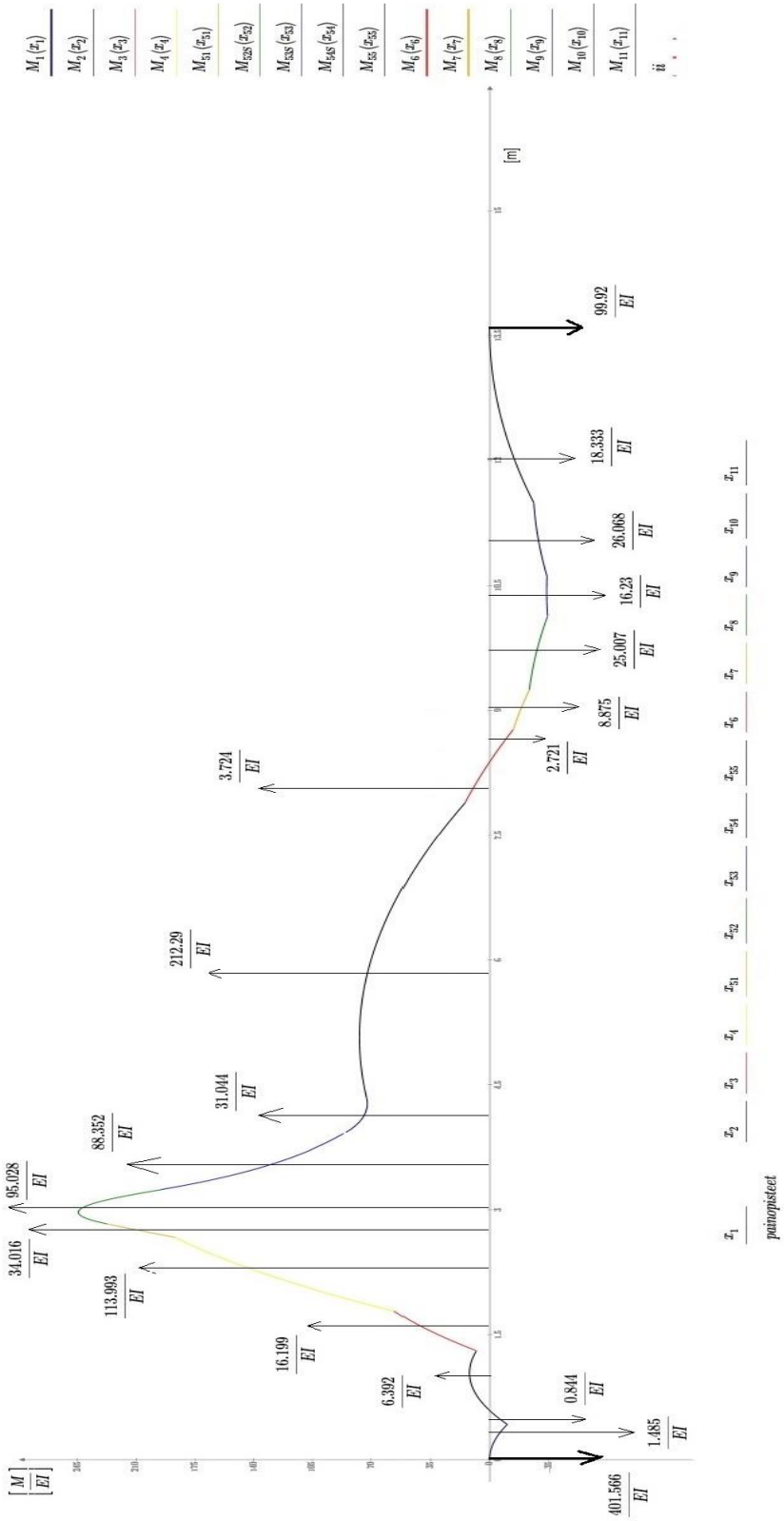
$$F_A = a_1 \cdot (l - x_{1bar}) + a_2 \cdot (l - x_{2bar}) + a_{21} \cdot (l - x_{21bar}) + a_3 \cdot (l - x_{3bar}) + a_4 \cdot (l - x_{4bar}) + a_{51} \cdot (l - x_{51bar}) + a_{525} \cdot (l - x_{525bar}) + a_{535} \cdot (l - x_{535bar}) + a_{545} \cdot (l - x_{545bar}) + a_{55} \cdot (l - x_{55bar}) + a_6 \cdot (l - x_{6bar}) + a_{61} \cdot (l - x_{61bar}) + a_7 \cdot (l - x_{7bar}) + a_8 \cdot (l - x_{8bar}) + a_9 \cdot (l - x_{9bar}) + a_{10} \cdot (l - x_{10bar}) + a_{11} \cdot (l - x_{11bar}) - F_A \cdot l \xrightarrow{solve, F_A} 401.5655$$

Fy=0

$$F_B := -F_A + a_1 + a_2 + a_{21} + a_3 + a_4 + a_{51} + a_{525} + a_{535} + a_{545} + a_{55} + a_6 + a_{61} + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} - F_B \xrightarrow{solve, F_B} 99.91969175860982645 = 99.92$$

$F_A = 401.566$ $\frac{401.566}{EI}$ $F_B = 99.92$ $\frac{99.92}{EI}$

M / EI -kuvaaja 42 tonnin kokonaismassan kuormituksella.



Taipumien laskenta 42 tonnin kokonaismassan kuormituksella, osa 1.

$E = 210 \cdot 10^{6}$ $\qquad I = 161.2 \cdot 10^{6} \cdot 10^{-15}$

pisteessä 0,42

$$\frac{F_A}{E \cdot I} \cdot (0.42 - 0) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot (0.42 - x_{1bar}) + M_{0.42} \xrightarrow{solve, M_{0.42}} -4.986812003500216911 = -4.987$$

pisteessä 0,588

$l_{0.588} = 0.588$

$$\frac{F_A}{E \cdot I} \cdot (l_{0.588} - 0) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot (l_{0.588} - x_{1bar}) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot (l_{0.588} - x_{2bar}) + M_{0.588} \xrightarrow{solve, M_{0.588}} -6.9898949160498882252 = -6.99$$

pisteessä 1,305

$l_{1.305} = 1.305$

$$\frac{F_A}{E \cdot I} \cdot (l_{1.305} - 0) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot (l_{1.305} - x_{1bar}) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot (l_{1.305} - x_{2bar}) - \frac{a_{21}}{E \cdot I} \cdot (l_{1.305} - x_{21bar}) + M_{1.305} \xrightarrow{solve, M_{1.305}} -15.47484196681744275 = -15.475$$

pisteessä 1.78

$l_{1.78} = 1.78$

$$\frac{F_A}{E \cdot I} \cdot (l_{1.78} - 0) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot (l_{1.78} - x_{1bar}) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot (l_{1.78} - x_{2bar}) - \frac{a_{21}}{E \cdot I} \cdot (l_{1.78} - x_{21bar}) - \frac{a_3}{E \cdot I} \cdot (l_{1.78} - x_{3bar}) + M_{1.78} \xrightarrow{solve, M_{1.78}} -20.965656151918874369 = -20.966$$

pisteessä 2.665

$l_{2.665} = 2.665$

$$\frac{F_A}{E \cdot I} \cdot (l_{2.665} - 0) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot (l_{2.665} - x_{1bar}) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot (l_{2.665} - x_{2bar}) - \frac{a_{21}}{E \cdot I} \cdot (l_{2.665} - x_{21bar}) - \frac{a_3}{E \cdot I} \cdot (l_{2.665} - x_{3bar}) - \frac{a_4}{E \cdot I} \cdot (l_{2.665} - x_{4bar}) + M_{2.665} \xrightarrow{solve, M_{2.665}} -29.695895609661294771 = -29.696$$

pisteessä 2.829

$l_{2.829} = 2.829$

$$\frac{F_A}{E \cdot I} \cdot (l_{2.829} - 0) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot (l_{2.829} - x_{1bar}) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot (l_{2.829} - x_{2bar}) - \frac{a_{21}}{E \cdot I} \cdot (l_{2.829} - x_{21bar}) - \frac{a_3}{E \cdot I} \cdot (l_{2.829} - x_{3bar}) - \frac{a_4}{E \cdot I} \cdot (l_{2.829} - x_{4bar}) - \frac{a_{51}}{E \cdot I} \cdot (l_{2.829} - x_{51bar}) + M_{2.829} \xrightarrow{solve, M_{2.829}} -30.911221500076486884 = -30.911$$

Taipumien laskenta 42 tonnin kokonaismassan kuormituksella, osa 2.

pisteessä 3.241

$l_{3.241} := 3.241$

$$\frac{F_A}{E \cdot I} \cdot \left(l_{3.241} - 0\right) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot \left(l_{3.241} - x_{1bar}\right) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot \left(l_{3.241} - x_{2bar}\right) - \frac{a_{21}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{3.241} - x_{21bar}\right) - \frac{a_3}{E \cdot I} \cdot \left(l_{3.241} - x_{3bar}\right) - \frac{a_4}{E \cdot I} \cdot \left(l_{3.241} - x_{4bar}\right) - \frac{a_{51}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{3.241} - x_{51bar}\right) - \frac{a_{528}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{3.241} - x_{528bar}\right) + M_{3.241} \xrightarrow{solve, M_{3.241}} -34.580994876686160162 = -34.581$$

pisteessä 3.927

$l_{3.927} := 3.927$

$$\frac{F_A}{E \cdot I} \cdot \left(l_{3.927} - 0\right) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot \left(l_{3.927} - x_{1bar}\right) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot \left(l_{3.927} - x_{2bar}\right) - \frac{a_{21}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{3.927} - x_{21bar}\right) - \frac{a_3}{E \cdot I} \cdot \left(l_{3.927} - x_{3bar}\right) - \frac{a_4}{E \cdot I} \cdot \left(l_{3.927} - x_{4bar}\right) - \frac{a_{51}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{3.927} - x_{51bar}\right) - \frac{a_{528}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{3.927} - x_{528bar}\right) - \frac{a_{538}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{3.927} - x_{538bar}\right) + M_{3.927} \xrightarrow{solve, M_{3.927}} -36.364580519965575357 = -36.365$$

pisteessä 4.339

$l_{4.339} := 4.339$

$$\frac{F_A}{E \cdot I} \cdot \left(l_{4.339} - 0\right) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot \left(l_{4.339} - x_{1bar}\right) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot \left(l_{4.339} - x_{2bar}\right) - \frac{a_{21}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{4.339} - x_{21bar}\right) - \frac{a_3}{E \cdot I} \cdot \left(l_{4.339} - x_{3bar}\right) - \frac{a_4}{E \cdot I} \cdot \left(l_{4.339} - x_{4bar}\right) - \frac{a_{51}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{4.339} - x_{51bar}\right) - \frac{a_{528}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{4.339} - x_{528bar}\right) - \frac{a_{538}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{4.339} - x_{538bar}\right) - \frac{a_{548}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{4.339} - x_{548bar}\right) + M_{4.339} \xrightarrow{solve, M_{4.339}} -36.778204977035013491 = -36.778$$

$$a_{551} := \int_{4.339}^{4.7} M_{55}\left(x_{55}\right) dx_{55} = 26.762$$ pinta-ala

$$m_{z551} := \int_{4.339}^{4.7} x_{55} \cdot M_{55}\left(x_{55}\right) dx_{55} = 120.985$$ momenttivarsi

$$x_{551bar} := \frac{m_{z551}}{a_{551}} = 4.521$$ painopiste

pisteessä 4.7

$l_{4.7} := 4.7$

$$\frac{F_A}{E \cdot I} \cdot \left(l_{4.7} - 0\right) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot \left(l_{4.7} - x_{1bar}\right) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot \left(l_{4.7} - x_{2bar}\right) - \frac{a_{21}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{4.7} - x_{21bar}\right) - \frac{a_3}{E \cdot I} \cdot \left(l_{4.7} - x_{3bar}\right) - \frac{a_4}{E \cdot I} \cdot \left(l_{4.7} - x_{4bar}\right) - \frac{a_{51}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{4.7} - x_{51bar}\right) - \frac{a_{528}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{4.7} - x_{528bar}\right) - \frac{a_{538}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{4.7} - x_{538bar}\right) - \frac{a_{548}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{4.7} - x_{548bar}\right) - \frac{a_{551}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{4.7} - x_{551bar}\right) + M_{4.7} \xrightarrow{solve, M_{4.7}} -37.870182063107818748 = -37.87$$

pisteessä 7.89

$l_{7.89} := 7.89$

$$M_{7.89} := \frac{F_A}{E \cdot I} \cdot \left(l_{7.89} - 0\right) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot \left(l_{7.89} - x_{1bar}\right) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot \left(l_{7.89} - x_{2bar}\right) - \frac{a_{21}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{7.89} - x_{21bar}\right) - \frac{a_3}{E \cdot I} \cdot \left(l_{7.89} - x_{3bar}\right) - \frac{a_4}{E \cdot I} \cdot \left(l_{7.89} - x_{4bar}\right) - \frac{a_{51}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{7.89} - x_{51bar}\right) - \frac{a_{528}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{7.89} - x_{528bar}\right) - \frac{a_{538}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{7.89} - x_{538bar}\right) - \frac{a_{548}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{7.89} - x_{548bar}\right) - \frac{a_{55}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{7.89} - x_{55bar}\right) + M_{7.89} \xrightarrow{solve, M_{7.89}} -25.823614907171091652 = -25.824 \quad 091652 = -25.824$$

Taipumien laskenta 42 tonnin kokonaismassan kuormituksella, osa 3.

pisteessä 8.381

$l_{8.381} := 8.381$

$$M_{8.381} := \frac{F_A}{E \cdot I} \cdot (l_{8.381} - 0) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot (l_{8.381} - x_{1bar}) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot (l_{8.381} - x_{2bar}) - \frac{a_{21}}{E \cdot I} \cdot (l_{8.381} - x_{21bar}) - \frac{a_3}{E \cdot I} \cdot (l_{8.381} - x_{3bar}) - \frac{a_4}{E \cdot I} \cdot (l_{8.381} - x_{4bar}) - \frac{a_{51}}{E \cdot I} \cdot (l_{8.381} - x_{51bar}) - \frac{a_{525}}{E \cdot I} \cdot (l_{8.381} - x_{535bar}) - \frac{a_{53S}}{E \cdot I} \cdot (l_{8.381} - x_{53Sbar}) - \frac{a_{54S}}{E \cdot I} \cdot (l_{8.381} - x_{54Sbar}) - \frac{a_{55}}{E \cdot I} \cdot (l_{8.381} - x_{52bar}) - \frac{a_6}{E \cdot I} \cdot (l_{8.381} - x_{6bar}) + M_{8.381} \xrightarrow{solve, M_{8.381}} -22.9820279701420152 5 = -22.982$$

pisteessä 8.775

$l_{8.775} := 8.775$

$$M_{8.775} := \frac{F_A}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - 0) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{1bar}) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{2bar}) - \frac{a_{21}}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{21bar}) - \frac{a_3}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{3bar}) - \frac{a_4}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{4bar}) - \frac{a_{51}}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{51bar}) - \frac{a_{525}}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{535bar}) - \frac{a_{53S}}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{53Sbar}) - \frac{a_{54S}}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{54Sbar}) - \frac{a_{55}}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{52bar}) - \frac{a_6}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{6bar}) - \frac{a_{61}}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{61bar}) + M_{8.775} \xrightarrow{solve, M_{8.775}} -20.6974403190494254 7 = -20.697$$

pisteessä 9.25

$l_{9.25} := 9.25$

$$M_{9.25} := \frac{F_A}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - 0) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{1bar}) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{2bar}) - \frac{a_{21}}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{21bar}) - \frac{a_3}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{3bar}) - \frac{a_4}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{4bar}) - \frac{a_{51}}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{51bar}) - \frac{a_{525}}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{535bar}) - \frac{a_{53S}}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{53Sbar}) - \frac{a_{54S}}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{54Sbar}) - \frac{a_{55}}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{52bar}) - \frac{a_6}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{6bar}) - \frac{a_{61}}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{61bar}) - \frac{a_7}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{7bar}) + M_{9.25} \xrightarrow{solve, M_{9.25}} -18.0257981620104139 5 = -18.026$$

pisteessä 10.135

$l_{10.135} := 10.135$

$$M_{10.135} := \frac{F_A}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - 0) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{1bar}) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{2bar}) - \frac{a_{21}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{21bar}) - \frac{a_3}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{3bar}) - \frac{a_4}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{4bar}) - \frac{a_{51}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{51bar}) - \frac{a_{525}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{535bar}) - \frac{a_{53S}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{53Sbar}) - \frac{a_{54S}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{54Sbar}) - \frac{a_{55}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{52bar}) - \frac{a_6}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{6bar}) - \frac{a_{61}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{61bar}) - \frac{a_7}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{7bar}) - \frac{a_8}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{8bar}) + \ldots$$

$$\ldots + M_{10.135} \xrightarrow{solve, M_{10.135}} -13.4798281063279419 61 = -13.480$$

pisteessä 10.61

$l_{10.61} := 10.61$

$$M_{10.61} := \frac{F_A}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - 0) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{1bar}) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{2bar}) - \frac{a_{21}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{21bar}) - \frac{a_3}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{3bar}) - \frac{a_4}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{4bar}) - \frac{a_{51}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{51bar}) - \frac{a_{525}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{535bar}) - \frac{a_{53S}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{53Sbar}) - \frac{a_{54S}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{54Sbar}) - \frac{a_{55}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{52bar}) - \frac{a_6}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{6bar}) - \frac{a_{61}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{61bar}) - \frac{a_7}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{7bar}) - \frac{a_8}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{8bar}) - \ldots$$

$$\ldots - \frac{a_9}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{9bar}) + M_{10.61} \xrightarrow{solve, M_{10.61}} -11.3406771142268275 53 = -11.341$$

Taipumien laskenta 42 tonnin kokonaismassan kuormituksella, osa 4.

pisteessä 11.495

$l_{11.495} := 11.495$

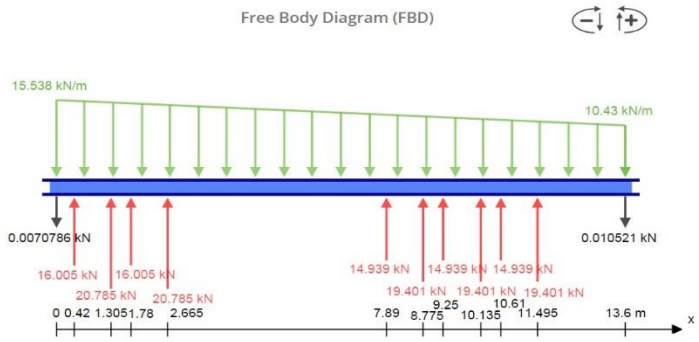
$$M_{11.495} := \frac{F_A}{E \cdot I} \cdot \left(l_{11.495} - 0\right) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot \left(l_{11.495} - x_{1bar}\right) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot \left(l_{11.495} - x_{2bar}\right) - \frac{a_{21}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{11.495} - x_{21bar}\right) - \frac{a_3}{E \cdot I} \cdot \left(l_{11.495} - x_{3bar}\right) - \frac{a_4}{E \cdot I} \cdot \left(l_{11.495} - x_{4bar}\right) - \frac{a_{51}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{11.495} - x_{51bar}\right) - \frac{a_{52S}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{11.495} - x_{52Sbar}\right) - \frac{a_{53S}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{11.495} - x_{53Sbar}\right) - \frac{a_{54S}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{11.495} - x_{54Sbar}\right) - \frac{a_{55}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{11.495} - x_{55bar}\right) - \frac{a_6}{E \cdot I} \cdot \left(l_{11.495} - x_{6bar}\right) - \frac{a_{61}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{11.495} - x_{61bar}\right) - \frac{a_7}{E \cdot I} \cdot \left(l_{11.495} - x_{7bar}\right) - \frac{a_8}{E \cdot I} \cdot \left(l_{11.495} - x_{8bar}\right) - \ldots$$

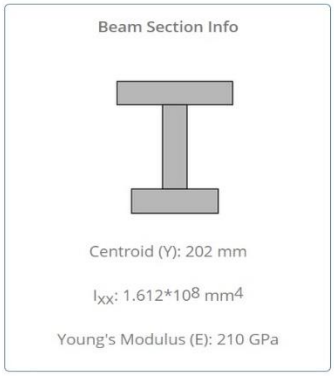
$$\ldots - \frac{a_9}{E \cdot I} \cdot \left(l_{11.495} - x_{9bar}\right) - \frac{a_{10}}{E \cdot I} \cdot \left(l_{11.495} - x_{10bar}\right) + M_{11.495} \xrightarrow{solve, M_{11.495}} -7.922871134582362477 6 = -7.923$$

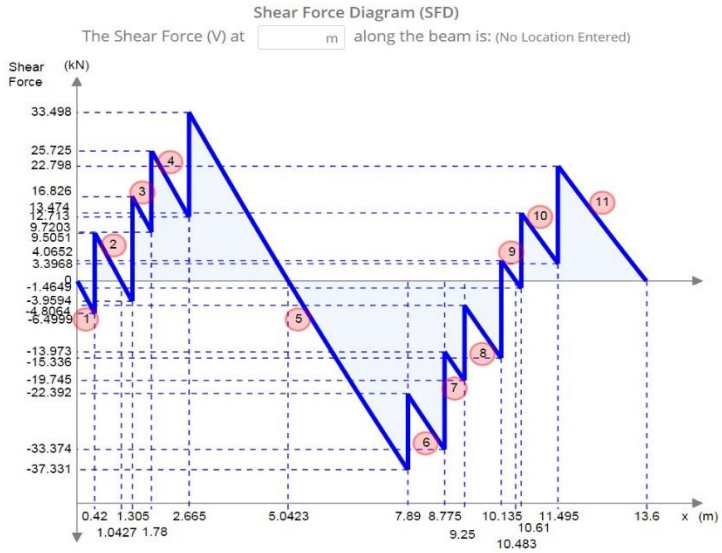
pisteessä 13.6

$l_{13.6} := 13.6$ $\qquad M_{13.6} := 0$

Hakeperävaunun 36 tonnin kokonaismassan kuormituksen vapaakappalekuva, leikkaus- ja momenttikuvaaja.







Shear Force Equations

$V_1(x) = 0.18779x^2 - 15.538x - 0.0070786$

$V_2(x) = 0.18779x^2 - 15.538x + 15.998$

$V_3(x) = 0.18779x^2 - 15.538x + 36.783$

$V_4(x) = 0.18779x^2 - 15.538x + 52.788$

$V_5(x) = 0.18779x^2 - 15.538x + 73.573$

$V_6(x) = 0.18779x^2 - 15.538x + 88.512$

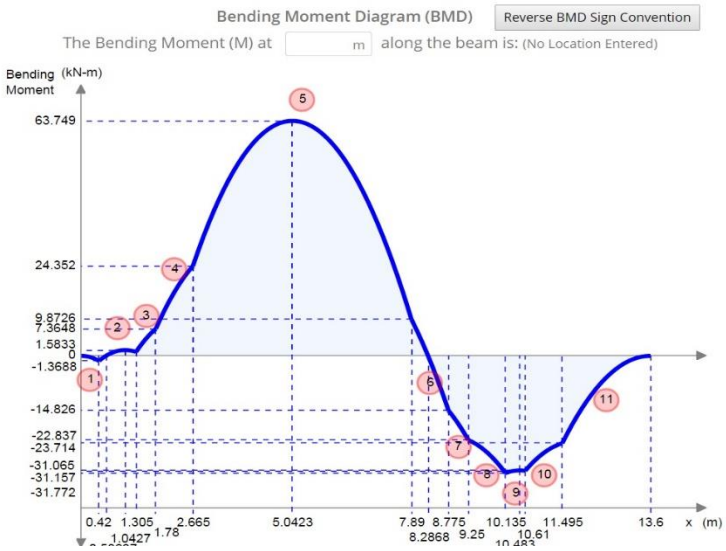
$V_7(x) = 0.18779x^2 - 15.538x + 107.913$

$V_8(x) = 0.18779x^2 - 15.538x + 122.852$

$V_9(x) = 0.18779x^2 - 15.538x + 142.253$

$V_{10}(x) = 0.18779x^2 - 15.538x + 157.192$

$V_{11}(x) = 0.18779x^2 - 15.538x + 176.593$



Bending Moment Equations

$M_1(x) = 0.062598x^3 - 7.769x^2 - 0.0070786x$

$M_2(x) = 0.062598x^3 - 7.769x^2 + 15.998x - 6.7221$

$M_3(x) = 0.062598x^3 - 7.769x^2 + 36.783x - 33.847$

$M_4(x) = 0.062598x^3 - 7.769x^2 + 52.788x - 62.335$

$M_5(x) = 0.062598x^3 - 7.769x^2 + 73.573x - 117.727$

$M_6(x) = 0.062598x^3 - 7.769x^2 + 88.512x - 235.596$

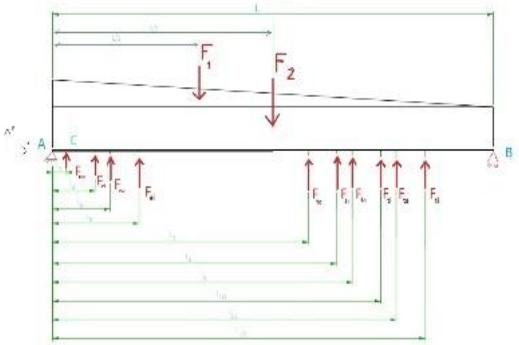
$M_7(x) = 0.062598x^3 - 7.769x^2 + 107.913x - 405.84$

$M_8(x) = 0.062598x^3 - 7.769x^2 + 122.852x - 544.026$

$M_9(x) = 0.062598x^3 - 7.769x^2 + 142.253x - 740.655$

$M_{10}(x) = 0.062598x^3 - 7.769x^2 + 157.192x - 899.158$

$M_{11}(x) = 0.062598x^3 - 7.769x^2 + 176.593x - 1122.172$



Laskennassa oletetaan voiman ja vastavoima periaatteeseen eli jolloin y-akselin suuntaiset tukireaktiot pisteissä A ja B ovat 0 N. Runko kietyy pisteiden A ja B kautta.

$F_{ea} := 16003 \cdot N$ $\quad F_{ta} := 14937 \cdot N$

$F_{ei} := 20784 \cdot N$ $\quad F_{ti} := 19398 \cdot N$

$F_A := 0 \cdot N$ $\quad l := 13600 \cdot mm$

$F_B := 0 \cdot N$ $\quad l_3 := 420 \cdot mm$

$l_4 := 1305 \cdot mm$

$l_5 := 1780 \cdot mm$

$l_6 := 2665 \cdot mm$

$l_7 := 7890 \cdot mm$

$l_8 := 8775 \cdot mm$

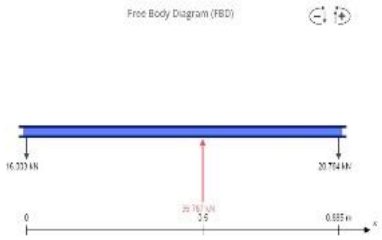
$l_9 := 9250 \cdot mm$

$l_{10} := 10135 \cdot mm$

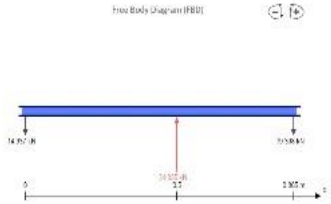
$l_{11} := 10610 \cdot mm$

$l_{12} := 11495 \cdot mm$

Etutelin akselituennat



Takatelin akselituet



$M_C = 0$

$$-F_A \cdot l_3 + F_{ei} \cdot (l_4 - l_3) + F_{ea} \cdot (l_5 - l_3) + F_{ei} \cdot (l_6 - l_3) - F_1 \cdot \left(\frac{l}{3} - l_3\right) - F_2 \cdot \left(\frac{l}{2} - l_3\right) + F_{ta} \cdot (l_7 - l_3) + F_{ti} \cdot (l_8 - l_3) + F_{ta} \cdot (l_9 - l_3) + F_{ti} \cdot (l_{10} - l_3) + F_{ta} \cdot (l_{11} - l_3) + F_{ti} \cdot (l_{12} - l_3) + F_B \cdot (l - l_3) \xrightarrow{solve, F_2} \frac{4762972 \cdot N}{29} - \frac{617 \cdot F_1}{957}$$

$$F_{ei} \cdot (l_4 - l_3) + F_{ea} \cdot (l_5 - l_3) + F_{ei} \cdot (l_6 - l_3) - F_1 \cdot \left(\frac{l}{3} - l_3\right) - F_2 \cdot \left(\frac{l}{2} - l_3\right) + F_{ta} \cdot (l_7 - l_3) + F_{ti} \cdot (l_8 - l_3) + F_{ta} \cdot (l_9 - l_3) + F_{ti} \cdot (l_{10} - l_3) + F_{ta} \cdot (l_{11} - l_3) + F_{ti} \cdot (l_{12} - l_3) + F_B \cdot (l - l_3) \xrightarrow{solve, F_1} \frac{157178076 \cdot N}{617} - \frac{957 \cdot F_2}{617}$$

$\Sigma F_y := 0$

$$F_A + F_{ea} + F_{ei} + F_{ea} + F_{ei} - F_1 - F_2 + F_{ta} + F_{ti} + F_{ta} + F_{ti} + F_{ta} + F_{ti} + F_B \xrightarrow{solve, F_2} 176579 \cdot N - F_1$$

$$F_A + F_{ea} + F_{ei} + F_{ea} + F_{ei} - F_1 - F_2 + F_{ta} + F_{ti} + F_{ta} + F_{ti} + F_{ta} + F_{ti} + F_B \xrightarrow{solve, F_1} 176579 \cdot N - F_2$$

Kokonaismassa $\quad m_{tot} := 36000$

$F_{tot} := m_{tot} \cdot 9.81$

$$F_1 := \frac{F_{tot}}{2} \cdot N - F_1 = \frac{4762972 \cdot N}{29} - \frac{617 \cdot F_1}{957} \xrightarrow{solve, F_1} 34732.305882352941176 \cdot N = 34.732\ kN$$

$$F_2 := \frac{F_{tot}}{2} \cdot N - F_2 = \frac{157178076 \cdot N}{617} - \frac{957 \cdot F_2}{617} \xrightarrow{solve, F_2} 141847.69411764705882 \cdot N = 141.848\ kN$$

Voimien F_1 ja F_2 laskenta 36 tonnin kokonaismassan kuormalla, osa 2.

Lasketaan resultanttivoimista F1 ja F2 puolisuunnikaskuorma

$$F_2 = l \cdot w_{F2} \qquad w_{F2} := \frac{F_2}{l} = 10.43\ \frac{kN}{m}$$

$$F_1 = \frac{l \cdot w_{F1}}{2} \qquad w_{F1} := \frac{F_1 \cdot 2}{l} = 5.108\ \frac{kN}{m}$$

Etupäässä

$$w_{etu} := w_{F1} + w_{F2} = 15.538\ \frac{kN}{m}$$

$$p_{etu} := \frac{w_{etu} \cdot l}{150 \cdot mm \cdot l} = 0.104\ MPa$$

Takapäässä

$$w_{F2} = 10.43\ \frac{kN}{m}$$

$$p_{taka} := \frac{w_{F2} \cdot l}{150\ mm \cdot l} = 0.07\ MPa$$

Vaihtuvan paineen yhtälö

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad y - y_0 = k\,(x - x_0) \qquad x := 0, 1 .. 13600$$

$$k := \frac{p_{taka} - p_{etu}}{x_{taka} - x_{etu}} \qquad k := \frac{0.07 - 0.104}{13600 - 0} = -2.5 \cdot 10^{-6}$$

$$y - y_0 = k\,(x - x_0)$$

$$y(x) := -2.5 \cdot 10^{-6} \cdot x - 0.07$$

36 tonnin kokonaismassan kuormituksen *M / EI* -kuvaajan laskenta, osa 1.

$$S := \frac{I_{380}}{I_{150}} = 6.43$$

36 tonnia

$$x_1 := 0, 0.01 .. 0.42$$

$$M_1(x_1) := S \cdot \left(0.062598 \cdot x_1^3 - 7.769 \cdot x_1^2 - 0.0070786 \cdot x_1\right)$$

$$x_2 := 0.42, 0.43 .. 0.586$$

$$M_2(x_2) := S \cdot \left(0.062598 \cdot x_2^3 - 7.769 \cdot x_2^2 + 15.998 \cdot x_2 - 6.7221\right)$$

$$x_{21} := 0.586, 0.588 .. 1.305$$

$$M_{21}(x_{21}) := S \cdot \left(0.062598 \cdot x_{21}^3 - 7.769 \cdot x_{21}^2 + 15.998 \cdot x_{21} - 6.7221\right)$$

$$x_3 := 1.305, 1.306 .. 1.78$$

$$M_3(x_3) := S \cdot \left(0.062598 \cdot x_3^3 - 7.769 \cdot x_3^2 + 36.783 \cdot x_3 - 33.847\right)$$

$$x_4 := 1.78, 1.79 .. 2.665$$

$$M_4(x_4) := S \cdot \left(0.062598 \cdot x_4^3 - 7.769 \cdot x_4^2 + 52.788 \cdot x_4 - 62.335\right)$$

$$x_{51} := 2.665, 2.666 .. 2.829$$

$$M_{51}(x_{51}) := S \cdot \left(0.062598 \cdot x_{51}^3 - 7.769 \cdot x_{51}^2 + 73.573 \cdot x_{51} - 117.727\right)$$

$$x_{52} := 2.829, 2.830 .. 3.241$$

$$M_{52}(x_{52}) := 0.062598 \cdot x_{52}^3 - 7.769 \cdot x_{52}^2 + 73.573 \cdot x_{52} - 117.727$$

$$x_{53} := 3.241, 3.242 .. 3.927$$

$$M_{53}(x_{53}) := 0.062598 \cdot x_{53}^3 - 7.769 \cdot x_{53}^2 + 73.573 \cdot x_{53} - 117.727$$

$$x_{52} := 2.829, 2.830 .. 3.241$$

$$M_{52S}(x_{52}) := \left(\frac{\frac{0.15 \cdot 0.404^3 - 0.145 \cdot 0.38^3}{12}}{\frac{0.15\left(\left(-\sqrt{2^2 - (x_{52} - 2.829)^2} + 2.150\right) + 0.024\right)^3 - 0.145 \cdot \left(-\sqrt{2^2 - (x_{52} - 2.829)^2} + 2.150\right)^3}{12}}\right) \cdot \left(0.062598 \cdot x_{52}^3 - 7.769 \cdot x_{52}^2 + 73.573 \cdot x_{52} - 117.727\right)$$

$$x_{53} := 3.241, 3.283 .. 3.927$$

$$M_{53S}(x_{53}) := \left(\frac{\frac{0.15 \cdot 0.404^3 - 0.145 \cdot 0.38^3}{12}}{\frac{0.15\left(\left(0.21\,(x_{53}) - 0.488\right) + 0.024\right)^3 - 0.145 \cdot \left(0.21\,(x_{53}) - 0.488\right)^3}{12}}\right) \cdot \left(0.062598 \cdot x_{53}^3 - 7.769 \cdot x_{53}^2 + 73.573 \cdot x_{53} - 117.727\right)$$

36 tonnin kokonaismassan kuormituksen *M / EI* -kuvaajan laskenta, osa 2.

$M_{54}(x_{54}) := 0.062598 \cdot x_{54}^3 - 7.769 \cdot x_{54}^2 + 73.573 \cdot x_{54} - 117.727$

$x_{55} := 4.339, 4.340 .. 7.89$

$M_{55}(x_{55}) := 0.062598 \cdot x_{55}^3 - 7.769 \cdot x_{55}^2 + 73.573 \cdot x_{55} - 117.727$

$x_6 := 7.89, 7.90 .. 8.775$

$M_6(x_6) := 0.062598 \cdot x_6^3 - 7.769 \cdot x_6^2 + 88.512 \cdot x_6 - 235.596$

$x_7 := 8.775, 8.776 .. 9.25$

$M_7(x_7) := 0.062598 \cdot x_7^3 - 7.769 \cdot x_7^2 + 107.913 \cdot x_7 - 405.84$

$x_8 := 9.25, 9.26 .. 10.135$

$M_8(x_8) := 0.062598 \cdot x_8^3 - 7.769 \cdot x_8^2 + 122.852 \cdot x_8 - 544.026$

$x_9 := 10.135, 10.136 .. 10.61$

$M_9(x_9) := 0.062598 \cdot x_9^3 - 7.769 \cdot x_9^2 + 142.253 \cdot x_9 - 740.655$

$x_{10} := 10.61, 10.62 .. 11.495$

$M_{10}(x_{10}) := 0.062598 \cdot x_{10}^3 - 7.769 \cdot x_{10}^2 + 157.192 \cdot x_{10} - 899.158$

$x_{11} := 11.495, 11.496 .. 13.6$

$M_{11}(x_{11}) := 0.062598 \cdot x_{11}^3 - 7.769 \cdot x_{11}^2 + 176.593 \cdot x_{11} - 1122.172$

$x_{54} := 3.927, 3.968 .. 4.339$

$$M_{54S}(x_{54}) := \left(\frac{\frac{0.15 \cdot 0.404^3 - 0.145 \cdot 0.38^3}{12}}{\frac{0.15 \left(\left(\sqrt{2^2 - (x_{54} - 4.339)^2} - 1.62 \right) + 0.024 \right)^3 - 0.145 \cdot \left(\sqrt{2^2 - (x_{54} - 4.339)^2} - 1.62 \right)^3}{12}} \right) \cdot \left(0.062598 \cdot x_{54}^3 - 7.769 \cdot x_{54}^2 + 73.57 \cdot x_{54} - 117.727 \right)$$

Momentti 1

$a_1 := \int_0^{0.42} M_1(x_1)\, dx_1 = -1.235$ pinta-ala $\frac{a_1}{E \cdot I}$

$m_{x1} := \int_0^{0.42} x_1 \cdot M_1(x_1)\, dx_1 = -0.389$ momenttivarsi

$x_{1bar} := \frac{m_{x1}}{a_1} = 0.315$ painopiste

Momentti 2

$a_2 := \int_{0.42}^{0.586} M_2(x_2)\, dx_2 = -0.694$ pinta-ala

$m_{x2} := \int_{0.42}^{0.586} x_2 \cdot M_2(x_2)\, dx_2 = -0.329$ momenttivarsi

$x_{2bar} := \frac{m_{x2}}{a_2} = 0.474$ painopiste

36 tonnin kokonaismassan kuormituksen *M / EI* -kuvaajan laskenta, osa 3.

Momentti 21 — Momentin nollakohta

$a_{21} := \int_{0.586}^{1.305} M_2(x_2)\,dx_2 = 5.477$ pinta-ala

$m_{x21} := \int_{0.586}^{1.305} x_2 \cdot M_2(x_2)\,dx_2 = 5.473$ momenttivarsi

$x_{21bar} := \frac{m_{x21}}{a_{21}} = 0.999$ painopiste

Momentti 3

$a_3 := \int_{1.305}^{1.78} M_3(x_3)\,dx_3 = 13.73$ pinta-ala

$m_{x3} := \int_{1.305}^{1.78} x_3 \cdot M_3(x_3)\,dx_3 = 21.94$ momenttivarsi

$x_{3bar} := \frac{m_{x3}}{a_3} = 1.598$ painopiste

Momentti 4

$a_4 := \int_{1.78}^{2.665} M_4(x_4)\,dx_4 = 95.714$ pinta-ala

$m_{x4} := \int_{1.78}^{2.665} x_4 \cdot M_4(x_4)\,dx_4 = 219.851$ momenttivarsi

$x_{4bar} := \frac{m_{x4}}{a_4} = 2.297$ painopiste

Momentti 51 joutsenkaulan kohdalla

$a_{51} := \int_{2.665}^{2.829} M_{51}(x_{51})\,dx_{51} = 28.51$ pinta-ala

$m_{x51} := \int_{2.665}^{2.829} x_{51} \cdot M_{51}(x_{51})\,dx_{51} = 78.394$ momenttivarsi

$x_{51bar} := \frac{m_{x51}}{a_{51}} = 2.75$ painopiste

Momentti 52S joutsenkaulan kaarevan osa

$a_{52S} := \int_{2.829}^{3.241} M_{52S}(x_{52})\,dx_{52} = 79.554$ pinta-ala

$m_{x52S} := \int_{2.829}^{3.241} x_{52} \cdot M_{52S}(x_{52})\,dx_{52} = 240.999$ momenttivarsi

$x_{52Sbar} := \frac{m_{x52S}}{a_{52S}} = 3.029$ painopiste

Momentti 53S joutsenkaulan vino osa

$a_{53S} := \int_{3.241}^{3.927} M_{53S}(x_{53})\,dx_{53} = 73.86$ pinta-ala

$m_{x53S} := \int_{3.241}^{3.927} x_{53} \cdot M_{53S}(x_{53})\,dx_{53} = 261.223$ momenttivarsi

$x_{53Sbar} := \frac{m_{x53S}}{a_{53S}} = 3.537$ painopiste

Momentti 54S joutsenkaulan kaareva osa

$a_{54S} := \int_{3.927}^{4.339} M_{54S}(x_{54})\,dx_{54} = 25.907$ pinta-ala

$m_{x54S} := \int_{3.927}^{4.339} x_{54} \cdot M_{54S}(x_{54})\,dx_{54} = 106.932$ momenttivarsi

$x_{54Sbar} := \frac{m_{x54S}}{a_{54S}} = 4.128$ painopiste

Momentti 55 rungon paksuimmalla osalla

$a_{55} := \int_{4.339}^{7.89} M_{55}(x_{55})\,dx_{55} = 174.097$ pinta-ala

$m_{x55} := \int_{4.339}^{7.89} x_{55} \cdot M_{55}(x_{55})\,dx_{55} = 1.011 \cdot 10^3$ momenttivarsi

$x_{55bar} := \frac{m_{x55}}{a_{55}} = 5.808$ painopiste

Momentti 6 rungon paksuimmalla osalla

$a_6 := \int_{7.89}^{8.287} M_6(x_6)\,dx_6 = 2.024$ pinta-ala

$m_{x6} := \int_{7.89}^{8.287} x_6 \cdot M_6(x_6)\,dx_6 = 16.244$ momenttivarsi

$x_{6bar} := \frac{m_{x6}}{a_6} = 8.024$ painopiste

36 tonnin kokonaismassan kuormituksen *M / EI* -kuvaajan laskenta, osa 4.

Momentti 61 rungon paksuimmalla osalla

$a_{61} := \int_{8.287}^{8.775} M_6(x_6)\,dx_6 = -3.499$ pinta-ala

$m_{z61} := \int_{8.287}^{8.775} x_6 \cdot M_6(x_6)\,dx_6 = -30.141$ momenttivarsi

$x_{61bar} := \frac{m_{z61}}{a_{61}} = 8.615$ painopiste

Momentti 7 rungon paksuimmalla osalla

Momentin nollakohta

$a_7 := \int_{8.775}^{9.25} M_7(x_7)\,dx_7 = -8.836$ pinta-ala

$m_{z7} := \int_{8.775}^{9.25} x_7 \cdot M_7(x_7)\,dx_7 = -79.786$ momenttivarsi

$x_{7bar} := \frac{m_{z7}}{a_7} = 9.03$ painopiste

Momentti 8 rungon paksuimmalla osalla

$a_8 := \int_{9.25}^{10.135} M_8(x_8)\,dx_8 = -23.477$ pinta-ala

$m_{z8} := \int_{9.25}^{10.135} x_8 \cdot M_8(x_8)\,dx_8 = -228.132$ momenttivarsi

$x_{8bar} := \frac{m_{z8}}{a_8} = 9.717$ painopiste

Momentti 9 rungon paksuimmalla osalla

$a_9 := \int_{10.135}^{10.61} M_9(x_9)\,dx_9 = -14.841$ pinta-ala

$m_{z9} := \int_{10.135}^{10.61} x_9 \cdot M_9(x_9)\,dx_9 = -153.931$ momenttivarsi

$x_{9bar} := \frac{m_{z9}}{a_9} = 10.372$ painopiste

Momentti 10 rungon paksuimmalla osalla

$a_{10} := \int_{10.61}^{11.495} M_{10}(x_{10})\,dx_{10} = -23.622$ pinta-ala

$m_{z10} := \int_{10.61}^{11.495} x_{10} \cdot M_{10}(x_{10})\,dx_{10} = -260.602$ momenttivarsi

$x_{10bar} := \frac{m_{z10}}{a_{10}} = 11.032$ painopiste

Momentti 11 rungon paksuimmalla osalla

$a_{11} := \int_{11.495}^{13.6} M_{11}(x_{11})\,dx_{11} = -16.542$ pinta-ala

$m_{z11} := \int_{11.495}^{13.6} x_{11} \cdot M_{11}(x_{11})\,dx_{11} = -198.831$ momenttivarsi

$x_{11bar} := \frac{m_{z11}}{a_{11}} = 12.019$ painopiste

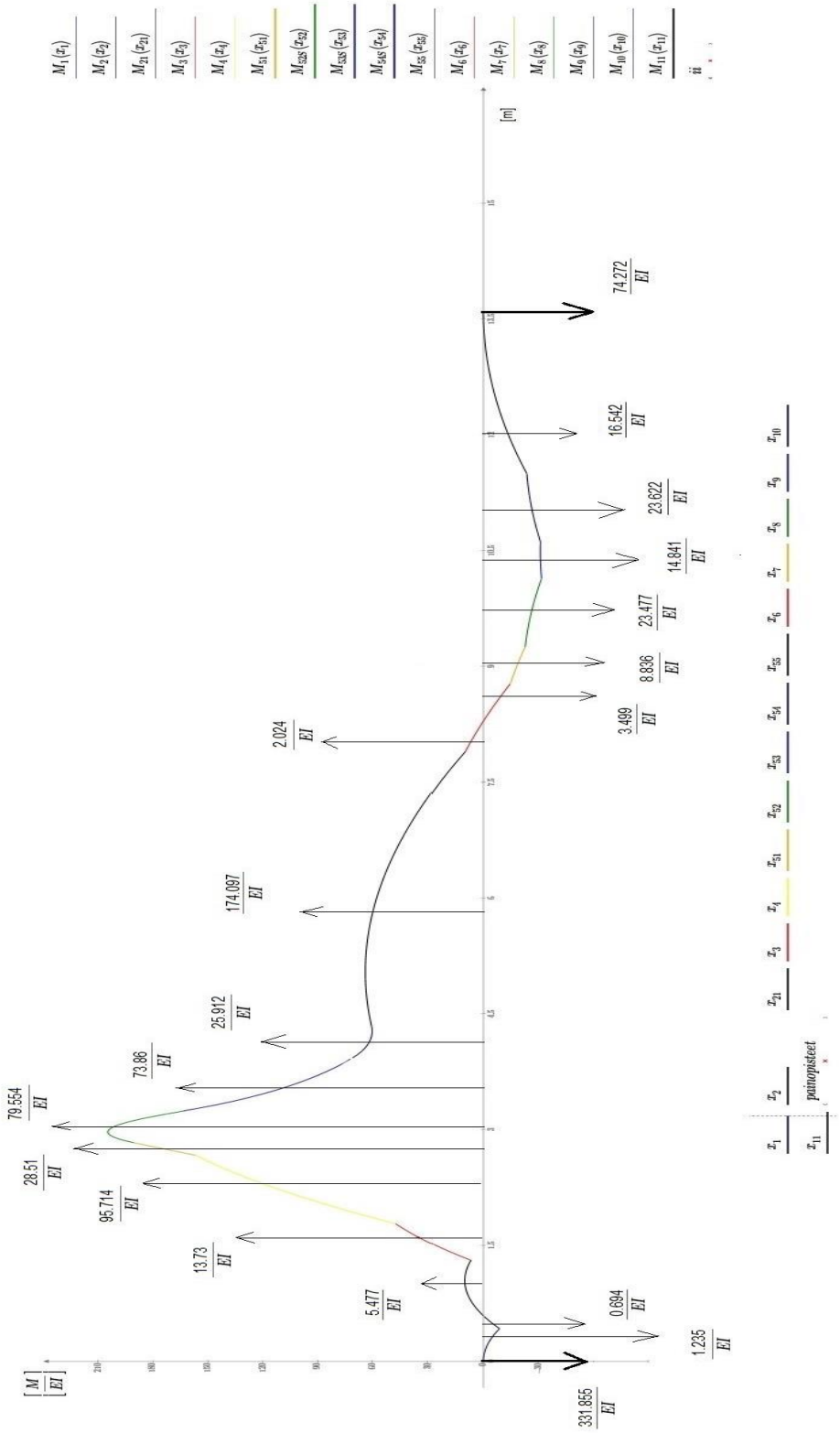
$$F_A := a_1 \cdot (l - x_{1bar}) + a_2 \cdot (l - x_{2bar}) + a_{21} \cdot (l - x_{21bar}) + a_3 \cdot (l - x_{3bar}) + a_4 \cdot (l - x_{4bar}) + a_{51} \cdot (l - x_{51bar}) + a_{52S} \cdot (l - x_{52Sbar}) + a_{53S} \cdot (l - x_{53Sbar}) + a_{54S} \cdot (l - x_{54Sbar}) + a_{55} \cdot (l - x_{55bar}) + a_6 \cdot (l - x_{6bar}) + a_{61} \cdot (l - x_{61bar}) + a_7 \cdot (l - x_{7bar}) + a_8 \cdot (l - x_{8bar}) + a_9 \cdot (l - x_{9bar}) + a_{10} \cdot (l - x_{10bar}) + a_{11} \cdot (l - x_{11bar}) - F_A \cdot l \xrightarrow{solve, F_A} 331.854541615973237 15 = 331.855$$

Fy=0

$$F_B := -F_A + a_1 + a_2 + a_{21} + a_3 + a_4 + a_{51} + a_{52S} + a_{53S} + a_{54S} + a_{55} + a_6 + a_{61} + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} - F_B \xrightarrow{solve, F_B} 74.2717440675065976 = 74.272$$

$F_A = 331.855$ $\frac{331.855}{EI}$ $F_B = 74.272$ $\frac{74.272}{EI}$

M / EI -kuvaaja 36 tonnin kokonaismassan kuormituksella.



Taipumien laskenta 36 tonnin kokonaismassan kuormituksella, osa 1.

$E := 210 \cdot 10^6 \qquad I := 161.2 \cdot 10^6 \cdot 10^{-15}$

$M_0 := 0$

pisteessä 0,42

$$M_{0.42} := \frac{F_A}{E \cdot I} \cdot (0.42 - 0) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot (0.42 - x_{1bar}) + M_{0.42} \xrightarrow{solve, M_{0.42}} -4.121137631688351702 5 = -4.121$$

pisteessä 0,588

$l_{0.588} := 0.588$

$$M_{0.588} := \frac{F_A}{E \cdot I} \cdot (l_{0.588} - 0) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot (l_{0.588} - x_{1bar}) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot (l_{0.588} - x_{2bar}) + M_{0.588} \xrightarrow{solve, M_{0.588}} -5.776524860347895983 9 = -5.777$$

pisteessä 1,305

$l_{1.305} := 1.305$

$$M_{1.305} := \frac{F_A}{E \cdot I} \cdot (l_{1.305} - 0) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot (l_{1.305} - x_{1bar}) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot (l_{1.305} - x_{2bar}) - \frac{a_{21}}{E \cdot I} \cdot (l_{1.305} - x_{21bar}) + M_{1.305} \xrightarrow{solve, M_{1.305}} -12.796742788999566645 = -12.797$$

pisteessä 1.78

$l_{1.78} := 1.78$

$$M_{1.78} := \frac{F_A}{E \cdot I} \cdot (l_{1.78} - 0) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot (l_{1.78} - x_{1bar}) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot (l_{1.78} - x_{2bar}) - \frac{a_{21}}{E \cdot I} \cdot (l_{1.78} - x_{21bar}) - \frac{a_3}{E \cdot I} \cdot (l_{1.78} - x_{3bar}) + M_{1.78} \xrightarrow{solve, M_{1.78}} -17.329605191390088166 = -17.33$$

Taipumien laskenta 36 tonnin kokonaismassan kuormituksella, osa 2.

pisteessä 2.665

$l_{2.665} := 2.665$

$$M_{2.665} := \frac{F_A}{E \cdot I} \cdot (l_{2.665} - 0) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot (l_{2.665} - x_{1bar}) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot (l_{2.665} - x_{2bar}) - \frac{a_{21}}{E \cdot I} \cdot (l_{2.665} - x_{21bar}) - \frac{a_3}{E \cdot I} \cdot (l_{2.665} - x_{3bar}) - \frac{a_4}{E \cdot I} \cdot (l_{2.665} - x_{4bar}) + M_{2.665} \xrightarrow{solve, M_{2.665}} -24.513072766954458034 = -24.513$$

pisteessä 2.829

$l_{2.829} := 2.829$

$$M_{2.829} := \frac{F_A}{E \cdot I} \cdot (l_{2.829} - 0) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot (l_{2.829} - x_{1bar}) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot (l_{2.829} - x_{2bar}) - \frac{a_{21}}{E \cdot I} \cdot (l_{2.829} - x_{21bar}) - \frac{a_3}{E \cdot I} \cdot (l_{2.829} - x_{3bar}) - \frac{a_4}{E \cdot I} \cdot (l_{2.829} - x_{4bar}) - \frac{a_{51}}{E \cdot I} \cdot (l_{2.829} - x_{51bar}) + M_{2.829} \xrightarrow{solve, M_{2.829}} -25.506575445971181158 = -25.507$$

pisteessä 3.241

$l_{3.241} := 3.241$

$$M_{3.241} := \frac{F_A}{E \cdot I} \cdot (l_{3.241} - 0) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot (l_{3.241} - x_{1bar}) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot (l_{3.241} - x_{2bar}) - \frac{a_{21}}{E \cdot I} \cdot (l_{3.241} - x_{21bar}) - \frac{a_3}{E \cdot I} \cdot (l_{3.241} - x_{3bar}) - \frac{a_4}{E \cdot I} \cdot (l_{3.241} - x_{4bar}) - \frac{a_{51}}{E \cdot I} \cdot (l_{3.241} - x_{51bar}) - \frac{a_{52S}}{E \cdot I} \cdot (l_{3.241} - x_{53Sbar}) + M_{3.241} \xrightarrow{solve, M_{3.241}} -28.518262589992982789 = -28.518$$

pisteessä 3.927

$l_{3.927} := 3.927$

$$M_{3.927} := \frac{F_A}{E \cdot I} \cdot (l_{3.927} - 0) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot (l_{3.927} - x_{1bar}) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot (l_{3.927} - x_{2bar}) - \frac{a_{21}}{E \cdot I} \cdot (l_{3.927} - x_{21bar}) - \frac{a_3}{E \cdot I} \cdot (l_{3.927} - x_{3bar}) - \frac{a_4}{E \cdot I} \cdot (l_{3.927} - x_{4bar}) - \frac{a_{51}}{E \cdot I} \cdot (l_{3.927} - x_{51bar}) - \frac{a_{52S}}{E \cdot I} \cdot (l_{3.927} - x_{53Sbar}) - \frac{a_{53S}}{E \cdot I} \cdot (l_{3.927} - x_{53Sbar}) + M_{3.927} \xrightarrow{solve, M_{3.927}} -29.912055236768483816 = -29.912$$

pisteessä 4.339

$l_{4.339} := 4.339$

$$M_{4.339} := \frac{F_A}{E \cdot I} \cdot (l_{4.339} - 0) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot (l_{4.339} - x_{1bar}) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot (l_{4.339} - x_{2bar}) - \frac{a_{21}}{E \cdot I} \cdot (l_{4.339} - x_{21bar}) - \frac{a_3}{E \cdot I} \cdot (l_{4.339} - x_{3bar}) - \frac{a_4}{E \cdot I} \cdot (l_{4.339} - x_{4bar}) - \frac{a_{51}}{E \cdot I} \cdot (l_{4.339} - x_{51bar}) - \frac{a_{52S}}{E \cdot I} \cdot (l_{4.339} - x_{53Sbar}) - \frac{a_{53S}}{E \cdot I} \cdot (l_{4.339} - x_{53Sbar}) - \frac{a_{54S}}{E \cdot I} \cdot (l_{4.339} - x_{54Sbar}) + M_{4.339} \xrightarrow{solve, M_{4.339}} -30.199810674690107299 = -30.2$$

Taipumien laskenta 36 tonnin kokonaismassan kuormituksella, osa 3.

pisteessä 8.775

$l_{8.775} := 8.775$

$$M_{8.775} := \frac{F_A}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - 0) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{1bar}) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{2bar}) - \frac{a_{21}}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{21bar}) - \frac{a_3}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{3bar}) - \frac{a_4}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{4bar}) - \frac{a_{51}}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{51bar}) - \frac{a_{525}}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{535bar}) - \frac{a_{535}}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{535bar}) - \frac{a_{545}}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{545bar}) - \frac{a_{55}}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{55bar}) - \frac{a_6}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{6bar}) - \frac{a_{61}}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{61bar}) + M_{8.775} \xrightarrow{solve, M_{8.775}} -16.358709282898038176 = -16.359$$

pisteessä 9.25

$l_{9.25} := 9.25$

$$M_{9.25} := \frac{F_A}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - 0) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{1bar}) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{2bar}) - \frac{a_{21}}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{21bar}) - \frac{a_3}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{3bar}) - \frac{a_4}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{4bar}) - \frac{a_{51}}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{51bar}) - \frac{a_{525}}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{535bar}) - \frac{a_{535}}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{535bar}) - \frac{a_{545}}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{545bar}) - \frac{a_{55}}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{55bar}) - \frac{a_6}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{6bar}) - \frac{a_{61}}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{61bar}) - \frac{a_7}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{7bar}) + M_{9.25} \xrightarrow{solve, M_{9.25}} -14.148952262581749085 = -14.149$$

pisteessä 10.135

$l_{10.135} := 10.135$

$$M_{10.135} := \frac{F_A}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - 0) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{1bar}) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{2bar}) - \frac{a_{21}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{21bar}) - \frac{a_3}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{3bar}) - \frac{a_4}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{4bar}) - \frac{a_{51}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{51bar}) - \frac{a_{525}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{535bar}) - \frac{a_{535}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{535bar}) - \frac{a_{545}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{545bar}) - \frac{a_{55}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{55bar}) - \frac{a_6}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{6bar}) - \frac{a_{61}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{61bar}) - \frac{a_7}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{7bar}) - \frac{a_8}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{8bar}) + \ldots$$

$$\ldots + M_{10.135} \xrightarrow{solve, M_{10.135}} -10.445095376176759289 = -10.445$$

pisteessä 10.61

$l_{10.61} := 10.61$

$$M_{10.61} := \frac{F_A}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - 0) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{1bar}) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{2bar}) - \frac{a_{21}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{21bar}) - \frac{a_3}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{3bar}) - \frac{a_4}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{4bar}) - \frac{a_{51}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{51bar}) - \frac{a_{525}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{535bar}) - \frac{a_{535}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{535bar}) - \frac{a_{545}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{545bar}) - \frac{a_{55}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{55bar}) - \frac{a_6}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{6bar}) - \frac{a_{61}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{61bar}) - \frac{a_7}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{7bar}) - \frac{a_8}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{8bar}) - \ldots$$

$$\ldots - \frac{a_9}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{9bar}) + M_{10.61} \xrightarrow{solve, M_{10.61}} -8.735574879933917921 = -8.736$$

pisteessä 13.6

$l_{13.6} := 13.6 \qquad M_{13.6} := 0$

Taipumien laskenta 36 tonnin kokonaismassan kuormituksella, osa 4.

pisteessä 8.775

$l_{8.775} := 8.775$

$$M_{8.775} := \frac{F_A}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - 0) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{1bar}) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{2bar}) - \frac{a_{21}}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{21bar}) - \frac{a_3}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{3bar}) - \frac{a_4}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{4bar}) - \frac{a_{51}}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{51bar}) - \frac{a_{52S}}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{52Sbar}) - \frac{a_{53S}}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{53Sbar}) - \frac{a_{54S}}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{54Sbar}) - \frac{a_{55}}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{55bar}) - \frac{a_6}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{6bar}) - \frac{a_{61}}{E \cdot I} \cdot (l_{8.775} - x_{61bar}) + M_{8.775} \xrightarrow{solve, M_{8.775}} -16.358799282898038176 = -16.359$$

pisteessä 9.25

$l_{9.25} := 9.25$

$$M_{9.25} := \frac{F_A}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - 0) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{1bar}) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{2bar}) - \frac{a_{21}}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{21bar}) - \frac{a_3}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{3bar}) - \frac{a_4}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{4bar}) - \frac{a_{51}}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{51bar}) - \frac{a_{52S}}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{52Sbar}) - \frac{a_{53S}}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{53Sbar}) - \frac{a_{54S}}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{54Sbar}) - \frac{a_{55}}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{55bar}) - \frac{a_6}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{6bar}) - \frac{a_{61}}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{61bar}) - \frac{a_7}{E \cdot I} \cdot (l_{9.25} - x_{7bar}) + M_{9.25} \xrightarrow{solve, M_{9.25}} -14.148952262581749085 = -14.149$$

pisteessä 10.135

$l_{10.135} := 10.135$

$$M_{10.135} := \frac{F_A}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - 0) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{1bar}) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{2bar}) - \frac{a_{21}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{21bar}) - \frac{a_3}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{3bar}) - \frac{a_4}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{4bar}) - \frac{a_{51}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{51bar}) - \frac{a_{52S}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{52Sbar}) - \frac{a_{53S}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{53Sbar}) - \frac{a_{54S}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{54Sbar}) - \frac{a_{55}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{55bar}) - \frac{a_6}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{6bar}) - \frac{a_{61}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{61bar}) - \frac{a_7}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{7bar}) - \frac{a_8}{E \cdot I} \cdot (l_{10.135} - x_{8bar}) + \ldots$$

$$\ldots + M_{10.135} \xrightarrow{solve, M_{10.135}} -10.445095376176759289 = -10.445$$

pisteessä 10.61

$l_{10.61} := 10.61$

$$M_{10.61} := \frac{F_A}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - 0) - \frac{a_1}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{1bar}) - \frac{a_2}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{2bar}) - \frac{a_{21}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{21bar}) - \frac{a_3}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{3bar}) - \frac{a_4}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{4bar}) - \frac{a_{51}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{51bar}) - \frac{a_{52S}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{52Sbar}) - \frac{a_{53S}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{53Sbar}) - \frac{a_{54S}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{54Sbar}) - \frac{a_{55}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{55bar}) - \frac{a_6}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{6bar}) - \frac{a_{61}}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{61bar}) - \frac{a_7}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{7bar}) - \frac{a_8}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{8bar}) - \ldots$$

$$\ldots - \frac{a_9}{E \cdot I} \cdot (l_{10.61} - x_{9bar}) + M_{10.61} \xrightarrow{solve, M_{10.61}} -8.735574879033917921 = -8.736$$

pisteessä 13.6

$l_{13.6} := 13.6 \qquad M_{13.6} := 0$