



LUT-kauppakorkeakoulu

Kauppatieteiden kandidaatintutkielma

Talousjohtaminen

**Fraktaalisuus rahoitusmarkkinoilla paksuhäntäisten
tuottojakaumien ja epäsatunnaisten hintamuutosten muodossa**

Fractality in the financial markets in forms of fat-tailed distributions
of returns and non-random returns

29.4.2020

Tekijä: Vili Kosonen

Ohjaaja: Jyrki Savolainen

TIIVISTELMÄ

Tekijä:	Vili Kosonen
Tutkielman nimi:	Fraktaalisuus rahoitusmarkkinoilla paksuhäntäisten tuottojakaumien ja epäsatunnaisten hintamuutosten muodossa
Akateeminen yksikkö:	LUT-kauppakorkeakoulu
Koulutusohjelma:	Kauppätieteet, Talousjohtaminen
Ohjaaja:	Jyrki Savolainen
Hakusanat:	Rahoitusmarkkinat, fraktaalisuus

Tämä kandidaatintutkielma tarkastelee rahoitusmarkkinoita fraktaalisuuden näkökulmasta. Tavoitteena on selvittää, esiintyykö valitussa aineistossa fraktaalisuutta paksuhäntäisten tuottojakaumien ja epäsatunnaisten hintamuutosten muodossa. Aineiston tuottojakaumien tarkastelu suoritetaan hyödyntäen keskiarvoja ja -hajontoja. Hintamuutosten epäsatunnaisuutta tarkastellaan Hurstin eksponenttien sekä viikko-, kuukausi- ja vuosituottojen autokorrelaatioiden avulla.

Tutkimuksen aineistona toimii kolme osakeindeksiä sekä kymmenen yrityksen osakkeet. Kaikki aineiston yritykset ovat yhdysvaltalaisia. Osakeindekseistä kaksi on yhdysvaltalaisia ja yksi englantilainen. Tutkimuksen tarkasteluajanjakso sijoittuu aikavälille 1927-2019, mutta aineiston sisällä tarkasteluajanjakson alkuhetki vaihtelee.

Tutkimustulokset osoittivat, että valitussa aineistossa esiintyy fraktaalisuutta. Tuottojakaumat olivat selvästi paksuhäntäisiä. Hurstin eksponentit viittasivat vahvasti tuottojen epäsatunnaisuuteen. Hurstin eksponenttien perusteella suurin osa aineistosta noudatti selvästi joko trendinomaista liikettä tai voimakasta edestakaista liikettä. Vuosituottojen autokorrelaatiot tukivat melko hyvin Hurstin eksponenttien antamia tuloksia, mutta kuukausi- ja viikotuottojen autokorrelaatiot antoivat hieman ristiriitaisia tuloksia.

ABSTRACT

Author: Vili Kosonen

Title: Fractality in the financial markets in forms of fat-tailed distributions of returns and non-random returns

School: School of Business and Management

Degree programme: Business Administration, Financial Management

Supervisor: Jyrki Savolainen

Keywords: Financial markets, fractality

The purpose of this Bachelor's thesis is to examine the financial market from a fractal point of view. This thesis aims to investigate whether there appears fractality in the research material in forms of fat-tailed distributions of returns and non-random returns. The examination of distributions of returns will be performed by scrutinizing means and standard deviations. The non-randomness of returns will be examined with Hurst exponents and weekly, monthly and yearly autocorrelations.

The research material consists of three stock indices and stocks of ten individual companies. All companies are from United States. Two of the stock indices are American and the third one is English. The examination period is from 1927 to 2019 but every stock/index has its own specific time of start.

The results of the research indicate that there appears to be fractality in the research material. The distributions of returns were clearly fat-tailed. The Hurst exponents supplied strong evidence about non-randomness of the returns. Most stocks and stock indices' prices followed either a trend-like movement or a strong back-and-forth-like movement. Yearly autocorrelations supported the results of the Hurst exponents quite well but weekly and monthly autocorrelations produced slightly conflicting results.

Sisällys

1. Johdanto.....	1
1.1 Tutkimuksen tavoitteet, rajaukset ja tutkimusongelmat	1
1.2 Tutkielman rakenne.....	2
2. Teoreettinen viitekehys	3
2.1 Moderni rahoitusteoria	3
2.2 Kritiikki modernia rahoitusteoriaa kohtaan	5
2.3 Fraktaalit.....	6
2.4 Fraktaalisuus rahoitusmarkkinoilla.....	7
2.5 Tuottojakaumat	9
2.6 Hurstin eksponentti	11
2.7 Autokorrelaatio.....	12
3. Tutkimusmenetelmät ja -aineisto.....	13
3.1 Tutkimusaineisto	13
3.2 Tutkimusmenetelmät	14
4. Tutkimustulokset	16
4.1 Tuottojakaumat	16
4.2 Hurstin eksponentit	17
4.3 Autokorrelaatiot	20
5. Yhteenveto ja johtopäätökset	22
Lähdeluettelo	25

LIITTEET

Liite 1. S&P500 -indeksin päivätuotot

Liite 2. Nasdaq 100 -indeksin päivätuotot

Liite 3. FTSE 100 -indeksin päivätuotot

Liite 4. Applen osakkeen päivätuotot

Liite 5. Boeingin osakkeen päivätuotot

Liite 6. DuPontin osakkeen päivätuotot

Liite 7. Fordin osakkeen päivätuotot

Liite 8. Intelin osakkeen päivätuotot

Liite 9. McDonaldsin osakkeen päivätuotot

Liite 10. Micronin osakkeen päivätuotot

Liite 11. Microsoftin osakkeen päivätuotot

Liite 12. PepsiCon osakkeen päivätuotot

Liite 13. Pfizerin osakkeen päivätuotot

1. Johdanto

Moderni rahoitusteoria on ollut vallitseva konsensus rahoitusmaailmassa jo vuosikymmeniä. Sen sisältämien oletusten pätemättömyydestä, kuten oletukset rahoitusinstrumenttien tuottojen normaalijakautuneisuudesta sekä hintamuutosten satunnaisuudesta, on kuitenkin paljon todisteita ja se onkin saanut myös kritiikkiä osakseen. Virheistään huolimatta modernin rahoitusteorian asema rahoitusmaailman konsensusena perustuu suurelta osin siihen, ettei ole löydetty teoriaa, joka olisi yhtä yksinkertainen sekä selvästi pätevämpi. Rahoitusmarkkinat ovat sen verran monimutkainen ilmiö, että täysin pätevän teorian kehittäminen ei ole aivan yksinkertainen tehtävä.

Modernin rahoitusteorian oletuksiin liittyviä virheitä voidaan tarkastella fraktaalisuuden näkökulmasta. Se antaa realistisemmän kuvan osakemarkkinoiden sisältämästä riskistä kuin moderni rahoitusteoria ja sen avulla pystytään selittämään paremmin muun muassa pörssiromahduksia. Fraktaaligeometria on matematiikan osa-alue, jonka avulla tutkitaan rosoisia kuvioita ja ilmiöitä. Fraktaaligeometrian kehittäjä Benoit Mandelbrot yhdisti fraktaalit rahoitusmarkkinoihin tutkimalla aluksi puuvillan hintoja 1960-luvulla, minkä jälkeen siirtyi muun muassa osakkeiden ja valuuttojen tutkimiseen (Mandelbrot & Hudson 2004, 248). Rahoitusmarkkinoilla fraktaalisuutta heijastelevat pääasiassa tuottojen normaalijakautumattomuus sekä epäsatunnaisuus.

1.1 Tutkimuksen tavoitteet, rajaukset ja tutkimusongelmat

Tämän tutkielman tavoitteena on selvittää, onko fraktaalisuutta havaittavissa osakemarkkinoilla valitun datan osalta. Fraktaalisuutta tutkitaan paksuhäntäisten tuottojakaumien sekä hintamuutosten epäsatunnaisen liikkeen muodossa. Paksuhäntäinen tuottojakauma tarkoittaa, että aineistosta löytyy paljon enemmän useamman kuin kolmen keskihajonnan päässä keskiarvosta olevia havaintoja kuin normaalijakautuneesta aineistosta. Tutkimusongelman selvittämiseksi tutkitaan, kuinka valitun aineiston tuotot ovat jakautuneet

ja onko aineistossa havaittavissa riippuvuutta havaintojen välillä. Tutkielmaan valittu aineisto sisältää mielivaltaisesti valitut kymmenen yritystä sekä kolme osakeindeksiä. Yritykset on rajattu vain yhdysvaltalaisiin suuren datatarjonnan takia. Osakeindekseistä kaksi on yhdysvaltalaisia ja yksi on englantilainen. Aineisto on toimialallisesti hajautettu. Tutkimuksen aikaväli on rajattu vuosiin 1927-2019. Tutkimusongelmat ovat seuraavanlaiset:

- Pääongelma: *Ilmeneekö valituissa osakkeissa ja osakeindekseissä fraktaalisuutta paksuhäntäisten tuottojakaumien ja epäsatunnaisten hintamuutosten muodossa?*
- Alaongelma 1: *Ovatko valitun aineiston tuottojakaumat paksuhäntäisiä?*
- Alaongelma 2: *Voidaanko valitussa aineistossa havaita riippuvuutta havaintojen välillä tutkimalla Hurstin eksponentteja ja autokorrelaatioita?*

Keskihajonta kuvaa sitä, kuinka havainnot jakautuvat keskiarvon ympärille. Normaalijakautuneessa aineistossa yli kolmen keskihajonnan päässä keskiarvosta olevat havainnot ovat todella harvinaisia. Toisessa alaongelmassa hyödynnettävä Hurstin eksponentti on luku, joka kuvaa ikään kuin aikasarjan pitkää muistia. Se kertoo, liikkuuko hinta sitkeähkösti trendiä seuraten tai heiluuko se villisti edestakaisin. Autokorrelaatio puolestaan kuvaa aikasarjan havaintojen riippuvaisuutta menneistä havainnoista.

1.2 Tutkielman rakenne

Seuraavassa kappaleessa esitellään teorettinen viitekehys eli tutkielman kannalta keskeiset käsitteet. Teoreettisen viitekehysten ohessa esitellään myös käytettävien tutkimusmenetelmien teorettinen tausta. Teoreettisen viitekehysten jälkeen esitellään valittu tutkimusaineisto ja kerrotaan, kuinka valittuja tutkimusmenetelmiä hyödynnetään tutkimuksessa. Tämän jälkeen käydään läpi tutkimustulokset. Viimeisessä kappaleessa esitellään tutkimustulosten perusteella tehdyt johtopäätökset sekä tutkielman päättävä yhteenveto.

2. Teoreettinen viitekehys

Tässä kappaleessa esitellään aikaisemman kirjallisuuden ja aikaisempien tutkimusten avulla tutkielman kannalta keskeisten käsitteiden ja ilmiöiden teoreettinen pohja. Kappale lähtee liikkeelle modernin rahoitusteorian tiiviistä esittelystä ja sen vastaanottaman kritiikin läpikäymisestä. Kappaleessa esitellään seuraavaksi fraktaaligeometrian taustaa sekä aikaisempia tutkimuksia fraktaalisuuden hyödyntämisestä rahoitusmarkkinoilla. Lopuksi esitellään valittujen tutkimusmenetelmien teoriaa.

2.1 Moderni rahoitusteoria

Modernin rahoitusteorian keskeisiä kulmakiviä ovat tehokkaiden markkinoiden hypoteesi, moderni portfolioteoria, Capital Asset Pricing -malli sekä Black-Scholes -malli. Ympäri maailmaa kaikkien kauppakorkeakoulujen rahoituksen opetus perustuu näiden teorioiden ympärille. Modernin rahoitusteorian voidaan nähdä perustuvan ranskalaisen matemaatikon Louis Bachelierin (1870-1946) teorioihin, jotka hän esitteli vuonna 1900 valmistuneessa väitöskirjassaan. Bachelierin väitöskirja käsitteli Pariisin pörssissä valtionlainoilla käytävää kauppaa. Aikaa kului kuitenkin noin puoli vuosisataa ennen kuin hänen teorioidensa alettiin paneutua tarkemmin rahoitusmaailmassa. Bachelier päätteli tutkimuksensa perusteella, että arvopapereiden hintoja on mahdotonta ennustaa niiden sattumanvaraisen liikkeen johdosta ja, että hintamuutokset noudattavat normaalijakaumaa. Nämä kaksi oletusta ovatkin vahvasti läsnä modernissa rahoitusteoriassa. (Mandelbrot & Hudson 2004, 82-83; 91)

Tehokkaiden markkinoiden hypoteesi (Efficient Market Hypothesis, EMH) on Eugene Faman 1960- ja 1970-luvuilla kehittänyt hypoteesi, joka käsittelee rahoitusmarkkinoihin liittyvää tehokkuutta. Hypoteesin mukaan arvopapereiden hinnoissa näkyy jo kaikki saatavilla oleva informaatio. Täten sen mukaan markkinat ovat peli, jossa kenelläkään ei ole mitään etulyöntiasemaa ja, jossa hintojen muutokset seuraavat satunnaiskulkua. Satunnaiskulussa arvopapereiden hintamuutokset eivät riipu millään tavalla menneistä hinnoista vaan huomisen hintaan vaikuttaa vain huomisen uutiset. Tuottojen kannalta sijoittajalle ei siis

pitäisi olla mitään eroa perusteellisesti tehdyn osakepöiminnan ja sattumanvaraisesti rakennetun portfolion välillä, sillä todennäköisyys ylituottoihin on molemmilla yhtä suuri. (Malkiel 2003, 59)

Moderni portfolioteoria (MPT) kehiteltiin 1950-luvulla yhdysvaltalaisen taloustieteilijän, Harry Markowitzin toimesta. MPT:n tavoitteena on muodostaa portfolio, joka tuottaa sen omistajalle mahdollisimman hyvän tuoton mahdollisimman vähäisellä riskillä. Teorian mukaisessa portfolion optimoinnissa on kaksi keskeistä työkalua. Portfolion odotetun tuoton sekä varianssin perusteella portfoliot asettuvat tehokkuusjärjestykseen. Tuotto-varianssi-koordinaatistoon syntyy niin sanottu tehokas rintama, jolta löytyy jokaisella varianssitasolla korkeimman odotetun tuoton tarjoava portfolio. Varianssi kuvaa portfolion sisältämää riskiä. Riskiä pyritään pienentämään hajauttamalla portfolio. MPT olettaa muun muassa tuottojen olevan normaalijakautuneita, instrumenttien välisten korrelaatioiden olevan kiinteitä, kaikkien sijoittajien olevan rationaalisia ja, että kaikilla sijoittajilla on hallussaan sama määrä informaatiota. (Xidonas et al. 2012, 6-8)

Capital Asset Pricing -malli (CAPM) perustuu ajatukseen siitä, että osakkeiden tuotot määräytyvät kaikkien sijoittajien kumulatiivisena tuottovaatimuksena systemaattiseen riskiin eli beta-kertoimeen nähden (Knüpfer & Puttonen 2018, 153). Mallissa tuotto-odotus voidaan laskea lisäämällä riskittömään korkokantaan markkinaportfolion tuotto-odotuksen ja riskittömän korkokannan erotuksen sekä sijoituskohteen betan tulo. Mallin kehittivät 1960-luvun puolivälissä William Sharpe, John Lintner ja Jan Mossin (Bodie et al. 2005, 282). Markkinaportfolio on hypoteettinen portfolio, joka sisältää kaikkia markkinoilla olevia arvopapereita. Markkinaportfolio kuvaa siis yleistä markkinoiden kehitystä. Betan arvo kuvaa sitä, kuinka paljon kyseisen sijoituskohteen arvo muuttuu suhteessa markkinoiden muutokseen. Suuri beta kuvaa suurta volatilitteettiä eli suurta riskiä, mutta myös suuria tuottomahdollisuuksia. Myös CAPM sisältää muille modernin rahoitusteorian kulmakiville ominaisia oletuksia. Näitä ovat esimerkiksi oletukset normaalijakautuneista tuotoista sekä rationaalisista sijoittajista, joiden sijoitusstrategia perustuu moderniin portfolioteoriaan (Bodie et al. 2005, 282).

Black-Scholes-malli on Fischer Blackin, Myron Scholesin ja Robert Mertonin vuonna 1973 kehittämä malli optioiden hinnoitteluun. Mallin kehittäminen oli poikkeuksellinen läpimurto rahoitusmaailmassa, sillä optioiden hinnoitteluun ei ollut vielä olemassa tehokasta mallia. Malli keräsi suosiota nopeasti ja se onkin nykypäivänä rahoitusalan ammattilaisten käytössä ympäri maailmaa. Mallin merkittävyydestä kertoo paljon se, että Mertonille ja Scholesille myönnettiin mallin keksimisen myötä Nobelin palkinto vuonna 1997. Blackille tätä kunniaa ei voitu myöntää, koska hän kuoli vuonna 1995. Malli sisältää oletuksia optioiden kohteena olevista instrumenteista. Tärkeimmät näistä ovat, että yritys ei maksa osinkoja optioiden voimassaoloaikana, riskitön korko sekä instrumentin volatilitteetti ovat vakioita ja, että instrumenttien hinnat ovat jatkuvia eivätkä tee suuria loikkauksia. (Capinski & Kopp 2012, vii; Bodie et al. 2005, 759-761)

2.2 Kritiikki modernia rahoitusteoriaa kohtaan

Elokuun 31.päivä vuonna 1998. New Yorkin pörssin seuratuin indeksi Dow Jones Industrial Average (DJIA) laski 6,8 prosenttia. Modernin rahoitusteorian normaalijakautuneisuuteen liittyvän oletuksen perusteella todennäköisyys näin suureen laskuun oli yksi 20 miljoonasta. Toisin sanoen moista ei olisi voitu odottaa tapahtuvan edes sadan tuhannen vuoden päivittäisen kaupankäynnin aikana. Lokakuussa 1997 DJIA putosi yhtenä päivänä 7,7 prosenttia. Todennäköisyys tähän oli yksi 50 miljardista. Heinäkuussa 2002 oli seitsemän päivän jakso, jonka aikana DJIA koki kolme jyrkkää pudotusta. Todennäköisyys tähän oli yksi neljästä biljoonasta. Vuosisadan prosentuaalisesti suurin lasku koettiin, kun DJIA syöksyi 19.lokakuuta vuonna 1987 peräti 29,2 prosenttia alaspäin. Todennäköisyys tähän oli niinkin pieni kuin yksi per 10^{50} . (Mandelbrot & Hudson 2004, 35-36)

Edellä mainitut tapahtumat ovat todisteita siitä, että modernin rahoitusteorian oletukset eivät päde aina todellisessa maailmassa. Ensinnäkin rationaalisten sijoittajien sijaan ihmiset ovat todellisuudessa tunteidensa vietävissä ja tulkitsevat usein informaatiota sekä todennäköisyyksiä väärin. Toisen oletuksen mukaan kaikki sijoittajat ovat samanlaisia, vaikka todellisuudessa sijoitusstrategioita löytyy paljon erilaisia. Hintojen jatkuvan ja sulavan liikkeen

sijaan hinnat pomppivat usein arvosta toiseen ja nämä pomput saattavat olla useinkin prosenttien suuruisia. Viimeiseksi, modernin rahoitusteorian mukaan hintojen muutokset ovat itsenäisiä sekä normaalijakautuneita. (Mandelbrot & Hudson 2004, 123-128) Esimerkit suurista pudotuksista kertovat, etteivät tuotot ole pitkällä aikavälillä normaalijakautuneita. Tässä tutkielmassa etsitään lisää todistusaineistoa juurikin tuottojen normaalijakautuneisuutta sekä itsenäisyyttä vastaan.

Vuosien saatossa on kehitelty erilaisia teorioita, joiden avulla voitaisiin kehitellä realistisempaa kuvaa rahoitusmarkkinoiden toiminnasta. Behavioraalinen rahoitus on tutkimusalue, joka tutkii sijoittajien käyttäytymistä rahoitusmarkkinoilla. Teoria perustuu modernin rahoitusteorian vastaiseen sijoittajien epärationaaliseen käyttäytymiseen rahoitusmarkkinoilla, mikä johtuu erilaisista psykologisista tekijöistä (Kapoor & Prosad 2017). Andrew W. Lo (2004, 1) puolestaan kehitteli myöskin sijoittajapsykologiaa tutkivan teorian, jonka hän nimitti sopeutuvien markkinoiden hypoteesiksi (Adaptive Market Hypothesis, AMH). AMH käsittelee muun muassa markkinoilla toimivien sijoittajaryhmien määrän ja koon sekä markkinaympäristössä tapahtuvien muutosten vaikutusta markkinoiden tehokkuuteen (Lo 2004, 19).

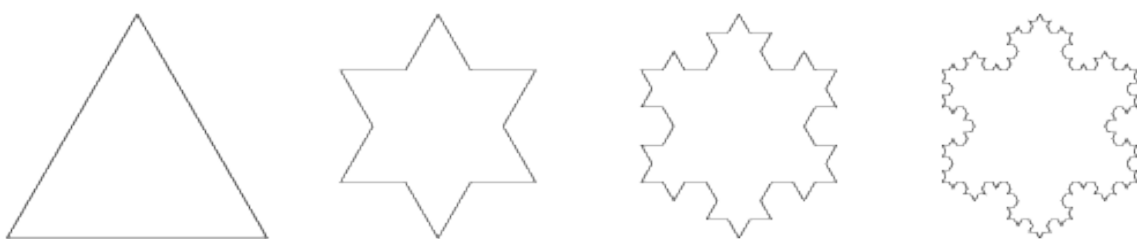
Itse Warren Buffettkin on ilmaissut kovaa kritiikkiä modernia rahoitusteoriaa kohtaan. Buffett on yksi maailman rikkaimmista ihmisistä ja häntä voidaan pitää jopa maailman taitavimpana sijoittajana, sillä hän on luonut omaisuutensa sijoitustoiminnalla. Mandelbrotin ja Hudsonin (2004, 48) mukaan Buffett on kuvailut modernia rahoitusteoriaa ”hölmöksi” sekä selvästi virheelliseksi ja myöskin vitsaillut haluavansa rahoittaa yliopistovirkoja tehokkaiden markkinoiden tutkimukseen, jotta yliopistoista valmistuisi lisää harhaluuloisia sijoittajia, joiden rahat hän voisi voittaa.

2.3 Fraktaalit

Fraktaaligeometria on rosoisia kuvioita ja ilmiöitä tutkiva matematiikan haara, joka etsii ”järjestyksen näennäisestä epäjärjestyksestä” (Mandelbrot & Hudson 2004, 38). Fraktaaleille

on ominaista niiden itsesimilaarisuus sekä invarianssi mittakaavan suhteen (Brown & Liebovitch 2010). Fraktaalien rakenne on siis samanlainen kaikissa mittakaavoissa. Toisin sanoen fraktaalien kuvaa suurennettaessa voidaan nähdä jatkuvasti samanlaisia rakenteita. Fraktaalit ovat kuvioita, joiden dimensio, poikkeuksia lukuun ottamatta, on murtoluku (Mandelbrot 1983, 15). Kun neliön, joka on kaksiulotteinen kappale, sivun pituutta muutetaan skaalaustekijällä n , muuttuu neliön massa n^2 -kertaiseksi. Kolmiulotteisen kuution sivun pituutta muuttamalla skaalaustekijällä n , muuttuu kuution massa puolestaan n^3 -kertaiseksi. Fraktaalisten kappaleiden tilanteessa massan kerrointekijän potenssin tilalla on siis murtoluku. Tätä fraktaalidimensiota merkitään kirjaimella D (Mandelbrot 1983, 15).

Fraktaalisuutta esiintyy kaikkialla luonnossa. Esimerkiksi rantaviivat, puiden lehdet ja ihmisen verisuonisto ovat fraktaalisia kuvioita. Fraktaaligeometriaa hyödynnetään useilla eri tieteenaloilla, sillä sen avulla voidaan usein saada tarkempi käsitys tutkittavasta ilmiöstä. Fraktaaligeometriaa voidaan hyödyntää osakemarkkinoiden lisäksi esimerkiksi fysiikassa, lääketieteessä, tietojenkäsittelytieteessä, tietoliikennetekniikassa, maantieteessä sekä sään ennustamisessa (Mandelbrot & Hudson 2004, 38). Kuvassa 1 on nähtävillä esimerkki fraktaalista kuvioista. Kyseinen kuvio on Kochin käyrä, jota kutsutaan myös Kochin lumihiutaleeksi.



Kuva 1. Kochin käyrä (Kochin lumihiutale) (Weisstein 2020)

2.4 Fraktaalisuus rahoitusmarkkinoilla

Ranskalaista matemaatikkoa Benoit Mandelbrotia (1924-2010) pidetään keskeisimpänä hahmona nykyaikaisen fraktaaligeometrian luomisessa. 1960-luvulla Mandelbrot alkoi

hyödyntämään kehittelemäänsä fraktaaligeometriaa rahoitusmarkkinoiden tutkimiseen. Hän huomasi markkinoilla fraktaalisia piirteitä, jotka olivat tehokkaiden markkinoiden hypoteesin oletusten vastaisia. Mandelbrot tutki rahoitusmarkkinoiden fraktaalisuutta yli 40 vuoden ajan käyttäen aineistona puuvillan hintoja, rautatieosakkeita, työnantajansa IBM:n osakkeita, korkoja, valuuttoja sekä muita omaisuuseriä. (Mandelbrot & Hudson 2004, 248)

Mandelbrot huomasi rahoitusmarkkinoita tutkiessaan, että kaikki modernin rahoitusteorian periaatteet eivät aina päde todellisessa maailmassa. Hänen mukaansa hintamuutokset eivät ole toisistaan riippumattomia, sillä niillä osoittautui olevan jonkinlainen muisti. Mandelbrot kutsuu tällaista muistia fraktaaliseksi tilastolliseksi riippuvuudeksi. Hän huomasi myöskin, että modernin rahoitusteorian oletus tuottojen normaalijakautuneisuudesta ei juurikaan kuvaa todellisia hintamuutoksia rahoitusmarkkinoilla. Kyseisen oletuksen sijaan Mandelbrot huomasi tuottojen noudattavan potenssilakia, joka aiheuttaa paksuhäntäisiä jakaumia. (Mandelbrot & Hudson 2004, 45-47)

Mandelbrotin lisäksi erityisesti Edgar E. Peters on vaikuttanut vahvasti rahoitusmarkkinoiden fraktaalisuuden tutkimukseen. Peters kehitteli 1990-luvulla teorian, jonka hän nimesi fraktaalisten markkinoiden hypoteesiksi (Fractal Market Hypothesis, FMH). Peters (1994) (ks. Weron & Weron 2000, 290-291) rakensi teoriansa seuraavien oletusten ympärille:

- Rahoitusmarkkinat koostuvat yksilöistä ja täten myös suuresta määrästä erimittaisia sijoitushorisontteja.
- Markkinoille tulevalla informaatiolla on erilainen vaikutus erilaisiin sijoitushorisontteihin.
- Likviditeetti on suurin markkinoiden tasapainoon vaikuttava tekijä.
- Hinnat heijastelevat sekä lyhyen aikahorisontin tekniseen analyysiin perustuvaa kaupankäyntiä että pitkän aikahorisontin fundamenttianalyysiin perustuvaa kaupankäyntiä.
- Arvopaperi, joka ei ole sidoksissa maailman yleiseen taloudelliseen tilanteeseen, ei seuraa pitkän aikavälin trendejä. Tällaisen arvopaperin hinnanmuodostuminen

määräytyy lyhyen tähtäimen kaupankäynnin, likviditeetin ja lyhyellä aikavälillä vaikuttavan informaation perusteella.

Müller ja kumppanit (1993) puolestaan kehittivät heterogeenisten markkinoiden hypoteesin (Heterogeneous Market Hypothesis, HMM). Teoria on luotu valuuttamarkkinoiden näkökulmasta. Myös HMM perustuu markkinoiden fraktaalisuuteen. HMM:n perustana toimivat seuraavat kolme oletusta:

- Markkinoiden heterogeenisuus pohjautuu sijoittajien erimittaisiin sijoitushorisontteihin ja välittäjien erilaisiin välitysfrekvensseihin. Markkinat koostuvat lyhyiden, keskipitkien sekä pitkien aikahorisonttien komponenteista.
- Markkinoilla eri toimijat ovat valmiita tyytymään eri hintoihin ja toteuttavat toimeksiantojaan erilaisissa markkinatilanteissa.
- Markkinoiden heterogeenisuutta luovat myös maantieteelliset eroavaisuudet toimijoiden välillä.

Näiden oletusten lisäksi teorian mukaan kaupankävijöiden toimintaan vaikuttavat myös eroavaisuudet riskinottovalmiudessa, institutionaalisissa rajoitteissa sekä kaupankäyntikustannuksissa. (Müller et al. 1993, 12-13)

2.5 Tuottojakaumat

Arvopaperin tuotoista tietyllä aikavälillä voidaan muodostaa tuottojakauma. Tuottojakauma, tai todennäköisyysjakauma, näyttää aineistossa esiintyvien havaintojen saamien arvojen yleisyyden. Jakaumaa esittävässä kuvaajassa pystyakselilla kuvattava havaintojen määrä esitetään prosentuaalisena arvona kaikkien havaintojen kokonaismäärästä. Vaaka-akselilla puolestaan on havaintojen arvot.

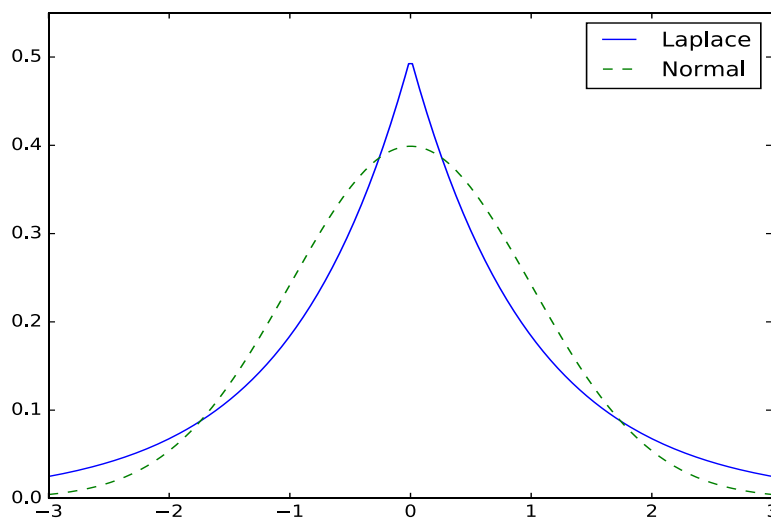
Todennäköisyysjakaumista tunnetuin on modernin rahoitusteorian oletuksissakin esiintyvä normaalijakauma. Normaalijakaumaa kutsutaan myös Gaussin kellokäyräksi. Tällaisessa jakaumassa havaintojen arvot ovat tasaisesti jakautuneet. Normaalijakautuneessa

aineistoissa noin 68 % havainnoista asettuu korkeintaan yhden keskihajonnan, noin 95 % korkeintaan kahden keskihajonnan ja noin 99,7 % korkeintaan kolmen keskihajonnan päähän aineiston keskiarvosta (Ross 2017, 279). Keskihajonta kuvaa sitä, kuinka havaintojen arvot ovat hajautuneet aineiston keskiarvon ympärille. Keskihajonta voidaan laskea seuraavanlaisella kaavalla (Heikkilä 1998, 85):

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}, \quad (1)$$

jossa	x_i	Havainto i
	\bar{x}	Otoksen keskiarvo
	n	Havaintojen lukumäärä

Tässä tutkielmassa tutkimuksen kohteena olevat paksuhäntäiset tuottojakaumat muistuttavat hyvin vahvasti Laplacen jakaumaa. Laplacen jakaumassa on paksummat ja pidemmät hännät sekä korkeampi huippu kuin Gaussin kellokäyrässä. Laplacen jakaumaa noudattavasta aineistosta esiintyy siis enemmän hyvin lähellä keskiarvoa olevia havaintoja ja hyvin kaukana keskiarvosta olevia havaintoja kuin normaalijakautuneesta aineistosta. Kuvassa 2 on havainnollistettu Gaussin kellokäyrän ja Laplacen jakauman eroavaisuudet.



Kuva 2. Normaalijakauma vs. Laplacen jakauma. (Cook 2019)

2.6 Hurstin eksponentti

Hurstin eksponentti (H) on saanut nimensä englantilaisen hydrologin Harold Edwin Hurstin (1880-1978) mukaan. Eksponentti sai syntynsä, kun Hurst urakoi selvittääkseen Niilin joen virtauksen syklejä. Hurstin (1951) (ks. Tarnopolski 2016, 663) tutkimuksissa selvisi, että Niilin toimintaa voidaan mallintaa potenssilain avulla. Tällöin tulevat tapahtumat ovat jollain tavalla riippuvaisia menneistä tapahtumista. Esimerkiksi trendinomaisessa liikkeessä havaintojen saamien korkeiden arvojen seurauksena myöskin tulevat havainnot tulevat todennäköisesti saamaan korkeita arvoja. Tällaista tapahtumasarjaa kutsutaan myös fraktaaliseksi Brownin liikkeeksi, jonka ominaisuuksiin kuuluu aikasarjan pitkäkestoinen ”muisti”. Fraktaalissa Brownin liikkeessä Hurstin eksponentti poikkeaa arvosta 0.5. (Tarnopolski 2016, 663) Ei-fraktaalinen eli normaali Brownin liike on fysiikasta tuttu käsite, joka kuvaa molekyylien satunnaiskulkua (Mandelbrot & Hudson 2004, 127).

Kun $H = 0.5$, seuraa kyseinen aikasarja Brownin liikettä eli satunnaiskulkua. H :n ollessa välillä $]0.5, 1]$, aikasarja on taipuvainen trendin seuraamiseen. H :n arvot välillä $[0, 0.5[$ puolestaan kertovat aikasarjan turbulentsista edestakaisesta liikkeestä. Kun aikasarja tekee tällaista edestakaista liikettä jonkin liukuvan keskiarvon ympärillä, puhutaan niin sanotusta *mean reversion* -ilmiöstä. Tämä ilmiö toimii pohjana yhdelle suosituimmista strategioista algoritmisessa kaupankäynnissä. Tätä strategiaa hyödyntäen kaupankävijät ohjelmoivat algoritmeja, jotka ostavat ja myyvät rahoitusinstrumenttia riippuen siitä, onko sen hinta tietyllä hetkellä tämän liukuvan keskiarvon yläpuolella vai alapuolella. H voidaan määrittellä seuraavan kaavan avulla (Brooks 1995, 4):

$$(R_n/S_n) = cn^H, \quad (2)$$

jossa R_n = aikasarjan arvojen vaihteluväli

S_n = aikasarjan arvojen keskihajonta

n = havaintojen lukumäärä

c = vakio

2.7 Autokorrelaatio

Perättäisten havaintojen korreloituneisuus on tyypillistä aikasarja-aineistolle. Korreloituneessa aineistossa tulevat havainnot ovat siis jossain määrin riippuvaisia menneistä havainnoista. Autokorrelaatio saadaan selville tutkimalla havaintojen residuaaleja eli jäännöstermejä. Residuaali kertoo, kuinka kaukana kyseinen havainto on aineiston kaikkien havaintojen välistä yhteyttä kuvaavasta regressiosuorasta. Autokorrelaation arvot ovat väliltä $[-1, 1]$. Jos arvo on pienempi kuin nolla, on kyseessä negatiivisesti korreloitunut aineisto. Negatiivisesti korreloituneessa aineistossa havaintojen etumerkit vaihtelevat, jolloin positiivisia arvoja seuraa usein negatiivinen arvo ja toisinpäin. Jos autokorrelaation arvo on suurempi kuin nolla, on aikasarja positiivisesti korreloitunut ja tällöin positiivisia havaintojen arvoja seuraa usein positiiviset arvot ja negatiivisia negatiiviset arvot. Autokorrelaation ollessa nolla, ei aineistossa ole minkäänlaista korrelaatiota. Mikäli autokorrelaation itseisarvo on 1, on kyseessä täydellisesti korreloitunut aikasarja. Aikasarjan autokorrelaatio voidaan määrittellä seuraavalla kaavalla (Pickup 2015, 20):

$$\rho = \frac{E((y_t - \mu_y) - (y_{t-1} - \mu_y))}{E(y_t - \mu_y)^2}, \quad (3)$$

jossa $E()$ = odotusarvo

y_t = tarkasteltava aikasarja

y_{t-k} = aikasarja y_t viiveellä k

μ_y = aikasarjan y_t keskiarvo

3. Tutkimusmenetelmät ja -aineisto

Tässä osiossa esitellään käytettävä tutkimusaineisto ja tavat, joilla valittuja tutkimusmenetelmiä hyödynnetään. Sekä tutkimusaineiston keräämiseen että tutkimusmenetelmien suorittamiseen on käytetty Python-ohjelmointikieltä.

3.1 Tutkimusaineisto

Tutkimusaineisto on kerätty *Yahoo Finance* -sivustolta. Aineistona käytetään kolmen osakeindeksin sekä kymmenen yhdysvaltalaisen yrityksen osakkeen historiallisia hintatietoja. Tuottojakaumien ja Hurstin eksponenttien tutkimiseen käytetään päivätuottoja. Autokorrelaatioiden tutkimiseen käytetään puolestaan viikko-, kuukausi- ja vuosituottoja. Aineiston tarkasteltavan aikavälin alkuhetki on valittu kunkin osakkeen ja indeksin kohdalla sen perusteella, kuinka pitkälle menneisyyteen siitä on saatavilla dataa Yahoos tietokannasta. Kunkin osakkeen ja indeksin tarkasteluajanjakson loppuhetkeksi on valittu 31/12/2019. Poikkeavat aikavälit eivät tässä tutkimuksessa haittaa, sillä tarkoituksena ei ole suorittaa aineiston sisäistä vertailua.

Valitut indeksit ovat Nasdaq 100, S&P 500 ja FTSE 100. Jokainen näistä kolmesta kuuluu maailman seuratuimpien indeksien joukkoon. Nasdaq 100 on yhdysvaltalaisen Nasdaq-pörssin hallinnoima indeksi, joka sisältää 100 suurinta Nasdaqiin kuuluvaa yritystä. S&P 500 on myöskin yhdysvaltalainen indeksi ja sitä hallinnoi Standard & Poor's. Se sisältää 500 yhdysvaltalaisista suuryritystä. FTSE 100 (The Financial Times Stock Exchange 100) on puolestaan Lontoon pörssissä toimiva indeksi, joka sisältää 100 suurinta kyseisessä pörssissä listattua yritystä.

Valittu osakejoukko on toimialallisesti hajautettu. Painopiste on kuitenkin teknologia-alan yrityksissä, sillä niitä on aineistossa neljä kappaletta. Aineiston teknologiayritysten tarkemmat toimialat jakautuvat puolijohdeteollisuuteen, elektroniikkateollisuuteen ja tietotekniikkaan

sekä ohjelmistokehitykseen. Loput kuusi yritystä ovat kaikki erilaisilta toimialoilta. Nämä toimialat ovat pikaruokapalvelut, elintarviketeollisuus, autoteollisuus, lentokone-/ilmailuteollisuus, kemianteollisuus sekä lääketeollisuus. Valitut yritykset ovat Apple, Boeing, DuPont, Ford Motor Company, Intel, McDonald's, Micron Technology, Microsoft, PepsiCo ja Pfizer. Tutkimukseen on valittu vain pitkäikäisiä yrityksiä, jotta saataisiin mahdollisimman pitkältä aikaväliltä dataa. Mitä enemmän havaintoja, sitä luotettavampia tutkimustuloksia saadaan. Jokaisen indeksin ja yrityksen tarkasteltava aikaväli ja yritysten toimialat on esitelty taulukossa 1.

Taulukko 1. Tutkittavat aikavälit ja valittujen yritysten toimialat

Yritys/indeksi	Tutkittava aikaväli	Toimiala
S&P 500 (SP500)	30/12/1927 – 31/12/2019	Osakeindeksi
Nasdaq 100 (NDX)	01/10/1985 – 31/12/2019	Osakeindeksi
FTSE 100 (FTSE)	15/01/1984 – 31/12/2019	Osakeindeksi
Apple (AAPL)	12/12/1980 – 31/12/2019	Elektroniikkateollisuus ja tietotekniikka
Boeing (BA)	02/01/1962 – 31/12/2019	Lentokone-/ilmailuteollisuus
DuPont (DD)	01/06/1972 – 31/12/2019	Kemianteollisuus
Ford Motor Company (FORD)	01/06/1972 – 31/12/2019	Autoteollisuus
Intel (INTC)	17/03/1980 – 31/12/2019	Puolijohdeteollisuus
McDonald's (MCD)	05/07/1966 – 31/12/2019	Pikaruokapalvelut
Micron Technology (MU)	01/06/1984 – 31/12/2019	Puolijohdeteollisuus
Microsoft (MSFT)	13/03/1986 – 31/12/2019	Ohjelmistot/tietotekniikka
PepsiCo (PEP)	01/06/1972 – 31/12/2019	Elintarviketeollisuus
Pfizer (PFE)	01/06/1972 – 31/12/2019	Lääketeollisuus

3.2 Tutkimusmenetelmät

Tutkimus suoritetaan kvantitatiivisin tutkimusmenetelmin. Valitun datan fraktaalisuutta tutkitaan Hurstin eksponenttien, tuottojakaumien sekä autokorrelaatioiden avulla. Empiirinen osuus aloitetaan tutkimalla aineiston osakkeiden ja indeksien tuottojakaumia. Tavoitteena on selvittää, poikkeavatko ne normaalijakaumasta paksuhäntäisyyden muodossa. Ensimmäisenä lähdetään liikkeelle laskemalla keskiarvot ja keskihajonnat. Näiden avulla selvitetään, kuinka paljon aineistosta löytyy vähintään kuuden sekä vähintään kymmenen keskihajonnan verran keskiarvosta poikkeavia havaintoja.

Osakkeiden ja indeksien poikkeamista satunnaiskulusta tutkitaan laskemalla päivätuotoille Hurstin eksponentit. Hurstin eksponenttien (H) avulla voidaan selvittää hintojen persistenssiä eli sitä, kuinka vahvasti niissä on havaittavissa jatkuvuutta. H antaa siis vastauksen siihen, ovatko tietyn osakkeen tai indeksin hinnat taipuvaisia seuraamaan tiettyä trendiä tai vaihtelevaan rajusti jonkin liukuvan keskiarvon ympärillä.

Seuraavaksi tutkitaan osakkeiden ja indeksien autokorrelaatiota. Kullekin lasketaan viikko-, kuukausi- ja vuosituottojen autokorrelaatiot. Autokorrelaatioiden avulla saadaan selville, ovatko hintamuutokset korreloituneet eli, että vaikuttavatko menneet hinnat tuleviin hintoihin. Autokorrelaatioiden arvoja verrataan Hurstin eksponenttien arvoihin, jotta saadaan selville tukevatko niiden arvot toisiaan.

4. Tutkimustulokset

Tässä kappaleessa käydään läpi tutkimustulokset. Kappale lähtee liikkeelle tuottojakaumien tutkimisesta. Seuraavaksi tarkastellaan aikasarjoille estimoituja Hurstin eksponenttien arvoja, minkä jälkeen siirrytään autokorrelaatioiden tarkasteluun.

4.1 Tuottojakaumat

Normaalijakaumaa noudattavassa aineistossa useamman kuin kolmen keskihajonnan päässä keskiarvosta olevat havainnot ovat todella harvinaisia. Vähintään kuuden ja vähintään kymmenen keskihajonnan päässä keskiarvosta olevat havainnot on valittu tutkimuksen kohteiksi, koska todennäköisyydet niiden tapahtumiseen normaalijakautuneessa aineistossa ovat äärimmäisen pienet. Todennäköisyys vähintään kuuden keskihajonnan tapahtumalle on noin 2×10^{-9} eli yksi kahdesta miljardista ja vähintään kymmenen keskihajonnan tapahtumalle noin 1.5×10^{-23} , joka on niin ällistyttävän pieni luku, että moisen tapahtuman voidaan sanoa olevan käytännössä mahdoton.

Taulukko 2. Päivätuottojen prosentuaaliset keskiarvot ja -hajonnat, havaintojen lukumäärät sekä useamman kuin 6 ja 10 kymmenen keskihajonnan päässä olevien havaintojen lukumäärät

	Päivätuottojen keskiarvo (%)	Päivätuottojen keskihajonta (%)	Aineistossa havainnot	6+ keskihajonnan päässä olevia havainnot	10+ keskihajonnan päässä olevia havainnot
SP500	0.0296	1.1845	23108	57	5
NDX	0.0638	1.6363	8633	13	1
FTSE	0.0276	1.0662	9276	10	2
AAPL	0.1062	2.8635	9846	15	2
BA	0.0614	2.0214	14599	9	1
DD	0.0366	1.9353	12000	11	2
FORD	0.0361	2.1933	12000	20	5
INTC	0.0831	2.4948	10034	7	1
MCD	0.0674	1.8617	13464	11	3
MU	0.1162	3.8934	8969	3	0
MSFT	0.1096	2.1312	8520	9	1
PEP	0.0489	1.5403	12000	13	1
PFE	0.0468	1.7309	12000	5	1

Kuten taulukosta 2 nähdään, esiintyy aineistossa lukuisia vähintään kuuden keskihajonnan päässä keskiarvosta olevia havaintoja. Aineiston pisimmän tutkittavan aikavälin omaavalla S&P 500 -indeksillä niitä on jopa 57 kappaletta. Micronin aikasarjassa niitä esiintyy puolestaan vain kolme kappaletta, mikä on aineiston alhaisin lukema tällä saralla. Keskimäärin niitä esiintyy noin 14 kappaletta yhtä osaketta tai indeksiä kohden.

Vähintään kymmenen keskihajonnan päässä keskiarvosta olevia havaintoja esiintyy aineistossa kaikilla osakkeilla ja indekseillä Micronia lukuun ottamatta. Micronilla onkin todella korkea keskihajonta (3.89), joten suurehkot päivittäiset hintamuutokset ovat sille yleisempiä kuin muille aineistossa. Pienet lukemat vähintään kuuden ja vähintään kymmenen keskihajonnan päässä keskiarvosta olevista havainnoista indikoivat, että Micronin osakkeen hinta tekee jatkuvasti suuria liikkeitä, mutta selkeästi muita havaintoja suuremmat liikkeet jäävät uupumaan. Tämä on havaittavissa liitteessä 10, josta voidaan nähdä poikkeuksellisen suurten piikkien puutos. Vähintään kymmenen keskihajonnan verran keskiarvosta poikkeavat havainnot voidaan helposti havaita poikkeuksellisen suurina piikkeinä. Esimerkiksi S&P 500 -indeksin piikkikuviossa (liite 1) vuoden 1987 lokakuun 19.päivän syöksylasku erottuu selkeästi joukosta.

Taulukossa 2 esiteltävät tulokset aineiston tuottojakaumista ovat vahva osoitus siitä, etteivät tuotot valittujen osakkeiden ja indeksien osalta noudata normaalijakaumaa. Monen keskihajonnan verran keskiarvosta poikkeavien havaintojen lukumäärä on liian suuri normaalijakautuneelle aineistolle. Tuottojakaumat ovat siis paksuhäntäisiä. Liitteiden 1-13 piikkikuvioista voidaan nähdä, että suurilla hintamuutoksilla on myös usein taipumus kasaantua ryppäisiin, mikä viittaa mahdolliseen hintamuutosten väliseen korrelaatioon.

4.2 Hurstin eksponentit

Aineiston tuottojakaumien paksuhäntäisyyden selvittämisen jälkeen voidaan siirtyä tutkimaan tuottojen epäsatunnaisuutta. Hurstin eksponentin kohdalla tuottojen epäsatunnaisuudesta indikoi arvo, joka poikkeaa arvosta 0.5. Tätä suurempi arvo kertoo aikasarjan taipumuksesta

noudattaa trendiä ja pienempi arvo puolestaan tavallista voimakkaammasta edestakaisin liikkeestä. Tässä tutkielmassa Hurstin eksponentit on laskettu viiveillä 300 ja 400, joten ne kuvaavat pitkän aikavälin yhteyksiä tuottojen välillä.

Taulukosta 3 nähdään, että lähes kaikilla aineiston osakkeilla H poikkeaa reilusti arvosta 0.5. Applen, Boeingin, Microsoftin ja Pfizerin keskuudessa on kaikkien H väliltä 0.62-0.72. Näiden neljän osakkeen hinnat ovat siis taipuvaisia liikkumaan trendinomaisesti. DuPontin, Intelin, Micronin ja PepsiCon keskuudessa puolestaan kaikkien H:n arvo on väliltä 0.17-0.33. Kyseisten osakkeiden hinnat siis tekevät selvästi keskimääräistä voimakkaampaa edestakaista liikettä. Mikäli näillä osakkeilla haluaa käydä lyhyen tähtäimen kauppaa, esimerkiksi viikko- tai kuukausitasolla, kannattaa siis harkita mean reversion -strategiaan turvautumista. Myös McDonaldsin osakkeen kohdalla on tästä ilmiöstä kyse, mutta paljon heikompana, sillä sen H on 0.42. H:n arvolla 0.59 Fordin osake puolestaan on heikohkosti taipuvainen trendin seuraamiseen.

Taulukko 3. Osakkeiden Hurstin eksponentit

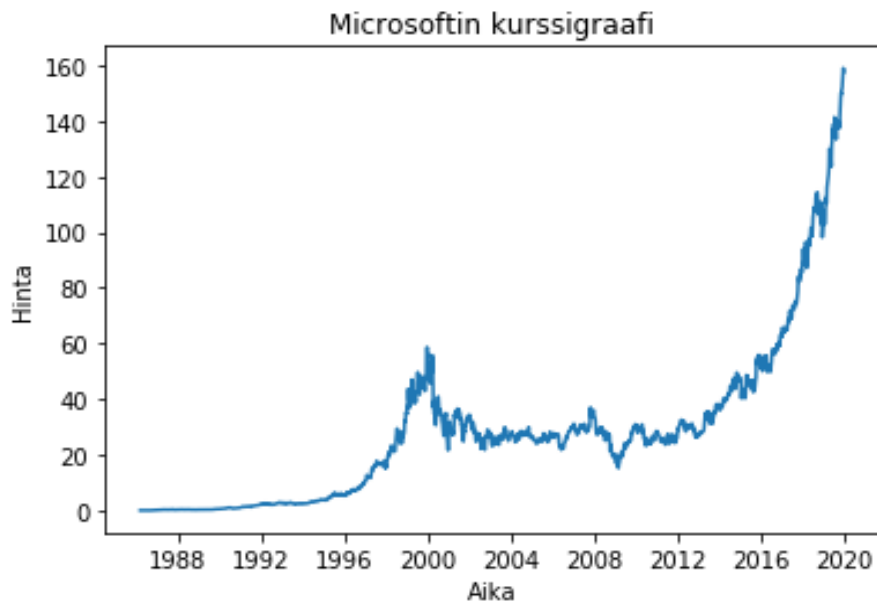
	AAPL	BA	DD	FORD	INTC	MCD	MU	MSFT	PEP	PFE
H	0.62	0.69	0.33	0.59	0.17	0.42	0.21	0.72	0.31	0.66

Osakeindeksien Hurstin eksponenttien arvot on esitelty taulukossa 4. S&P 500 ja Nasdaq 100 näyttävät olevan melko vahvasti taipuvaisia trendinomaiseen liikkeeseen H:n arvoilla 0.69 ja 0.62. FTSE 100 on myös taipuvainen tällaiseen liikkeeseen, mutta paljon heikommin. Sen H on vain 0.56, joten se on koko aineistosta lähimpänä satunnaiskulkua. Kaikkien osakeindeksien trendinomainen liike ei ole yllättävä tulos, sillä niillä on vahvempi yhteys maailmantalouden sykleihin kuin yksittäisillä osakkeilla.

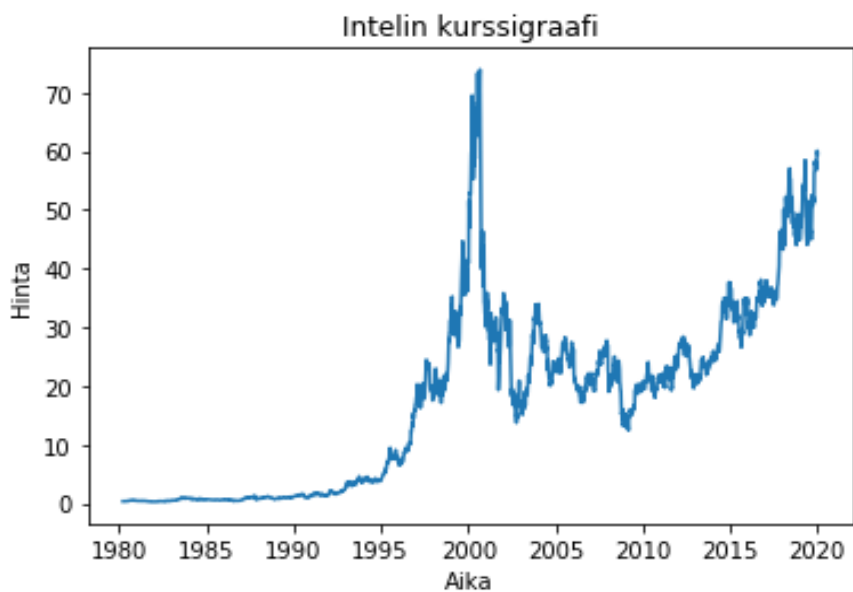
Taulukko 4. Osakeindeksien Hurstin eksponentit

	SP500	NDX	FTSE
H	0.69	0.62	0.56

Aineistossa ei siis esiinny yhtäkään osaketta tai indeksiä, joka noudattaisi Hurstin eksponentin arvon perusteella satunnaiskulkua. Kaikki näyttävät olevan enemmän tai vähemmän riippuvaisia menneistä hinnoista joko trendinomaisen liikkeen tai liukuvan keskiarvon ympärillä vaihtelevan liikkeen muodossa. Kuvien 3 ja 4 avulla on havainnollistettu suuren ja pienen H:n arvon eroavaisuus. Microsoftin ($H = 0.72$) kurssiliike on paljon sulavampaa kuin Intelin ($H = 0.17$), jonka kurssiliike on erittäin rosoista.



Kuva 3. Microsoftin kurssigraafi.



Kuva 4. Intelin kurssigraafi.

4.3 Autokorrelaatiot

Hurstin eksponentit antoivat vahvoja tuloksia siitä, että aineiston tuotoissa on epäsattunaisuutta. Seuraavaksi tarkastellaan antaako autokorrelaatio samanlaisia tuloksia. Selvitetään myös, onko autokorrelaatioiden ja Hurstin eksponenttien arvojen välillä yhteyttä. Jotta nämä tukisivat toisiaan, tulisi autokorrelaation olla positiivinen silloin, kun H:n arvo on suurempi kuin 0.5. Autokorrelaation tulisi puolestaan olla negatiivinen silloin, kun H on pienempi kuin 0.5.

Taulukko 5. Viikko-, kuukausi- ja vuosituottojen autokorrelaatiot

	Viikkotuottojen autokorrelaatio	Kuukausituottojen autokorrelaatio	Vuosituottojen autokorrelaatio	H
SP500	0.006	0.088	-0.013	0.69
NDX	-0.025	0.051	0.026	0.62
FTSE	-0.048	-0.006	-0.075	0.56
AAPL	0.02	0.056	0.003	0.62
BA	-0.034	0.069	0.06	0.69
DD	-0.002	-0.014	-0.157	0.33
FORD	-0.034	0.011	0.041	0.59
INTC	-0.059	-0.013	-0.188	0.17
MCD	-0.028	0.053	-0.053	0.42
MU	-0.038	0.007	-0.084	0.21
MSFT	-0.051	-0.072	0.075	0.72
PEP	-0.068	-0.015	-0.13	0.31
PFE	-0.091	-0.063	0.115	0.66

Taulukossa 5 on esitelty aineiston viikko-, kuukausi- ja vuosituottojen autokorrelaatiot. Taulukossa on myös H:n arvot näkyvillä, jotta niiden ja autokorrelaatioiden välisten yhteyksien tarkastelu helpottuu. Viikkotuottojen ja kuukausituottojen autokorrelaatiot jäävät kovin vähäisiksi. Viikkotuottojen autokorrelaatioista 7/13 tukee H:n arvoa. Kuukausituottojen autokorrelaatioista puolestaan 8/13 on H:n kanssa samalla puolella. Vuosituottojen autokorrelaatioiden ja Hurstin eksponenttien välillä on selvästi vahvempi yhteys. Näiden välillä jopa 11/13 on toisiaan tukevia. Vuosituottojen autokorrelaatioista löytyy myöskin itseisarvoltaan selkeästi aineiston suurimmat autokorrelaatiot. Intelillä on sekä aineiston pienin H:n arvo (0.17) että aineiston suurin negatiivinen vuosituottojen autokorrelaatio (-

0.188). Microsoftin, jonka H on aineiston suurin (0.72), vuosituottojen autokorrelaatio on puolestaan vain 0.075. Suurin (0.115) positiivinen vuosituottojen autokorrelaatio on Pfizerilla, jonka H (0.66) on myös melko korkea.

Autokorrelaatioista saadut tulokset eivät ole täysin vakuuttavia. Viikkotuottojen ja kuukausituottojen autokorrelaatiot ovat melko pieniä ja niistä vain hieman yli puolet tukevat Hurstin eksponenttien arvoja, joten ne eivät tuo tutkimukseen oikeastaan minkäänlaista lisäarvoa. Vuosituottojen autokorrelaatiot puolestaan ovat keskimääräisesti jo suurempia ja niistä suurin osa tukee Hurstin eksponenttien arvoja. Niidenkin joukosta kuitenkin löytyy myös kovin pieniä arvoja. Esimerkiksi Applen H on suurehko (0.62), mutta sen vuosituottojen autokorrelaatio on vain 0.003. S&P 500 -indeksin vuosituottojen autokorrelaatio puolestaan on miinuksella, vaikka sen H on niinkin suuri kuin 0.69. Vuosituottojenkaan autokorrelaatioiden perusteella ei siis voida tehdä vedenpitäviä päätelmiä.

5. Yhteenveto ja johtopäätökset

Tässä tutkielmassa selvitettiin, esiintyykö osakemarkkinoilla fraktaalisuutta valitussa datajoukossa. Fraktaalisuutta etsittiin paksuhäntäisten tuottojakaumien ja epäsatunnaisten tuottojen muodossa. Aineistona käytettiin kymmenen yhdysvaltalaisen yrityksen osakkeita sekä kolmea osakeindeksiä, joista kaksi on yhdysvaltalaisia ja yksi englantilainen. Tutkielman aikaväli rajattiin vuosiin 1927-2019, mutta kunkin osakkeen ja indeksin tutkittavan aikavälin alkuajankohta valittiin sen perusteella, kuinka pitkälle historiaan kunkin Yahoo Finance - tietokannan sisältämät hintatiedot ulottuivat. Fraktaalisuutta tutkittiin tarkastelemalla tuottojakaumia, Hurstin eksponentteja sekä autokorrelaatioita.

Tutkielmassa saatiin fraktaalisuuden puolesta puhuvia tuloksia. Erityisesti tuottojakaumien paksuhäntäisyydestä saatiin vahvoja todisteita. Aineiston kaikkien osakkeiden ja indeksien aikasarjoissa esiintyi useita vähintään kuuden keskihajonnan päässä keskiarvosta olevia havaintoja. Myös vähintään kymmenen keskihajonnan verran keskiarvosta poikkeavia havaintoja oli yhtä yritystä lukuun ottamatta kaikilla osakkeilla ja indekseillä 1-5 kappaletta. Aineiston tuottojakaumat eivät siis selvästikään ole normaalijakautuneita.

Hurstin eksponentit puolestaan antoivat tuottojen epäsatunnaisuuteen viittäviä tuloksia. Aineiston osakkeista neljä kappaletta noudatti mean reversion -ilmiötä $H:n$ arvoilla väliltä 0.17-0.33. Trendinomaista liikettä noudatti niin ikään neljä kappaletta aineiston osakkeista $H:n$ arvoilla väliltä 0.62-0.72. Loputkin kaksi osaketta poikkesivat arvosta 0.5, mutta hieman heikommin. Trendinomaista liikettä noudattivat myöskin kaikki osakeindeksit, joista kaksi melko voimakkaasti ja yksi melko heikosti.

Autokorrelaatiot eivät kuitenkaan antaneet yhtä vahvoja tuloksia kuin Hurstin eksponentit. Viikko- ja kuukausituottojen autokorrelaatiot eivät tukeneet kovin hyvin Hurstin eksponenttien arvoja, sillä niistä vain hieman yli puolet osoittivat samanlaista liikettä hinnanmuutoksissa. Viikko- ja kuukausituottojen autokorrelaatioiden arvot jäivät muutenkin

melko pieniksi. Vuosituottojen autokorrelaatioiden kohdalla jotkin osakkeet saivat vahvasti H:n arvoa tukevia tuloksia, mutta kahden indeksin osalta nämä olivat ristiriidassa toistensa kanssa. Myös vuosituottojen autokorrelaatioiden joukosta löytyi kovin pieneksi jääneitä arvoja.

Tutkielman päätutkimuskysymykseen *"Ilmeneekö valituissa osakkeissa ja osakeindekseissä fraktaalisuutta paksuhäntäisten tuottojakaumien ja epäsatunnaisten hintamuutosten muodossa?"* voidaan siis tutkimustulosten perusteella vastata, että valituissa osakkeissa ja osakeindekseissä ilmenee fraktaalisuutta. Ensimmäinen alaongelma kysyy *"Ovatko valitun aineiston tuottojakaumat paksuhäntäisiä?"* ja siihen saatiin vastaus tutkimalla tuottojakaumia. Tuottojakaumat olivat selvästi paksuhäntäisiä. Toinen alaongelma, *"Voidaanko valitussa aineistossa havaita riippuvuutta havaintojen välillä tutkimalla Hurstin eksponentteja ja autokorrelaatioita?"*, sai Hurstin eksponenttien osalta vahvoja fraktaalisuutta osoittavia tuloksia, mutta autokorrelaatioiden osalta tulokset jäivät laihemmiksi. Tutkimustuloksia tarkkaillessa tulee ottaa huomioon, että aineistoon on valittu vain suuria ja menestyviä yrityksiä, eikä lainkaan pieniä tai konkurssiin menneitä yrityksiä. Tästä saattaa seurata niin sanottu selviytymisharha, koska tulokset saattaisivat olla täysin erilaisia esimerkiksi konkurssiin menneille yrityksille. Tuloksiin saattaa vaikuttaa myöskin valikoitumisharha, koska aineistoa ei ole valittu täysin satunnaisesti.

Nämä tutkimustulokset voivat olla kiinnostavia kenelle tahansa rahoitusmarkkinoista kiinnostuneelle henkilölle. Ne auttavat mahdollisesti ymmärtämään paremmin rahoitusmarkkinoiden todellisuutta kuin moderni rahoitusteoria. Esimerkiksi pörssiromahduksissa tulee ilmi sekä tuottojen paksuhäntäisyys että epäsatunnaisuus. Romahdusten aikana tulee usein monia todella suuria päivittäisiä hinnanmuutoksia ja nämä suuret laskupäivät usein seuraavat toisiaan. Tästä voi seurata useita viikkoja tai kuukausia kestävä laskutrendi. Tuottojen epäsatunnaisuus toimii myöskin pohjana lyhyen tähtäimen kaupankäynnille pörssissä. Tällaista kauppaa tekevät seuraavat rahoitusinstrumenttien trendejä ja mean reversion -ilmiöitä.

Mikäli haluaisi vielä luotettavampia tutkimustuloksia rahoitusmarkkinoiden fraktaalisuudesta, voisi jatkotutkimuksen tehdä käyttäen paljon suurempaa aineistoa, joka sisältäisi esimerkiksi myös pienempiä, nuorempia, konkurssiin menneitä sekä Yhdysvaltojen ulkopuolelta olevia yrityksiä. Toinen mahdollinen tutkimuksen aihe voisi olla Hurstin eksponenttien ja autokorrelaatioiden avulla suunniteltu kaupankäyntistrategia, jota testattaisiin markkinoilla. Joka tapauksessa rahoitusmarkkinoiden fraktaalisuus on mielenkiintoinen tutkimuksen kohde. Sillä voi olla potentiaalia vahvistaa tulevaisuudessa jalansijaansa rahoitusmaailmassa.

Lähdeluettelo

- Bodie, Z., Kane, A. & Marcus, A. J. (2005) Investments. McGraw-Hill / Irwin: New York.
- Brooks, C. (1995) A measure of persistence in daily pound exchange rates. *Applied Economics Letter*, 2, 11, 428-431.
- Brown, C. T. & Liebovitch, L. S. (2010) Introduction to Fractals. In: Fractal Analysis. SAGE Publications: Thousand Oaks.
- Capinski, M. & Kopp, E. (2012) The Black-Scholes Model. Cambridge University Press: Cambridge.
- Cook, J. D. (2019) Normal approximation to Laplace distribution? [blogi]. [Viitattu 13.3.2020]. Saatavilla: <https://www.iohndcook.com/blog/2019/02/05/normal-approximation-to-laplace-distribution/>
- Heikkilä, T. (1998) Tilastollinen tutkimus. 2.p. Oy Edita Ab: Helsinki.
- Hurst, H. E. (1951) The long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116, (1951), 770-799.
- Kapoor, S. & Prosad, J. M. (2017) Behavioural Finance: A Review. *Procedia Computer Science*, 122, 2017, 50-54.
- Knüpfer, S. & Puttonen, V. (2018) Moderni rahoitus. 10.p. Alma Talent Oy.
- Lo, A. W. (2004) The Adaptive Market Hypothesis: Market Efficiency from an Evolutionary Perspective. *The Journal of Portfolio Management 30th Anniversary Issue 2004*, 30, 5.
- Malkiel, B. G. (2003) The Efficient Market Hypothesis and Its Critics. *Journal of Economic Perspectives*, 17, 1, 59-82.
- Mandelbrot, B. B. (1983) The Fractal Geometry of Nature. W.H. Freeman and Company: New York.
- Mandelbrot, B. B. & Hudson, R. L. (2004) Huonosti käyttäytyvät osakkeet. Suomentanut Marko Erola. Talentum Pro, Helsinki.

Müller, U. A., Dacorogna, M. M., Davé, R. D., Pictet, O. V., Olsen, R. B. & Ward, J. R. (1993) Fractals and Intrinsic Time – A Challenge to Econometricians.

Peters, E. E. (1994) Fractal Market Analysis, Applying Chaos Theory to Investments & Economics. Wiley: New York.

Pickup, M. (2015) Fundamental Concepts in Time Series Analysis. In: Introduction to Time Series Analysis. SAGE Publications: Thousand Oaks.

Ross, S. M. (2017) Introductory Statistics. 4.p. Elsevier: Lontoo.

Tarnopolski, M. (2016) On the relationship between the Hurst exponent, the ratio of the mean square successive difference to the variance, and the number of turning points. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 461, (2016), 662-673.

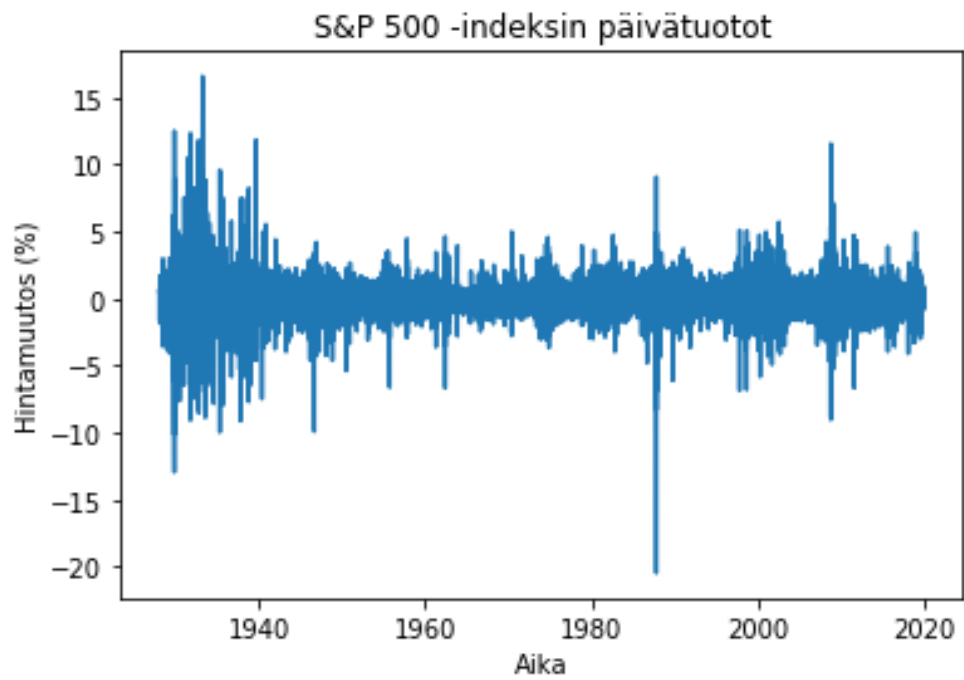
Weisstein, E. W. (2020) Koch Snowflake [verkkodokumentti]. [Viitattu 9.3.2020]. Saatavilla: <https://mathworld.wolfram.com/KochSnowflake.html>

Weron, A. & Weron, R. (2000) Fractal market hypothesis and two power-laws. *Chaos, Solitons and Fractals*, 11, (2000), 289-296.

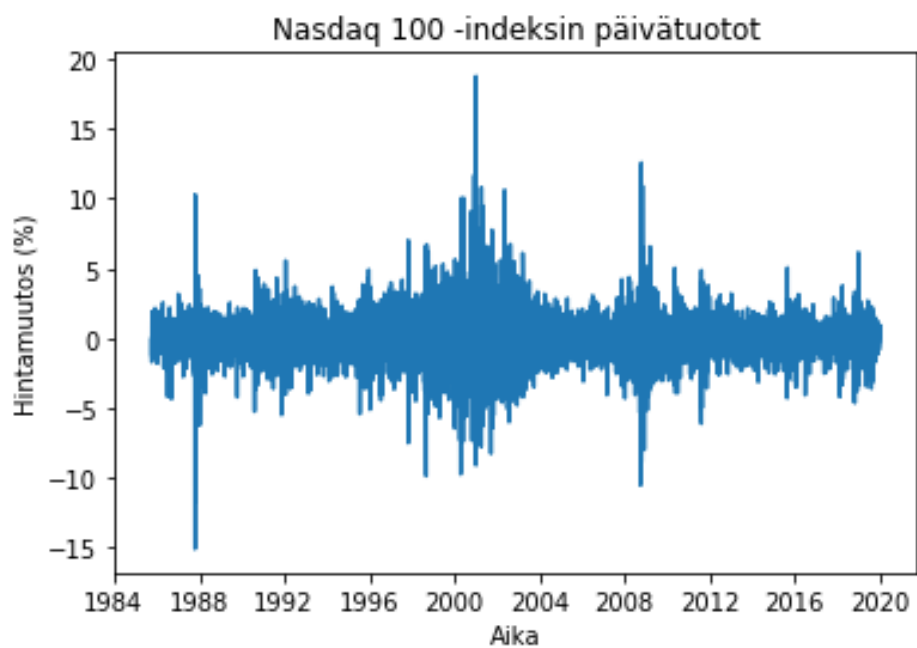
Xidonas, P., Mavrotas, G., Krintas, T., Psarras, J. & Zopounidis, C. (2012) Multicriteria Portfolio Management. Springer Science+Business Media: New York.

Liitteet

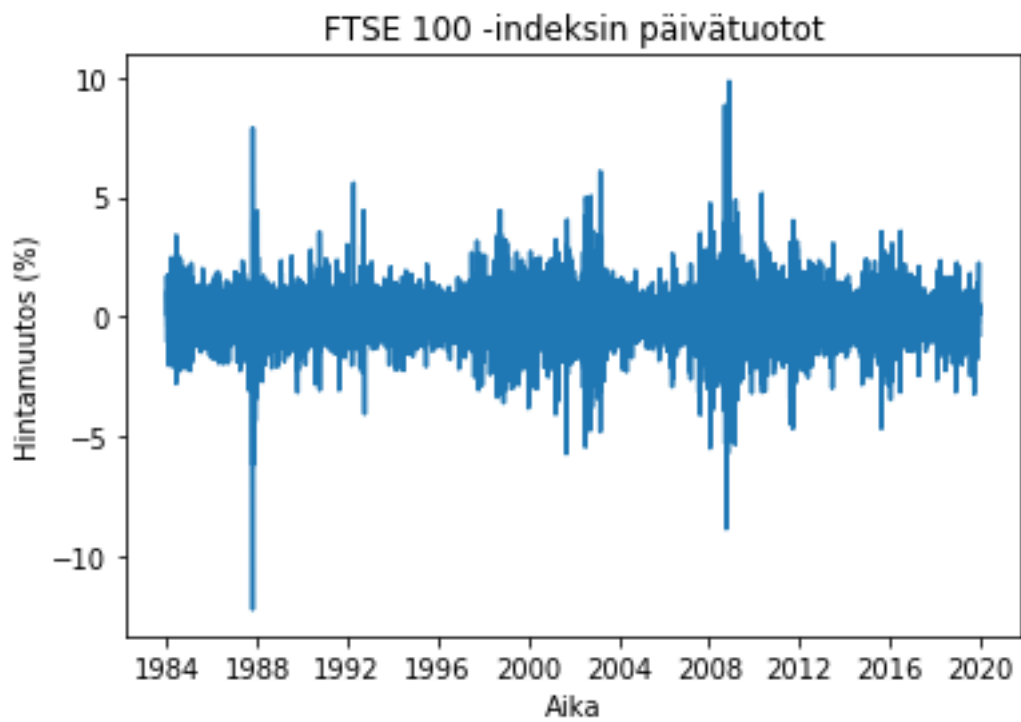
Liite 1. S&P 500 -indeksin päivätuotot



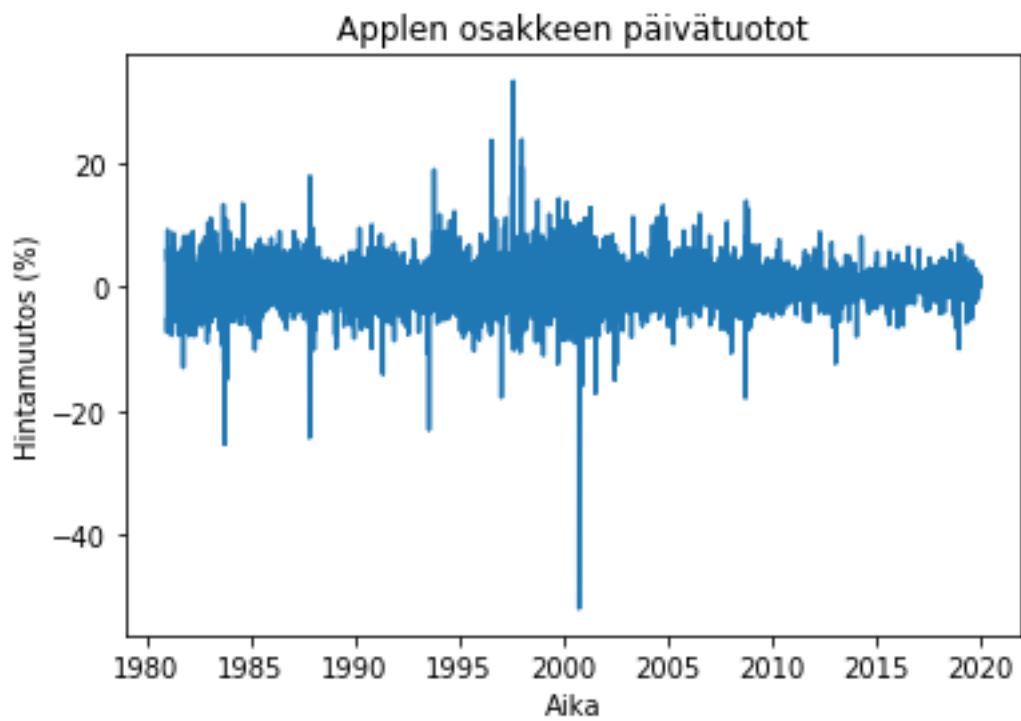
Liite 2. Nasdaq 100 -indeksin päivätuotot



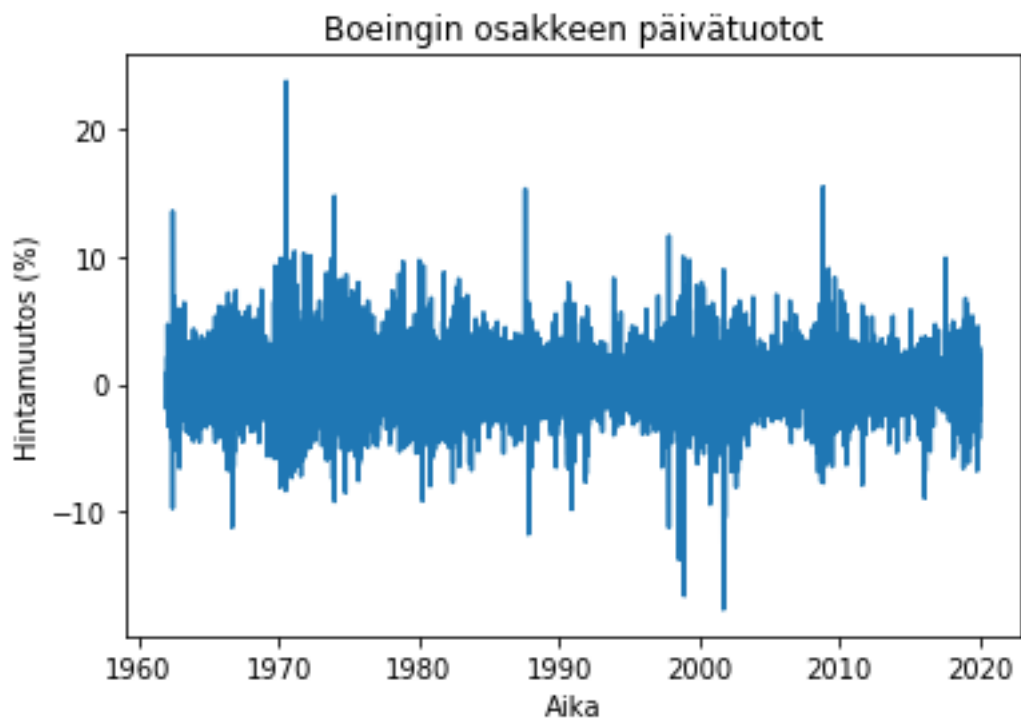
Liite 3. FTSE 100 -indeksin päivätuotot



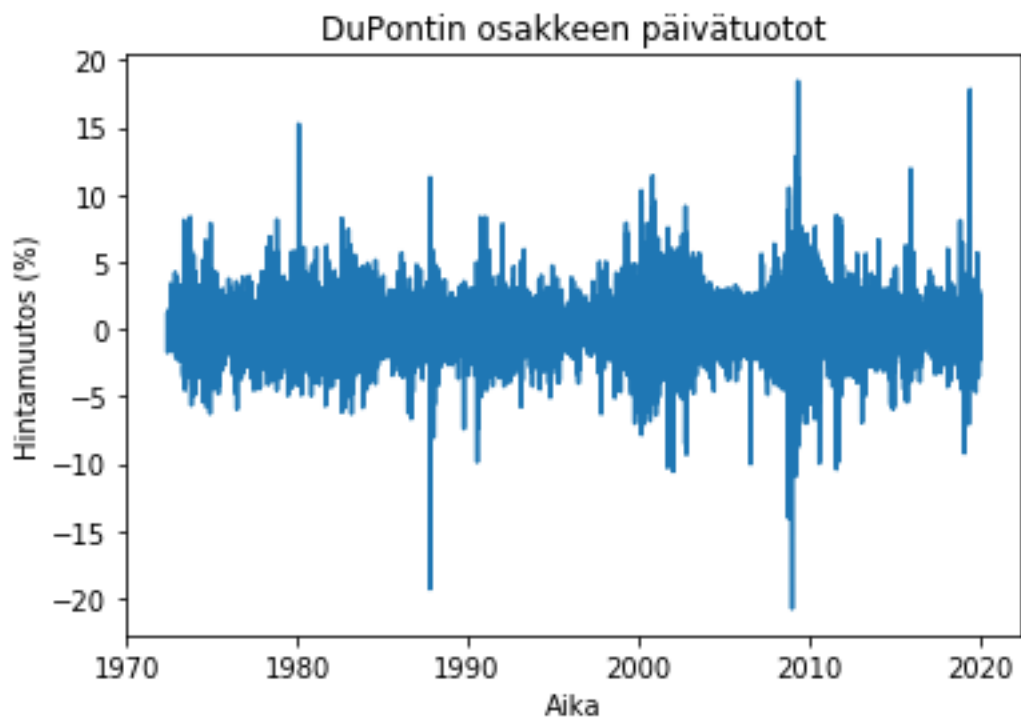
Liite 4. Applen osakkeen päivätuotot



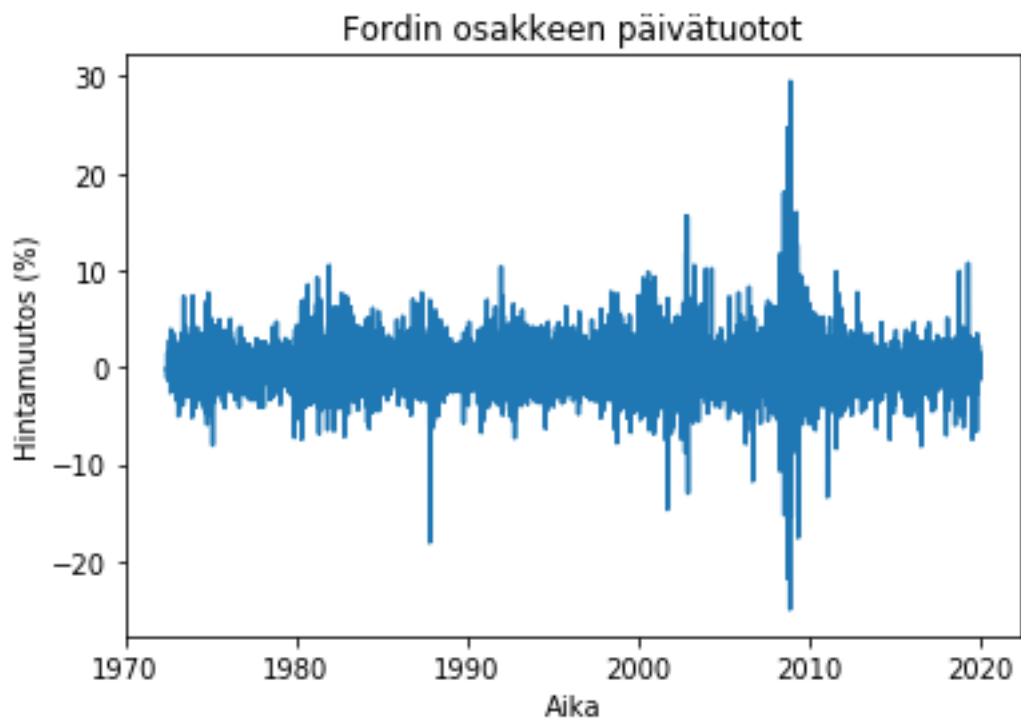
Liite 5. Boeingin osakkeen päivätuotot



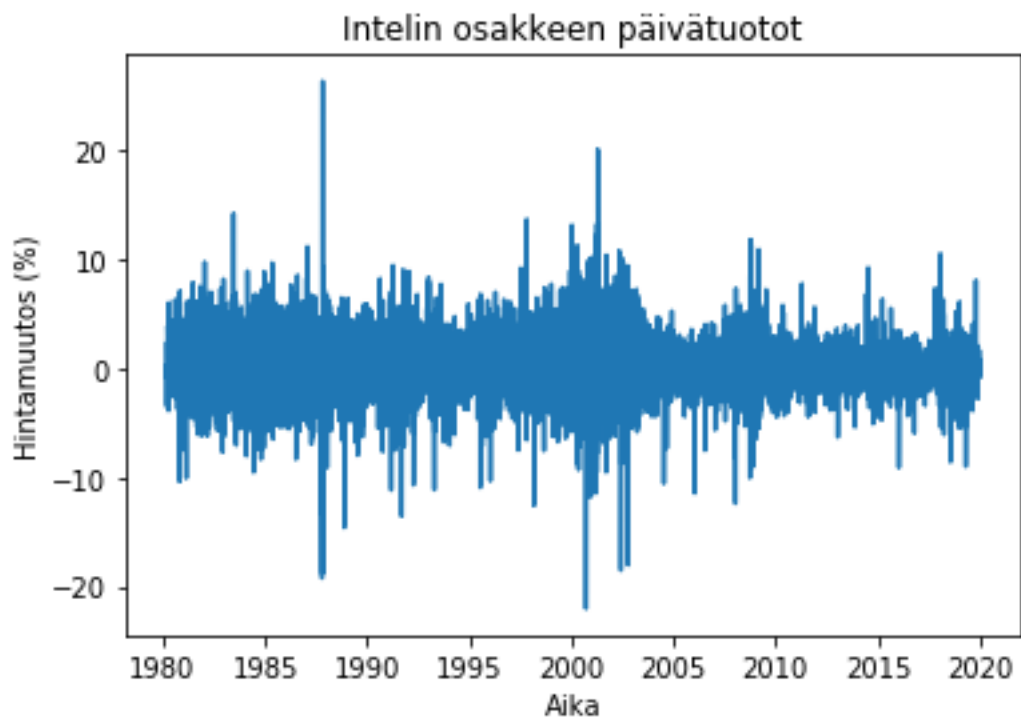
Liite 6. DuPontin osakkeen päivätuotot



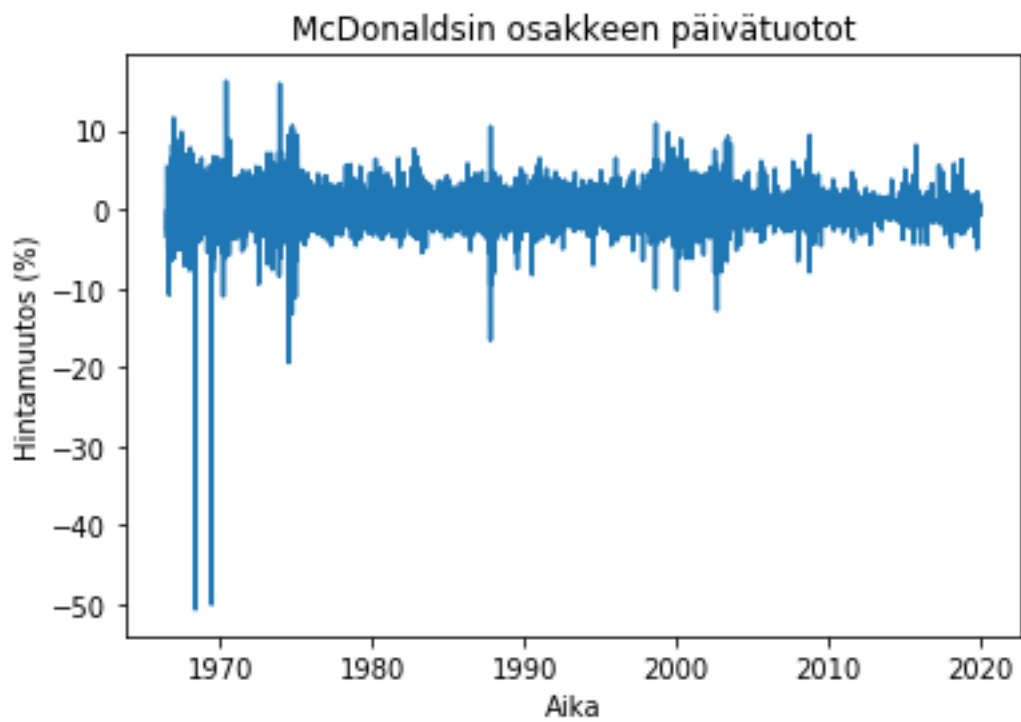
Liite 7. Fordin osakkeen päivätuotot



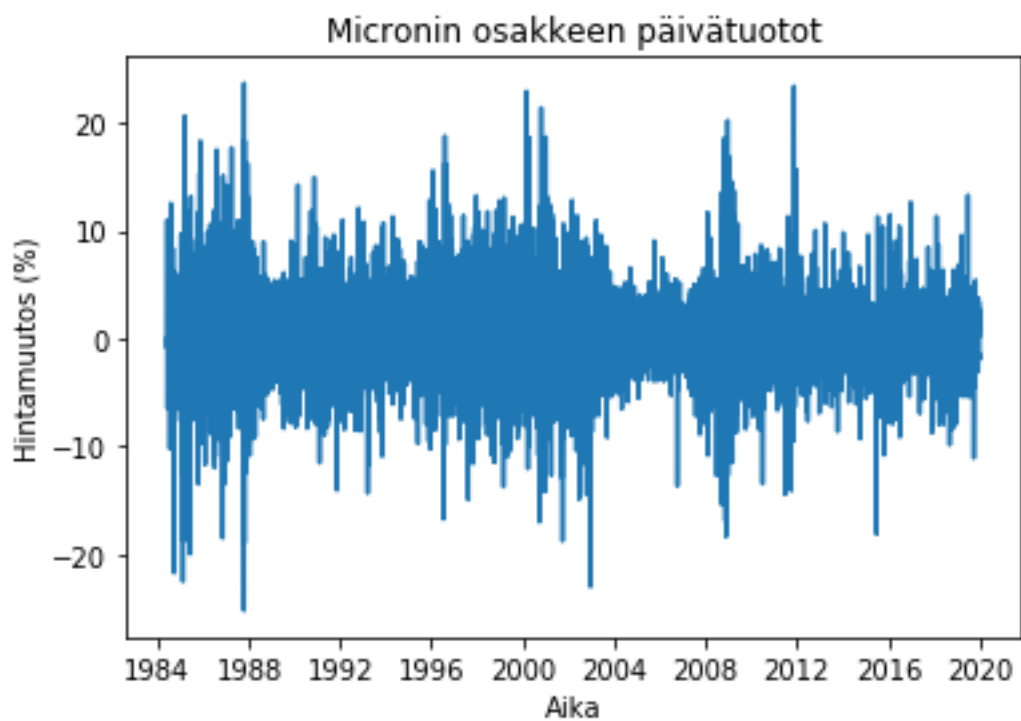
Liite 8. Intelin osakkeen päivätuotot



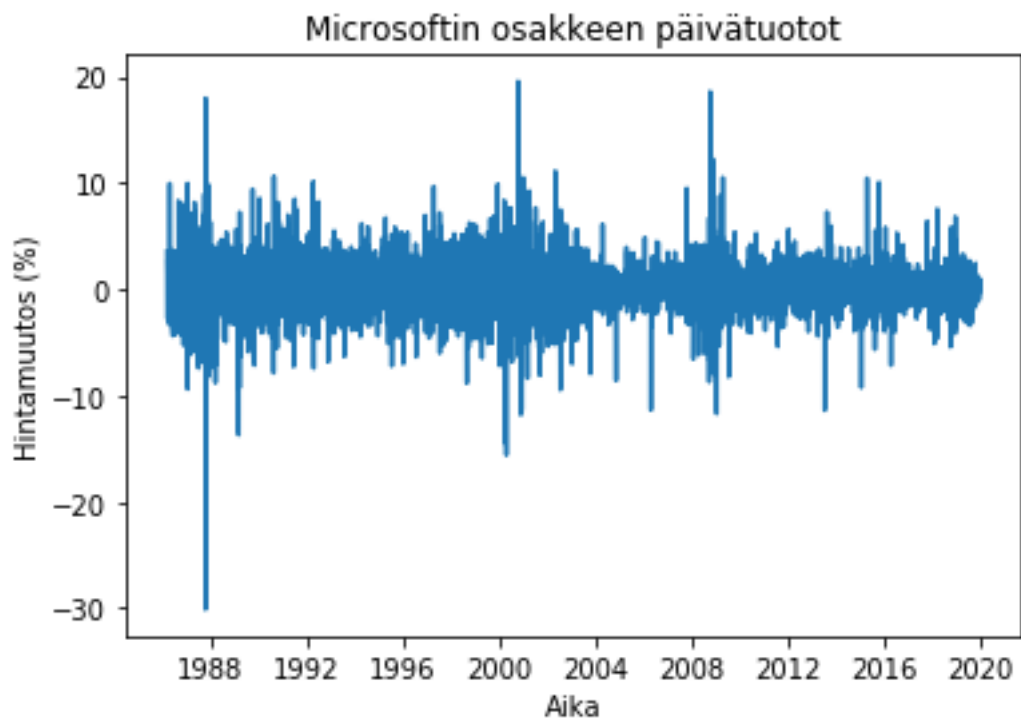
Liite 9. McDonaldsin osakkeen päivätuotot



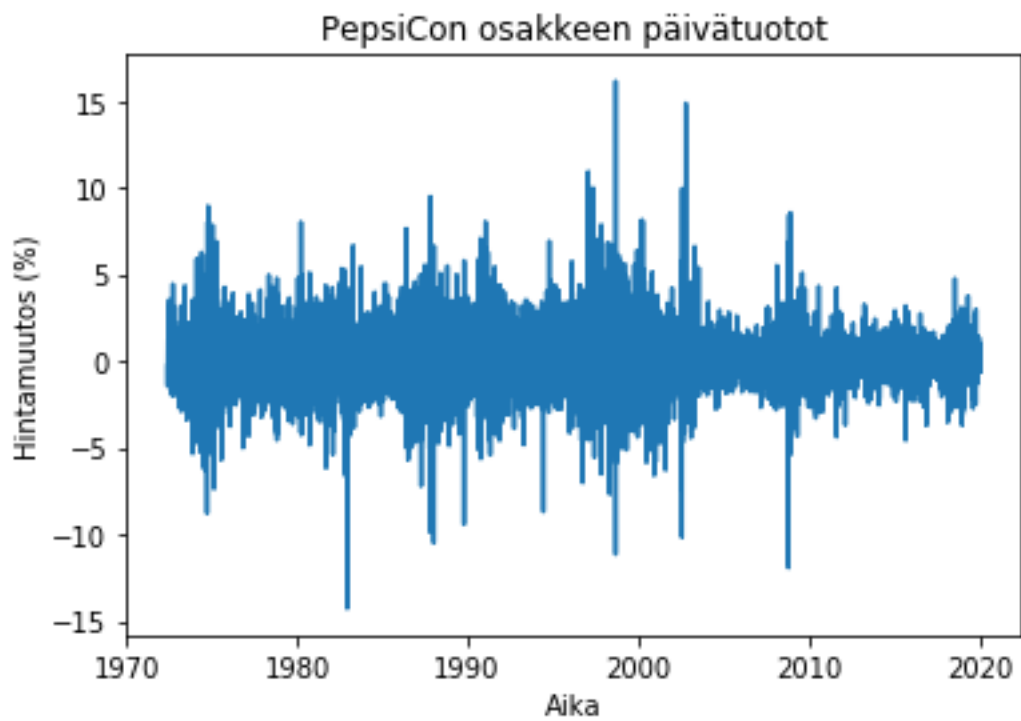
Liite 10. Micronin osakkeen päivätuotot



Liite 11. Microsoftin osakkeen päivätuotot



Liite 12. PepsiCon osakkeen päivätuotot



Liite 13. Pfizerin osakkeen päivätuotot

