



LUT-kauppakorkeakoulu

Kauppatieteiden kandidaatintutkielma

Strateginen rahoitus

Value-at-Risk ja Conditional Value-at-risk markkinariskin mittaamisessa
Value-at-Risk and Conditional Value-at-risk for measuring market risk

6.12.2020

Tekijä: Eemeli Leponiemi

Ohjaaja: Juha Soininen

TIIVISTELMÄ

Tekijä	Eemeli Leponiemi
Tutkielman nimi	Value-at-risk ja Conditional Value-at-Risk markkinariskin mittaamisessa
Akateeminen yksikkö	LUT-kauppakorkeakoulu
Koulutusohjelma	Kauppätieteet, Strateginen rahoitus
Ohjaaja	Juha Soininen
Hakusanat	VaR, CVaR, Historiallinen simulaatio Varianssi-kovarianssi-menetelmä

Tässä kandidaatintutkielmassa vertaillaan VaR- ja CVaR-mallia ja niiden estimointimenetelmiä markkinariskin mittaamiseen. Lisäksi tutkitaan onko oletus tuottojakautuman normaalijakautuneisuudesta soveltuvainen käytettäessä parametrisia estimointimenetelmiä. Tutkimuksessa käytetään historiallista simulaatiota ja varianssi-kovarianssi-menetelmää estimoidessa VaR- ja CVaR-mallit viidelle eri MSCI indeksille, jotka ovat aikajaksolta 2009-2019. Markkinariskiä on mitattu 95 %:n ja 99 %:n luottamustasoilla. Jotta VaR ja CVaR-mallien suoriutumiskykyä voidaan arvioida luotettavasti jälkitestataan mallit kolmella erilaisella jälkitestausmenetelmällä.

Empiiriset tulokset osoittavat, että ei-parametrinen estimointimenetelmä suoriutui paremmin kuin parametrinen estimointimenetelmä käytetyillä luottamustasoilla. Taus-
taoletusta tuottojakauman normaalijakautuneisuudesta ei voida yleisesti katsoa soveltuvaksi käytettäessä VaR- ja CVaR-malleja. CVaR-mallilla on paremmat matemaattiset ominaisuudet, minkä seurauksena se on myös informatiivisempi verrattuna VaR-malliin. Toisaalta CVaR-mallin jälkitestaaminen on haastavampaa kuin VaR-mallin ja se on herkempi estimointivirheille. Siitä huolimatta, että kummallakin mallilla on omat rajoitteensa täydentävät ne myös toisiansa ja tuottavat arvokasta tietoa markkinariskin mittaamiseen.

ABSTRACT

Author	Eemeli Leponiemi
Title	Value-at-risk and Conditional Value-at-Risk for measuring market risk
School	LUT School of Business And Management
Degree programme	Business Administration, Strategic finance
Supervisor	Juha Soininen
Keywords	VaR, CVaR, Historical simulation Variance-covariance method

In this thesis, we are comparing two risk measures VaR and CVaR and their estimation methods for measuring market risk. Also, we explore if the assumption of return distribution normality is suitable for parametric estimation methods. This thesis applies historical simulation and variance-covariance approach to estimate VaR and CVaR models for five MSCI indices from different market areas. The data used in the study based on daily returns of MSCI indices which are from period 2000-2019. The market risks are calculated both 95 % and 99 % confidence levels. To evaluate the performance of VaR and CVaR models this thesis applies three different backtesting methods for models.

The empirical results show that the non-parametric estimation method outperforms the parametric estimation method in used confidence levels. The assumption about return distribution normality is not commonly applicable when using VaR or CVaR models. CVaR seems to have better mathematical properties and hence being more informative compared to VaR. In turn, CVaR is more sensitive to estimation errors and more challenging to backtest. Although both models have their shortcomings they do also complement each other. Instead of saying one model is better than the other they both provide valuable information for measuring market risk.

Sisällys

Taulukot

1	Johdanto	1
1.1	Tutkimuksen tavoitteet ja rajaukset	2
1.2	Tutkimuksen rakenne	3
2	Markkinariski ja riskin mittaaminen	4
2.1	Markkinariskin hallinta	4
2.2	Riskimittarit	5
2.2.1	Value-at-Risk	6
2.2.2	Value-at-Risk kritiikki	8
2.2.3	Conditional Value-at-Risk	11
2.3	VaR- ja CVaR-estimointimenetelmät	13
2.3.1	Varianssi-kovarianssi-menetelmä	13
2.3.2	Historiallinen simulaatio	15
2.4	Jälkitestausmenetelmät	16
2.4.1	Binomitesti	17
2.4.2	Kupiecin testi	18
2.4.3	Acerbin ja Szekelyn ehdoton testi	18
3	Kirjallisuuskatsaus	20
4	Data	22
5	Tulokset	25
5.1	VaR-estimointi	25
5.2	CVaR-estimointi	26
5.3	Jälkitestausprosessi	27
5.3.1	Binomitesti	27
5.3.2	Kupiecin testi	29
5.3.3	Acerbin ja Szekelyn ehdoton testi	30

6 Johtopäätökset	32
-------------------------	-----------

Lähdeluettelo	35
----------------------	-----------

A Indeksien tuottojakaumat

Taulukot

1	Luottamustason vaikutus z-arvoon	8
2	Subadditiivisuuden puute: Optioiden tarkastelu erikseen	10
3	Subadditiivisuuden puute: Optioiden tarkastelu yhdessä	11
4	Indeksien tunnusluvut	23
5	Jarque-Bera-testin tulokset	24
6	VaR-estimointien tulokset	25
7	CVaR-estimointien tulokset	26
8	Binomitestin tulokset (VaR 95 %)	27
9	Binomitestin tulokset (VaR 99 %)	28
10	Proportion of Failure (POF) testin tulokset	29
11	Acerbin ja Szekelyn ehdottoman testin tulokset (CVaR 95 %)	30
12	Acerbin ja Szekelyn ehdottoman testin tulokset (CVaR 99 %)	31

1 Johdanto

Riskien mittaamisen tärkeys on kasvanut viimeisten vuosikymmenien aikana pankkijärjestelmässämme. Tähän ovat johtaneet muun muassa 1990-luvun loppupuolella tapahtunut Dotcom-kupla ja vuonna 2008 tapahtunut finanssikriisi, joka aiheutti kokonaisuudessaan 3,4 biljoonan dollarin tappiot rahoituslaitoksille (Dattels & Kodres 2009). Myös entistä monimutkaisempien johdannaisten laaja-alainen käyttö kehittyneiden maiden rahoitusmarkkinoilla on tehnyt riskien minimoimisesta tärkeämpää kuin koskaan. Tämän seurauksena tutkijat ja alalla työskentelevät ovat viime vuosina kiinnittäneet huomiota erilaisiin riskimittareihin, joista suosioon on noussut Value-at-Risk.

Value-at-Risk-mallin (VaR) kehityksen kannalta tärkeimpänä kulmakivenä voidaan pitää pankkiiriliike JPMorganin päätöstä kehittää oma VaR-malli, joka on tunnettu nimellä RiskMetrics (Longerstaey & Spencer 1996). Kyseinen malli saavutti nopeasti suosiota, ja siitä tuli eräänlainen standardi finanssialalla. Tästä kertoo esimerkiksi Baselin komitean (BCBS) päätös tuoda toisessa säädöksessään (Basel II) VaR-mallien käyttö pakolliseksi osaksi pankkitoimintaa. VaR-mallia voidaan pitää yleisesti parempana riskimittarina kuin volatilitteettia sen ominaisuuksien takia. Kuitenkin VaR-mallilla on myös omat puutteensa, minkä seurauksena alkuperäistä mallia on pyritty kehittämään siten, että niiden matemaattiset ominaisuudet ovat riskimittarille suotuisimmat.

VaR-malli ja sen estimointimenetelmät ovat saaneet osakseen myös kritiikkiä. Eniten keskustelua on tuottanut mallin informatiivisuuden puute sen jälkeen, kun ennustettu riski ylittyy. Artzner et al. (1999) puolestaan keskustelivat VaR-mallin puutteellisuuksista huomioida hajautushyötyjä. Myöhemmin VaR-mallille on ehdotettu vaihtoehtoista riskimittaria, joka huomioi puutteet, josta alkuperäistä mallia on kritisoitu. Malli tunnetaan nimellä Conditional Value-at-Risk (CVaR).

Riskien mittaamisen tärkeyden kasvaessa on myös riskimittareiden tutkimiseen kiinnitetty enemmän huomiota. Hendricks (1996) tutki laajasti VaR-mallien estimointime-

netelmien eroavaisuuksia. Ei-parametriset menetelmät tuottivat korkeamman ennusteen portfolioiden riskisyydestä, mutta erot estimointimenetelmien välillä eivät kuitenkaan olleet huomattavia. Tutkimuksessa tehtiin taustaoletus tuottojen normaalijakautuneisuudesta, joka oli soveltuvaisempi 95 %:n luottamustasolla kuin 99 %:n luottamustasolla parametrisille menetelmille.

Olson & Wu (2013) mukaan puolestaan oletus tuottojen normaalijakautuneisuudesta johtaa tilanteeseen, jossa estimointimenetelmät tuottavat aliarvion todellisesta riskisyydestä. Tämän vuoksi logistinen normaalijakauma on soveltuvaisempi empiirisille tuottojakaumille, sillä se huomioi tuottojakaumissa yleisesti esiintyvät paksummat hännät paremmin.

Yamai & Yoshiba (2005) vertailivat VaR- ja CVaR-mallien soveltuvuutta markkinariskin mittaamiseen. Tutkimuksen mukaan VaR-mallin käyttäminen riskimittarina saattaa antaa harhaisen estimaatin todellisesta riskisyydestä. CVaR on puolestaan informatiivisempi mittari, joka huomioi riskisyyttä monipuolisemmin, mutta toisaalta on myös herkempi estimointivirheille.

Tässä tutkimuksessa vertaillaan VaR- ja CVaR-mallien suoriutumista markkinariskin mittaamisessa hyödyntäen parametrisia sekä ei-parametrisia estimointimenetelmiä. Lisäksi tarkastellaan normaalijakautuneisuus oletuksen soveltuvuutta parametrisille estimointimenetelmille. Jotta riskimittareiden tuloksia voidaan arvioida luotettavasti on tutkimuksessa käytetty huomattavan pitkää aikasarja-aineistoa ja lisäksi riskimittareiden tulokset ovat jälkitestattu kolmella erilaisella jälkitestausmenetelmällä.

1.1 Tutkimuksen tavoitteet ja rajaukset

Tämän tutkimuksen tavoitteena on vertailla VaR- ja CVaR-mallien ja niiden estimointimenetelmien ominaisuuksia ja suoriutumista markkinariskin mittaamisessa. Tutkimuksessa lasketaan yhden päivän VaR- ja CVaR-estimaatit 95 %:n ja 99 %:n luottamustasoilla. Estimoinnissa hyödynnetään parametrissa menetelmää eli varianssi-kovarianssi-

menetelmää ja ei-parametrista menetelmää eli historiallista simulaatiota. Tutkimus suoritetaan viidelle eri osakeindeksille, joiden tiedot ovat ajalta 2009-2019. Osakeindeksit ovat erilaisilta markkina-alueilta, jotta mittareiden suoritumista pystytään arvioimaan laajemmin. Lopuksi estimointitulokset jälkitestataan ja tämän jälkeen niiden suoriutuminen arvioidaan.

Tutkimuksen tavoitteena on löytää vastaus seuraaviin kysymyksiin:

Voidaanko CVaR-mallia pitää ylivoimaisena verrattuna VaR malliin?

Soveltuvatko parametriset menetelmät estimointimenetelmäksi paremmin kuin ei-parametriset menetelmät?

Onko taustaoletus tuottojen normaalijakautuneisuudesta soveltuva käytettäessä parametrisia estimointimenetelmiä?

Aiheen laajuutta on rajattu jättämällä estimointimenetelmistä pois Monte Carlo -simulaatio ja Bootstrapping-menetelmä.¹ Myös erilaisten painokertoimien kuten EQMA, EWMA ja GARCH käyttöä ei ole huomioitu tutkimuksessa, sillä volatilitietin optimaalinen estimointi on jo itsessään oman tutkimuksen laajuinen, eikä tässä työssä pystytä syventymään aiheeseen laajemmin.

1.2 Tutkimuksen rakenne

Tutkimus etenee johdannon jälkeen seuraavasti. Luvussa 2 määritellään teoreettinen pohja, johon tutkimus nojautuu sekä käsitellään aiheeseen liittyvää metodologiaa. Luvussa 3 esitellään aiempia tutkimuksia käsiteltävästä aiheesta, jotta empiiriselle osiolle tutkimuksesta saadaan vertailukohta. Luvussa 4 esitellään tutkimuksessa käytetty aineisto ja tutkimukselle olennaiset tunnusluvut. Luku 5 on tutkimuksen empiirinen osio, josta käsitellään estimointi- ja jälkitestausmenetelmien tuloksia sekä keskustellaan mallien suoritumisesta markkinariskin mittaamisessa. Luvussa 6 tehdään tuloksien pohjalta johtopäätökset ja pohditaan mahdollisia jatkotutkimuksen aiheita.

¹Bootstrapping-menetelmä on historiallisen- ja Monte Carlo -simulaation risteytys.

2 Markkinariski ja riskin mittaaminen

Tässä osiossa esitellään teoreettinen viitekehys markkinariskin mittaamiseen ja sen hallintaan sekä tehdään katsaus riskimittareiden historiaan. Tämän jälkeen määritellään tutkimuksessa käytetyt riskimittarit, Value-at-Risk (VaR) ja Conditional Value-at-Risk (CVaR). Lisäksi tehdään yleiskatsaus käytetyistä estimointimenetelmistä, varianssi-kovarianssi-menetelmästä ja historiallisesta simulaatiosta sekä keskustellaan menetelmien ominaisuuksista. Lopuksi VaR- ja CVaR-malleille määritellään tässä tutkimuksessa käytetyt jälkitestausmenetelmät.

2.1 Markkinariskin hallinta

Jorion (2007) mukaan markkinariskillä tarkoitetaan riskiä tappioihin, jotka koituvat markkinahintojen muutoksista ja volatiliteetista. Yleisesti markkinariski voidaan jakaa kahteen eri osa-alueeseen: idiosynkraattiseen eli epäsystemaattiseen riskiin, jolla tarkoitetaan hajautettavissa olevaa riskiä ja systemaattiseen riskiin eli koko kansantaloutta koskeviin riskeihin, jotka eivät ole hajautettavissa. Tällaisia riskejä ovat esimerkiksi inflaatio. (Alexander 2009a, 7-8) Riskien hallinta ei ole yksinkertaista, sillä kaupankäynti on entistä enemmän keskittynyt äärimmäisen monimutkasiin rahoitusinstrumentteihin, joiden riskiä on hankala arvioida. Riskien minimoimista hankaloittaa rahoitusmarkkinoilla vallitseva vaihtoehtoiskustannus riskin ja odotetun tuoton välillä, sillä yleisesti korkempien tuottojen saavuttaminen vaatii myös korkeamman riskin ottamista.

Riskienhallintaan on kaksi laajaa ja hyvin erilaista strategiaa. Toinen lähestymistapa on tunnistaa riskit yksi kerrallaan ja käsitellä ne yksilöinä. Kyseistä menetelmää kutsutaan useasti riskien dekomponoinniksi. Toinen lähestymistapa on vähentää riskiä hajauttamalla. Tätä menetelmää kutsutaan useasti riskien aggregoinniksi. Rahoitusinstituutiot käyttävät yleisesti kumpaakin menetelmää. Puolestaan matemaattisesta näkökulmasta riskienhallinta on prosessi, jossa tappiojakauma pyritään muotoilemaan halutunlaiseksi. (Sarykalin et al. 2008)

Rahoitusinstituutioille kuten pankeille ja vakuutusyhtiöille riskienhallintaan on myös syynä sääntely. Sääntelyä harjoittavat tahot ovat lähtökohtaisesti kiinnostuneita minimoimaan säänneltävän instituution epäonnistumisen. Toisin sanoen sääntelyn tarkoituksena on huolehtia, että rahoitusinstituutioiden käteisvarannot ovat riittävät suhteessa otettuun kokonaisriskiin. (Hull 2012, 19)

2.2 Riskimittarit

Markkinariski-mittarin tarkoituksena on mitata epävarmuutta portfolion tulevaisuuden arvon kehityksessä. Tarkoituksena on siis tarkastella mahdollisia poikkeamia tavoitellusta tai odotetusta portfolion arvosta. Ennen kuin moderni portfolioteoria ja keskiarvo-varianssi-menetelmä esiteltiin Harry Markowitzin (1952) toimesta oli sijoituspäätökset pitkälti sijoittajien omien uskomusten varassa. Teoreettisesti sijoittajan oli mahdollista laskea odotettu tuotto ja varianssin yhdelle rahoitusinstrumentille, mutta itse portfolion optimoiminen oli liki mahdotonta.

Modernin portfolioteorian myötä kävi ilmi, että portfolion hajauttaminen vähentää sen keskihajontaa eli riskisyyttä niin pitkään, kun korrelaatio rahoitusinstrumenttien välillä on alle 1. Optimoitaessa portfoliota sijoittajan oletetaan maksimoivansa omaa hyvinvointinsa suhteessa omaan valmiuteensa ottaa riskiä. Tällöin sijoittajan tulee valita korkean riskin ja korkean tuoton tai matalan riskin ja matalan tuoton väliltä. Vaikka volatilitteetti ja korrelaatio ovat yleisesti käytettyjä tunnuslukuja riskien arvioinnissa ovat ne portfolion riskisyyttä arvioitaessa ainoastaan päteviä silloin, kun rahoitusinstrumenttien tuotot ovat multinormaalijakautuneita tai multinormaali student-t-jakautuneita. Mikäli tuottojakauma on erilainen on volatilitteetin ja korrelaation käyttö epäsuosittavaa ja harhaanjohtavaa. (Alexander 2009a)

Modernien riskimittareiden juuret ovat lähtöisin keskiarvo-varianssi-mallista. Nykyisin riskimittarit kuitenkin keskittyvät enemmän tuottojakauman häntään ja ennen kaikkea sen tappiopuolelle riskejä arvioitaessa ja hallittaessa. VaR keskittyy tuottojakauman

vasemman puoleisen hännän yläosaan ja CVaR puolestaan VaR-tason ylittävään osaan hännästä. (Alexander 2009b) VaR- ja CVaR-mallit ovat keskiarvo-varianssiteoriaa soveltuvaisempia riskimittareiksi, sillä niitä on mahdollista hyödyntää useisiin erilaisiin tuottojakaumiin. Portfolioteorian ollessa soveltuvainen vain markkinariskin mittaamiseen, pystytään VaR- ja CVaR-mallia käyttämään esimerkiksi luotto- ja likviditeettiriskin mittaamiseen. (Dowd 2007, 11-12)

2.2.1 Value-at-Risk

VaR on tilastollinen riskimittari, jonka parhaana puolena voidaan pitää sen yksinkertaisuutta kertoa sijoituksen riskisyydestä yhdellä luvulla. Riskimittarin helposti ymmärrettävyys onkin yksi olennaisimmista syistä sen laajaan suosioon (Jorion 2007). VaR funktion muodostaa kaksi parametria, sijoituksen pitoaika ja luottamustaso. Esimerkiksi jos portfolion yhden päivän VaR on 10 miljoonaa euroa 95 %:n luottamustasolla, voidaan todeta, että 95 %:n varmuudella portfolion tappio ei tule olemaan yli 10 miljoonaa euroa seuraavan päivän aikana.

Luottamustason valinta on hyvin pitkälti riippuvainen mittarin käyttötarkoituksesta. Investointipankkien käyttämä luottamustaso on yleensä väliltä 95 %-99 %. Esimerkiksi JPMorgan käyttää 95 %:n luottamustasoa (JPMorgan&Chase 2019) ja Citibank 99 %:n luottamustasoa (Citibank 2019). Baselin komitea puolestaan neuvoo 99,9 %:n luottamustasoa käytettäväksi vakavaraisuussäätelyssä (Basel Committee on Banking Supervision 2005).

Toinen olennainen määriteltävä parametri luottamustason lisäksi on pitoajan kesto.² Pitoajalla on suuri vaikutus estimaattiin sillä yleisesti tuottojen volatiliteetin voidaan katsoa olevan suurempaa esimerkiksi kuukausitasolla, kuin päivätasolla. Pitoaika valitaan yleensä yhden päivän ja kuukauden väliltä riippuen portfolion rakenteesta. Edellä mainitut investointipankit käyttävät pääsääntöisesti yhden päivän pitoaikaa estimointiprosessissa.

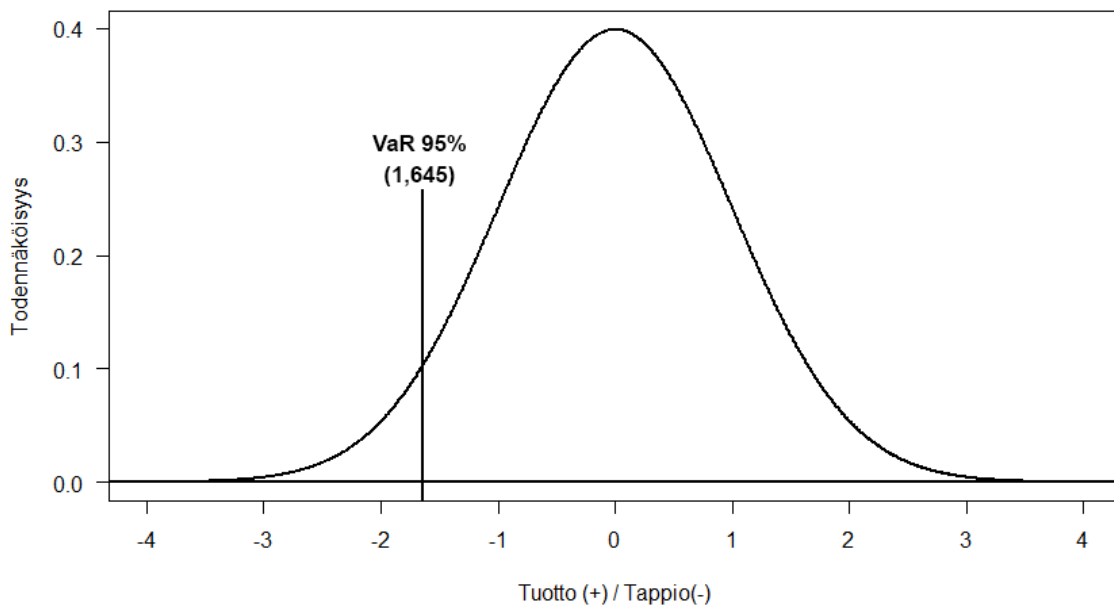
²Pitoaika nimitystä käytetään usein aikahorisontin sijasta, kun portfolion painojen ei oleteta muuttuvan käytettäessä VaR-mallia riskimittarina.

VaR voidaan matemaattisesti määritellä Alexanderin & Baptistan (2004) mukaan seuraavasti:

$$\int_{-\infty}^{\text{VaR}_\alpha} fX(x)dx = 1 - \alpha, \quad (1)$$

jossa $f(x)$ on portfolion tuottojen X tiheysfunktio annetulla pitoajalla ja luottamustasolla $\alpha \in [0, 1]$.

Kuvassa 1 on hahmoteltu VaR 95 %:n luottamustasolla. Kuvassa leikkauspiste erottaa tuottojakaumasta 5 %:n suuruisen hännän.



Kuva 1: VaR 95 %:n luottamustasolla (mukailtu Dowd 2007).

Hahmotellaan VaR-mallin laskentaprosessia kappaleen alussa mainittujen arvojen mukaisesti. Jorionin (2007) mukaan portfolion arvo annetun pitoajan lopussa on:

$$W = W_0(1 + R), \quad (2)$$

jossa W_0 on portfolion arvo ja R on portfolion tuottoaste.

$$1 - lt = \int_{-\infty}^{W_*} f(W)dw, \quad (3)$$

jossa lt on määritelty luottamustaso ja W_* on portfolion arvo pitoajan lopussa, kun portfolion huonoin mahdollinen tuottoaste on toteutunut annetulla luottamustasolla.

Olettaen, että rahoitusinstrumenttien tuotot ovat normaalijakautuneita voidaan VaR laskea rahamääräisesti seuraavalla tavalla:

$$VaR_{lt} = z_\alpha \cdot \sigma \cdot W_0, \quad (4)$$

jossa z_α on z-arvo luottamustasolla $(1 - lt)$, σ on portfolion volatilitiiteetti ja W_0 on portfolion arvo. Laskettaessa VaR-arvoa on tärkeää huomioida pitoaikojen yhdenmukaisuus. Jos portfolion arvo on 10M € ja tuottojen vuosivolatilitiiteetti on 10 % on tällöin yhden päivän VaR 95 %:n luottamustasolla:

$$VaR_{95\%} = 1,645 \cdot \sqrt{\frac{1}{250}} \cdot 10\% \approx 104000\text{€} \quad (5)$$

z_α arvo on luettavissa normaalijakauma taulukosta ja vuosivolatilitiiteetti on muutettavissa päivävolatilitiiteetiksi $\sigma_t = \sigma\sqrt{T}$, jossa T on pitoaika ilmaistuna vuosissa. Taulukosta 1 on nähtävissä useimmiten käytetyt luottamustasot ja niiden z-arvot.

Taulukko 1: Luottamustason vaikutus z-arvoon

Luottamustaso	95 %	97,5 %	99 %	99,9 %
Z-arvo	1,645	1,960	2,326	3,090

2.2.2 Value-at-Risk kritiikki

Siitä huolimatta, että VaR on hyvä mittari markkinariskin mittaamiseen ja seurantaan on malilla myös omat rajoitteensa. Malli ei aina tuota kaikkea mahdollisesti tarvitta-

vaa tietoa sen käyttäjälle. Lisäksi estimaatit saattavat olla harhaisia mikäli oletukset tuottojakaumasta eivät ole paikkaansapitviä. Kritiikkiä VaR-mallia kohtaan ovat aiheuttaneet sen epäonnistuminen tuottaa minkäänlaista tietoa tappioiden suuruudesta käytetyn VaR-tason ylittyessä. Toisin sanoen VaR-mallin avulla ei voida ennustaa riskisyyden suuruutta, kun realisoitunut riski on suurempi kuin oletettu. Artzner et al. (1999) määritteli minkälaisia vaatimuksia riskimittarille tulisi asettaa, jotta sen käyttäminen olisi hyväksyttyä. Mikäli riskimittari täyttää neljä määriteltyä aksioomaa voidaan sitä kutsua koherentiksi riskimittariksi. VaR ei noudata subadditiivisuuden aksioomaa mikäli tuottojakauma ei ole normaalijakautunut.

Riskimittarin voidaan katsoa olevan koherentti mikäli se noudattaa seuraavaa neljää aksioomaa:

$$\text{Monotoonisuus: } p(Y) \leq p(X), \text{ kun } X \leq Y \quad (6)$$

$$\text{Subadditiivisuus: } p(X_1 + X_2) \leq p(X_1) + p(X_2) \quad (7)$$

$$\text{Positiivinen homogeenisuus: } p(\lambda X) = \lambda p(X) \quad (8)$$

$$\text{Siirtoinvarianttius: } p(X + m) = p(X) - m \quad (9)$$

Monotoonisuus (6) Jos portfolioilla X on parempi tuottoaste kuin portfolioilla Y, tällöin portfolio Y:n riskisyys ei voi olla pienempi kuin portfolio X:n. Subadditiivisuus (7) Portfolion hajauttamisen tulisi vähentää riskiä, portfolion riskisyys tulisi olla pienempi kuin sen komponenttien summan riskisyys. Positiivinen homogeenisuus (7) tarkoittaa, että riski skaalautuu portfolion koon kanssa. Jos portfolion kokoa kasvatetaan n-kertaiseksi kasvaa myös riski n-kertaiseksi. Siirtoinvarianttius (9) tarkoittaa, että lisätty pääoma portfolioon pienentää sen riskiä samalla määrällä.

Siitä huolimatta, että VaR ei lähtökohtaisesti noudata subadditiivisuuden aksioomaa on se yleisesti hyväksytty ja käytetty riskimittari. Subadditiivisuuden laiminlyönti saat-

taa johtaa moniin ongelmallisiin tilanteisiin kuten hajauttamatta jättämiseen silloin, kun se olisi perusteltua. Puolestaan sääntelyn näkökulmasta se voi johtaa tilanteeseen, jossa käteisvarannot ovat haluttua tasoa pienemmät. (Danielsson et al. 2005)

VaR-mallin käyttäminen optimointitarkoituksessa on myös ongelmallista sillä funktio on epäkonvekksi. Malliin liittyvistä optimointiongelmistä keskustellaan laajasti Rockafellar & Uryasev (2000) artikkelissa. Subadditiivisuuden puute ja epäkonveksisuus johtavat yhdessä tilanteeseen, jossa sijoittaja ottaa huomattavasti suurempia ja hallitsemattomia riskejä, kun on odottanut. Tilanne korostuu erityisesti silloin, kun tuottojakauma on paksuhäntäinen. (Sarykalin et al. 2008). Vaikka VaR-mallilla on useita epäsuotuisia piirteitä on sille ehdotettu korvaaja CVaR jäänyt vielä mallin varjoon pankkitoiminnassa.

Havainnollistetaan subadditiivisuuden puutetta seuraavalla esimerkillä. Oletetaan, että on kaksi lyhyen position out-of-the-money binäärioptiota. Kummallakin optiolla on 4 %:n mahdollisuus -100€:n tappioon ja 96 %:n mahdollisuus nolla tuottoon. Tutkittaessa VaR-arvoa 95 %:n luottamustasolla on kummankin position VaR nolla. Kun positiot yhdistetään tippuu nollatuoton mahdollisuus alle 95 %:n, jolloin yhdistetyn portfolion VaR on silloin suurempi kuin yksittäisten positioden summa. Toisin sanoen VaR ei ole subadditiivinen, sillä hajauttamisen tulisi vähentää riskiä. ³

Taulukko 2: Subadditiivisuuden puute: Optioiden tarkastelu erikseen

OPTIO A		OPTIO B	
Tuotto	Todennäköisyys	Tuotto	Todennäköisyys
-100€	0,04	-100€	0,04
0€	0,96	0€	0,96
VaR 95 % = 0		VaR 95 % = 0	

³VaR kuitenkin on subadditiivinen tilanteissa, jossa tuottojakauma on normaalijakautunut.

Taulukko 3: Subadditiivisuuden puute: Optioiden tarkastelu yhdessä

YHDISTETTY	
Tuotto	Todennäköisyys
-200	0,0016
-100	0,0768
0	0,9216
VaR 95 % = 100	

Esimerkin myötä on nähtävissä, että subadditiivisuuden puute johtaa tilanteisiin, jossa hajauttamista voidaan ajatella haitallisena toimenpiteenä. Hajauttaminen yleisesti mielletään riskiä pienentäväksi tekijäksi, jonka vuoksi VaR-malliin kohdistunut kritiikki ei ole turhaa. Kuten Taleb (1997) ilmaisee: ”On pahempi luottaa väärään informaatioon kuin olla ilman informaatiota. Jos pilotille annetaan rikkinäinen korkeusmittari hän törmää lentokoneella. Jos hänelle ei anneta mitään katsoo hän itse ulos ikkunasta.”

2.2.3 Conditional Value-at-Risk

Kappaleessa 2.2.2 todettiin, että VaR-mallin informatiivisuuden puute ja matemaattiset rajoitteet ovat aiheuttaneet kritiikkiä. Tämän seurauksena mallin korvaajaksi on ehdotettu riskimittaria nimeltä Conditional Value-at-Risk (CVaR), joka mittaa odotettua tappiota käytetyn VaR-tason ylittyessä.⁴ CVaR-mallia voidaan pitää pessimistisempänä lähestymistapana, sillä sen estimaatti on aina suurempi tai yhtä suuri kuin VaR-estimaatti. Jatkuvien jakaumien tapauksissa (mikä on taustaoletuksena aiheen yksinkertaistamisen vuoksi), annetulla luottamustasolla α ja pitoajalla t on CVaR määritelty pahimpien mahdollisten tappioiden keskiarvoksi ehdolla, että tappiot ylittävät VaR-tason.

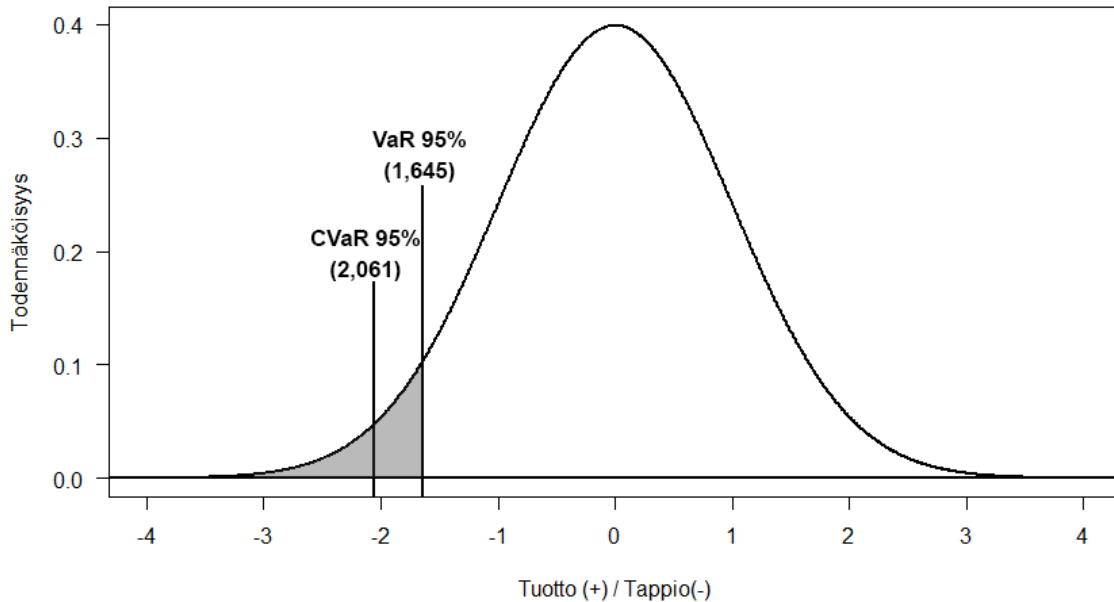
Matemaattisesti CVaR voidaan määritellä Acerbin & Taschen (2002) integraalikaavan mukaisesti:

⁴Mittari tunnetaan myös nimillä Expected Shortfall (ES) ja Expected Tail Loss (ETL).

$$CVaR_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \int_{-\infty}^{VaR_\alpha} fX(x)dx \quad (10)$$

jossa $f(x)$ on portfolion tuottojen X reunajakauma funktio annetulla pitoajalla ja luottamustasolla α .

Kuvassa 2 on hahmoteltu CVaR 95 %:n luottamustasolla. Leikkauspiste edustaa harmaalla värjätyn häntäosan keskiarvoa.



Kuva 2: CVaR 95 %:n luottamustasolla (mukailtu Dowd, 2007).

Acerbi & Tasche (2002) toteavat, että CVaR noudattaa kappaleessa 2.2.2 mainittuja neljää koherentin riskimittarin aksioomaa. Lisäksi CVaR on myös vahvasti konvekssi funktio, joka mahdollistaa sen käyttämisen portfolion optimointitarkoituksissa. Rockafellar & Uryasev (2000) mukaan käyttämällä lineaarista ja/tai epälineaarista optimointia on CVaR mahdollista minimoida tehokkaasti, joka on luonnollisesti haluttava ominaisuus riskimittarille.

2.3 VaR- ja CVaR-estimointimenetelmät

VaR- ja CVaR-mallien estimointiin on monia eri lähestymistapoja, mutta yleisesti ne voidaan jakaa parametrisiin ja ei-parametrisiin menetelmiin. Tiedettäessä tuottojakauma on VaR-estimaatin laskeminen yksinkertaista kummallakin menetelmällä ja tiedettäessä VaR-estimaatti on yksinkertaista laskea CVaR-estimaatti. Tuottojakauksen mallintaminen onkin yleisin haaste VaR ja CVaR estimointiprosessissa.

Parametrisia estimointimenetelmiä käytettäessä joudutaan tekemään oletuksia tuottojakaumasta. Yleisesti tuottojen oletetaan olevan normaalijakautuneita, joka helpottaa estimointimenetelmän käyttöä, mutta myös toisaalta rajoittaa sitä. Oletukset tuottojen jakaumasta aiheuttaa malliriskiä, jolla tarkoitetaan mahdollista eroavaisuutta oletetun ja empiirisen tuottojakauman välillä. Tässä tutkimuksessa käytetty parametrisinen menetelmä on varianssi-kovarianssi-menetelmä.

Ei-parametriset menetelmät puolestaan hyödyntävät suoraan empiiristä tuottojakautumaa, jonka seurauksena oletuksia tuottojen jakaumasta tai tuottojen välisestä korrelaatioista ei tarvitse tehdä. Toisin sanoen menetelmää voidaan siis käyttää ei-normaaleille tuottojakaumille ja menetelmässä ei esiinny malliriskiä. Estimointimenetelmän heikkoutena on tuloksien riippuvuus käytetystä datasta. Haluttua dataa ei ole aina saatavilla riittävän pitkältä aikajaksolta, jotta estimointitulokset olisivat luotettavia. Tässä tutkimuksessa käytetty parametrisinen menetelmä on historiallinen simulaatio.

2.3.1 Varianssi-kovarianssi-menetelmä

Yksinkertaisin parametrisen estimointimenetelmä on varianssi-kovarianssi-menetelmä, joka tunnetaan myös useilla muilla nimillä, joista yleisimmät ovat delta-normaali-menetelmä ja parametrisen VaR. Varianssi-kovarianssi-menetelmä on lähestymistapana intuitiivinen ja sen etuna voidaan pitää laskentaprosessin yksinkertaisuutta. Toisaalta oletukset tuottojakauman muodosta rajoittavat estimointimenetelmän käyttöä, joka tekee sen käyttämisestä käytännössä vähemmän houkuttelevaa.

Oletus tuottojen normaalijakautuneisuudesta ei ole aina soveltuva estimointimenetelmälle, sillä empiiriset tuottojakaumat yleensä poikkeavat oletuksesta. Havainnoissa usein esiintyy enemmän ääriarvoja varsinkin tappiopuolella, jonka seurauksena jakauman hännät ovat paksumpia ja itse jakauma vasemmalle vinoutuneempi kuin teoreettinen normaalijakauma. (Wong & Vlaar 2003). Rahoitusmarkkinoilla tuotot ja tappiot pääsääntöisesti liikkuvat hyvin lähellä nollaa, jonka seurauksena jakauma on myös normaalia huipukkaampi.⁵ (Simons 1996). Käytettyjen indeksien tuottojakaumat ovat huipukkaampia ja paksuhäntäisempiä kuin normaalijakaumassa, joka on nähtävissä liitteestä A. Oletukset tuottojakaumasta voivat johtaa tilanteeseen, jossa estimaatit ovat harhaisia.

Dowdin (2003) mukaan parametrinen VaR ja CVaR voidaan yhdelle rahoitusinstrumentille matemaattisesti määritellä seuraavasti:

$$VaR_\alpha = z_\alpha \sigma_{P/L} - \mu_{P/L}, \quad (11)$$

$$CVaR_\alpha = \sigma_{P/L} \Phi(-\alpha) F(\alpha) - \mu_{P/L}, \quad (12)$$

jossa $\mu_{P/L}$ on tuottojen keskiarvo ja $\sigma_{P/L}$ on tuottojen keskihajonta. z_α on kertymäfunktion arvo tietyllä luottamustasolla α . Luottamustasolla 95 % $z_{95\%} = 1,645$ ja luottamustasolla 99 % $z_{99\%} = 2,33$. $\Phi(\cdot)$ ja $F(\cdot)$ ovat tiheysfunktion ja kertymäfunktion arvoja.

Mallit ovat myös laajennettavissa useammalle rahoitusinstrumentille seuraavasti:

Portfolio, joka koostuu n määrästä erilaisia rahoitusinstrumentteja ja joiden tuotot ovat multinormaalijakautuneita keskiarvolla $\boldsymbol{\mu}$ ja varianssi-kovarianssi matriisilla $\boldsymbol{\Sigma}$, jossa $\boldsymbol{\mu}$ on $n \times 1$ vektori ja $\boldsymbol{\Sigma}$ on $n \times n$ matriisi. Varianssitermit ovat matriisissa diagonaalisesti ja kovarianssit muualla. $n \times 1$ vektori \mathbf{w} antaa portfolioon investoitujen rahoitusinstrumenttejen painoarvon. Portfolion tuottojen odotusarvo on $\mathbf{w}\boldsymbol{\mu}$, varianssi $\mathbf{w}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}^T$, jossa \mathbf{w}^T on \mathbf{w} :n $n \times 1$ transpoosi vektori ja $\sqrt{\mathbf{w}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}^T}$ keskihajonta. Jos

⁵Normaalijakaumaa huipukkaampaa jakaumaa kutsutaan leptokurtiseksi.

portfolion nykyinen arvo on P , silloin VaR huomioiden pitoaika t ja luottamustaso α on:

$$VaR(t, \alpha) = - \left[\alpha \sqrt{t \sqrt{\mathbf{w} \Sigma \mathbf{w}^T}} + t \mathbf{w} \boldsymbol{\mu} \right] P \quad (13)$$

$$CVaR(t, \alpha) = - \left[\sqrt{t \sqrt{\mathbf{w} \Sigma \mathbf{w}^T}} \Phi(-\alpha) / F(\alpha) - t \mathbf{w} \boldsymbol{\mu} \right] P \quad (14)$$

2.3.2 Historiallinen simulaatio

Historiallinen simulaatio on ei-parametrinen estimointimenetelmä ja laajasti käytetty sen helppokäyttöisyyden vuoksi. Laskettaessa VaR- tai CVaR-estimaattia historiallisella simulaatiolla tehdään vahva oletus, että menneisyys olisi hyvä indikaattori tulevista tuotoista ja tappioista. Menetelmän käyttäminen on yksinkertaista sillä siihen tarvitaan vain tieto käytettävän rahoitusinstrumentin tuotoista tai niiden muutoksista. Laskentaprosessi tapahtuu ottamalla prosenttipiste tuottojakauman kohdasta, joka vastaa valittua luottamustasoa. Estimointimenetelmää on mahdollista käyttää paksumäntäisille tuottojakaumille, jota usein esiintyy rahoitusmarkkinoilla.

Hahmotellaan historiallista simulaatiota seuraavan Dowdin (2003, 36-37) esimerkin mukaisesti. Kuvitellaan, että meillä on tuottoaikasarja r , joka on alkanut päivänä r_n ja jatkuu eiliseen päivään r_{t-1} . Laskeaksemme VaR-luvun tälle päivälle t tarvitsee meidän ottaa prosenttipiste tuottoje kohdasta $p_{1-\alpha}$ ($1-\alpha$) r :

$$VaR = p_{1-\alpha}(r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_n). \quad (15)$$

Toisin sanoen, jos tuottoaikasarja koostuu sadasta päivähavainnoista on yhden päivän VaR 95 %:n luottamustasolla kuudenneksi suurin tappio.

Malli on laajennettavissa portfoliolle, joka koostuu N määrästä rahoitusinstrumentteja ja jokaiselle instrumentille i on laskettu tuotto omalle aikajaksolle n . Jos $R_{i,t}$ on tuotto instrumentille i omalla aikajaksolla t ja w_i on tällä hetkellä investoitu määrä rahoitusinstrumenttiin i on historiallisen simulaatio portfoliolle huomioiden aikajakso t :

$$P/L_t = \sum_{i=1}^N w_i R_{i,t}, \quad (16)$$

Empiiristen havaintojen määrästä käytetään usein nimitystä aikaikkuna. Aikaikkunan pituuden valinnalla on huomattava merkitys VaR-estimointituloksiin. Historiallinen simulaatio antaa saman painoarvon kaikille havainoille käytetyssä aikaikkunassa, joka ei välttämättä ole haluttu ominaisuus. Aikaikkunan pituudelle n ei ole olemassa varsinaista viitearvoa, mutta lyhyt aikaikkuna tekee estimointituloksista herkkiä, sillä pieni otoskoko saattaa sisältää raja-arvoja, jotka vaikuttavat tulokseen merkittävästi. Puolestaan pitkässä aikaikkunassa saatetaan huomioida tapauksia, jotka eivät ole olennaisia estimoitaessa nykyistä riskisyyttä. (Goorbergh & Vlaar 1999)

2.4 Jälkitestausmenetelmät

Rahoitusmarkkinoilla työskentelevien ammattilaisten kuten rahastonhoitajien toimikuvaan kuuluu laajasti riskienhallinta, jonka vuoksi on tärkeää testata toteutettava sijoitusstrategia. Jälkitestaamisen on tärkeä työkalu arvioitaessa VaR- ja CVaR-mallin suorituskykyä ja hyvyttä. Kumpaakin riskimittaria voidaan pitää intuitiivisena, jonka takia itse estimaattien hyvydestä ei voida sanoa mitään ilman jälkitestaamisprosessia. VaR-mallia voidaan pitää tarkkana jos VaR-mallin ulkopuolelle jäävien havaintojen suhde on sama tai lähellä luottamustasoa $p = (1 - \alpha)$. Mikäli poikkeamien määrä on pienempi kuin odotettu tällöin malli liioittelee riskisyyttä ja on epätehokas ja puolestaan mikäli poikkeamien määrä on suurempi kuin odotettu malli aliarvioi riskisyyttä.

Jälkitestaamisprosessin ideana on verrata VaR-estimaatin tuloksia empiiriseen tuottojakaumaan ja etsiä poikkeamia VaR-estimaatista. Kun tuottojakauman tappio on suurempi kuin VaR-estimaatti, voidaan tällaista havaintoa jälkitestaamisprosessissa kutsua poikkeamaksi tai epäonnistumiseksi. CVaR mallin jälkitestaamisprosessi ei ole yhtä yksinkertainen sillä VaR-tason ylittyessä tappion suuruus voi olla mikä tahansa. Jälkitestaamiseen on erityisesti VaR-mallille useita erilaisia menetelmiä. Tässä tutkimuksessa VaR-mallin jälkitestaamisessa on käytetty kahta yleisintä menetelmää eli binomitestiä ja Kupiecien testiä. CVaR-malli puolestaan on jälkitestattu Acerbin ja Szekelynin suosittelemalla tavalla.

2.4.1 Binomitesti

Binomitesti on yksi yksinkertaisimmista tavoista jälkitestata VaR-mallin tarkkuus. Testin ideana on laskea VaR-mallin poikkeavuus tai epäonnistumissuhde (x/n) , jossa (x) on poikkeamien määrä otoskoolle (n) määritellyllä peittotodennäköisyydellä (p) . Ideallisesti epäonnistumissuhde on p :n harhaton mittari. Testissä lasketaan vain poikkeamien määrä, jonka seurauksena se on täysin ei-parametrinen. Toisin sanoen testi ei ota kantaa ollenkaan tuottojakaumaan. Testi enemmänkin mukailee tilastotieteessä käytettyä *Bernoulli trials* viitekehystä, joka mittaa onnistumisien ja epäonnistumisen sarjaa. Nollahypoteesina testissä on, että malli on oikein kalibroitu ja poikkeamien määrä x seuraa binomijakaumaa (Jorion 2007, 143):

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad (17)$$

Odotettujen poikkeamien määrä $E(x)$ tulisi olla sama kuin $p \cdot n$ ja varianssin $E(x)$ sama kuin $p \cdot (1-p)n$

$$z = \frac{x - n \cdot p}{\sqrt{p(1-p)n}} \quad (18)$$

2.4.2 Kupiec'n testi

Vuonna 1995 Kupiec esitteli artikkelissaan kaksi erilaista testiä VaR-mallien jälkitekstaamis prosessiin. Tässä kappaleessa keskitytään menetelmistään toiseen, joka tunnetaan nimellä Proportion of Failures.⁶ Testi tutkii onko havaittujen poikkeamien määrä tilastollisesti saman suuruinen kuin odotettu. Testi noudattaa seuraavia hypoteeseja:

$$H_0 : p = \tilde{p} \quad (19)$$

$$H_1 : p \neq \tilde{p} \quad (20)$$

Uskottavuusosamäärä on laskettavissa seuraavasti:

$$UO_{POF} = -2\text{Log}[(1 - p^*)^{N-X}(p^*)^X] + 2\text{Log}[(1 - [X/N]^{N-X}(X/N^X)], \quad (21)$$

jossa p^* on mallin epäonnistumisen todennäköisyys N on otoksen koko ja X on poikkeamien määrä otoksessa. Testi noudattaa chi-square (χ^2) jakaumaa yhdellä vapausasteella. Testin tulokset ovat verrattavissa kriittiseen arvoon χ^2 jakaumasta. Nollahypoteesi hylätään jos $LR_{POF} \geq F_{\chi_1^2}^{-1}(1 - \alpha)$ jossa $F_{\chi_1^2}^{-1}(P)$ on käänteinen χ^2 kertymäfunktio yhdellä vapausasteella, todennäköisyydellä P ja α on testin merkitsevyytaso.

2.4.3 Acerbin ja Szekelyn ehdoton testi

CVaR-mallin jälkitekstaamisprosessi on huomattavasti monimutkaisempaa kuin VaR-mallin. Tästä osakseen kertoo Baselin komitean vuonna 2013 tekemä päätös korvata VaR-malli CVaR-mallilla, joka aiheutti huomattavan määrän kritiikkiä. Monen alalla työskentelevän mielestä CVaR-mallia ei ollut mahdollista jälkitekstata tai se oli huomattavan vaikeaa ennen kuin Acerbi & Szekely (2014) todistivat artikkelissaan, että mallin jälkitekstaaminen on mahdollista muutamalla erilaisella tavalla.

Tässä tutkimuksessa hyödynnetään ehdotonta testiä eli CVaR-malli testataan erillään VaR-mallista. Ero ehdottoman ja ehdollisen testin välillä on se, että ehdollisessa tes-

⁶Toinen testeistä tunnetaan nimellä Time until First Failure (TUFF), joka mittaa mallin ensimmäisen epäonnistumisen hetkeä.

tissä VaR-mallin jälkitestaus tulee olla hyväksytty, että CVaR-mallin jälkitestaus voidaan mahdollisesti hyväksyä. Ehdottomassa testissä puolestaan CVaR-malli testataan suoraan, jonka takia se on ennustuskyvyltään ehdollista testiä tehokkaampi.

Testi noudattaa ehdotonta odotusarvoa:

$$CVAR_{\alpha,t} = -\mathbf{E} \left[\frac{X_t I_t}{\alpha} \right], \quad (22)$$

joka pyrkii määrittämään

$$Z_2(\vec{X}) = \sum_{t=1}^T \frac{X_t I_t}{T \alpha CVaR_{\alpha,t}} + 1, \quad (23)$$

jossa X_t on portfolion tulos ajanjaksolla t , α on VaR-mallin epäonnistuisen todennäköisyys. $CVaR_{\alpha,t}$ on estimoitu CVaR luottamustasolla $(1-\alpha)$ ja ajanjaksolla t ja I_t on idikaattori VaR-mallin epäonnistumiselle ajanjaksolla t . Negatiiviset arvot testissä viittaavat mallin pyrkimykseen aliarvioida riskiä.

Mikäli tuottojakauma on ennustettu oikein on testin odotettu arvo 0. Negatiiviset arvot indikoivat mallin pyrkimyksestä aliarvioida riskiä. Testi hylkää mallin mikäli se aliarvioi riskiä tilastollisesti merkitsevästi ($p < 1 - \alpha$).

3 Kirjallisuuskatsaus

Tässä osiossa esitellään tärkeimpiä löydöksiä tämän tutkimuksen kannalta. Aiempien tutkimusten pohjalta saadaan tämän tutkimuksen empiiriselle osiolle vertailukohta.

Hendricks (1996) tutki laajasti VaR-mallien suoriutumiskykyä. Tutkimuksessa käytettiin satunnaisesti muodostettuja portfolioita aikaväliltä 1978-1995, joita oli yhteensä 1000 kappaletta. Estimointimenetelminä käytettiin kahta parametrista menetelmää ja yhtä ei-parametrista menetelmää sekä 12:sta eri mittaista pitoaikaa. Aineiston oletettiin olevan normaalijakautunutta ja havaintojen riippumattomia toisista, ehtona oli myös, että portfoliot eivät saa sisältää epälineaarisia rahoitusinstrumentteja.⁷

Tutkimuksessa käytettiin 95 %:n ja 99 %:n luottamustasoja, jotka ovat useimmiten käytettyjä. Parametrinen ja ei-parametrinen estimointien tulokset eivät eronneet toisistaan merkitsevästi 95 %:n luottamustasolla. Puolestaan kävi ilmi, että oletus tuottojen normaalijakaumasta on huomattavasti kohtuullisempi 95 %:n luottamustasolla kuin 99 %:n luottamustasolla. Ei-parametrisella menetelmällä eli historiallisella simulaatiolla oli taipumus yliarvioida todellista riskiä 99 % luottamustasolla. Havainnot, jota mallit eivät kattaneet olivat keskimäärin noin 30-40 % suurempia kuin riskimittareiden estimoidut tulokset.

Artzner et al. (1999) määritteli tutkimuksessaan neljä aksioomaa, joita riskimittarin tulisi noudattaa ollakseen koherentti. VaR-mallin todettiin laiminlyövän subadditiivisuuden aksioomaa aineiston ollessa ei-normaalijakautunutta. Tutkimuksen mukaan CVaR-malli noudattaa kyseistä aksioomaa, jonka seurauksena se on riskimittarina parempi kuin VaR-malli. Hendricks (1996) tutkimus keskittyi pelkästään VaR-mallien tutkimiseen, jonka seurauksena Yamai & Yoshihara (2005) vertailivat tutkimuksessaan VaR-mallia Artzner et al. (1999) ehdottamaan CVaR-malliin. Tutkimuksessa todettiin, että VaR-mallin käyttäminen riskimittarina voi olla harhaanjohtavaa, sillä sijoittavat voivat tehdä sijoituksia, joiden riskisyyttä VaR-malli ei onnistu arvioimaan harhatto-

⁷Epälineaarisia rahoitusinstrumentteja ovat mm. optiot ja korot.

masti. Lisäksi VaR-mallin todettiin aliarvioivan riskiä markkinastressi olosuhteissa.

CVaR-malli puolestaan on kykeneväisempi tuottamaan tietoa edellämainituissa tilanteissa. Puolestaan CVaR-mallin tehokkuus on korkeasti riippuvainen estimointimenetelmien tarkkuudesta. Tutkimuksessa todettiin, että tuottojakauman ollessa paksuhäntäinen tuottaa VaR-malli aliarvon todellisesta riskistä, sillä se huomioi vain tietyn kvantiilin tuottojakaumasta. Tämä johtaa puolestaan tilanteeseen jossa sijoittaja voi käyttää rahoitusinstrumentteja, jossa on suurempi mahdollisuus suureen tappioon aiemmin kuin rahoitusinstrumentteja, jossa on pieni mahdollisuus suureen tappioon. Tätä skenaariota kutsutaan häntäriskiksi.

CVaR puolestaan huomioi häntäriskin, sillä se mittaa tappioita valitun VaR-tason ylityessä. Mallin hyvät puolet eivät kuitenkaan tule ilman huonoja puolia sillä se on huomattavasti herkempi estimointivirheille kuin VaR-mallit. Tutkimuksessa todettiin, että riskienhallinnassa ei tulisi käyttää vain yhtä tiettyä riskimittaria. Riskimittareilla on yleensä sekä hyvät, että huonot puolet, jonka seurauksena ei tulisi käyttää ainoastaan yhtä riskimittaria arvioitaessa markkinariskiä.

Olson & Wu (2013) tutkivat artikkelissaan tuottojakauman sovittamisen vaikutusta VaR- ja CVaR-mallien estimointituloksiin. Tutkimuksessa vertailtiin normaalijakauman, student-t-jakauman, log-normaalijakauman ja logistisen jakauman soveltuvuutta neljälletoista erilaiselle empiiriselle tuottojakaumalle. Logistinen tuottojakauma mukaili yleisesti parhaiten empiiristä tuottojakaumaa ja puolestaan student-t-jakauma oli yksittäisissä tapauksissa soveltuvaisempi käytettyihin tuottojakaumiin. Normaali- ja log-normaalijakaumat mukailivat tuottojakaumaa hyvin samankaltaisesti, jonka seurauksena kumpaakin jakaumaa käytettäessä estimointitulokset aliarvioivat todellista riskisyyttä. Hendricks (1996) tutkimuksessa puolestaan ei todettu normaalijakautuneisuus oletuksen johtavan riskien aliarvioimiseen. Olson & Wu (2013) tutkimus kuitenkin vahvistaa rahoitusinstrumenttien tuottojakaumien olevan pääsääntöisesti paksuhäntäisiä, minkä myötä logistinen- ja student-t-jakauma ovat riskimittareille soveltuvaisempia.

4 Data

Tutkimuksessa käytetty aineisto on hankittu Datastream ohjelmasta. Data koostuu viiden eri maan päivittäisestä hintaindeksi datasta, joka on aikaväliltä 1.1.2009-31.12.2019. Tutkimukseen valitut indeksit ovat valittu erilaisilta markkina-alueilta, jolloin VaR-mallien sekä estimointimenetelmien luotettavuutta pystytään arvioimaan laajemmin.

Estimoinneissa käytetyt indeksit ovat paikallisen valuutan mukaisia, jotta pitkien aikasarjojen käyttö olisi mahdollista. Tämä ei kuitenkaan vaikuta itse tutkimukseen sillä keskitymme VaR ja CVaR -estimointituloksiin emmekä itse indekseihin. Indeksien rahamääräisten riskien vertailu on luonnollisesti myös mahdollista niin paikallisen valuutan mukaisena ja yhteisvaluuttana. Tämä menetelmä on esitelty kappaleessa 2.2.1.

Tutkimuksessa päivätuotot ovat laskettu seuraavasti:

$$r_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}, \quad (24)$$

jossa r_t on päivätuotto, P_t on sulkuhinta päivänä t ja P_{t-1} on sulkuhinta päivänä $t-1$.

Aineiston normaalijakautuneisuutta on tutkittu vinouden ja huipukkuuden avulla, joiden matemaattiset määritelmät ovat:

Vinous:

$$Vinous(X) = \mathbf{E} \left(\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^3 \right) \quad (25)$$

Huipukkuus:

$$Huipukkuus(X) = \mathbf{E} \left(\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^4 \right) \quad (26)$$

Vinous kuvaa kuinka symmetrisesti arvot jakautuvat keskiarvon ympärille. Kun vinous saa negatiivisen arvon nojautuu jakauma vasemmalle, positiivisella arvolla puolestaan

oikealle. Arvolla 0 jakauma on täydellisesti symmetrinen. Huipukkuus kuvaa miten nopeasti tiheysfunktio lähtestyy arvoa 3. Kun huipukkuus on alle 3 tarkoittaa se, että varianssi muodostuu monesta havainnosta, jotka ovat melko lähellä keskiarvoa. Kun arvo on yli 3 muodostuu varianssi muutamasta suuresta poikkeamasta keskiarvosta. (Kaltenbach 2011, 22-23)

Taulukko 4: Indeksien tunnusluvut

Indeksi	N	Keskiarvo	Keskihajonta	Huipukkuus	Vinous
MSCI Japani	2870	0,00023	0,01229	5,31293	-0,38238
MSCI UK	2870	0,00017	0,00975	3,05752	-0,17890
MSCI Venäjä	2870	0,00042	0,01510	6,38836	-0,29367
MSCI Brasilia	2870	0,00032	0,01372	2,70402	-0,06166
MSCI Ukraina	2870	-0,00017	0,01865	12,39291	-0,38238

Taulukosta 4 on havaittavissa, että indeksien huipukkuus ja vinous ei ole normaalijakautuneelle aineistolle määritellyllä tasolla. Empiirisen aineiston korkeampi huipukkuus ja puolestaan pienempi vinous verrattuna teoreettiseen normaalijakaumaan on hyvin yleinen esiintymä rahoitusmarkkinoilla. Pelkkiä tunnuslukuja tulkittaessa voidaan Brasilian ja Iso-Britannian tuottojakaumia pitää lähimpänä teoreettista normaalijakaumaa.

Indeksien normaalijakautuneisuutta on tutkittu vinouden ja huipukkuuden lisäksi Jarque-Bera testillä, jonka matemaattinen määritelmä on:

$$JB = \frac{n}{6} \left(V^2 + \frac{H - 3^2}{4} \right), \quad (27)$$

jossa n on havaintojen lukumäärä, V otoksen vinous ja H otoksen huipukkuus. Testi noudattaa Chi-Squaren jakaumaa vapausasteella 2. H_0 Aineisto on normaalijakautunut. H_0 hylätään luottamustasolla α jos $JB \geq \chi^2_{-\alpha_2}$

Taulukko 5: Jarque-Bera-testin tulokset

Indeksi	Jarque-Bera
MSCI Japani	3175,5
MSCI UK	1049,8
MSCI Venäjä	4577,10
MSCI Brasilia	818,73
MSCI Ukraina	17205,01

Taulukosta 5 on nähtävissä, että Jarque-Bera testin nollahypoteesi hylätään selvästi. Myös aineistojen histogrammien perusteella voidaan sanoa, että aineisto ei ole normaalijakautunutta (katso Liite A). Testien perusteella voidaankin todeta, että oletus tuottojen normaalijakautuneisuudesta ei ole tässä tutkimuksessa relevantti. Tämän seurauksena voidaan olettaa, että varianssi-kovarianssi-menetelmän tulokset saattavat olla harhaisia ja erota historiallisen simulaation tuloksista.

5 Tulokset

Tässä osiossa esitellään VaR- ja CVaR-estimointien sekä jälkitestaamisprosessin tulokset. Lisäksi keskustellaan estimointimenetelmien soveltuvuudesta markkinariskin mittaamiseen.

5.1 VaR-estimointi

Taulukosta 6 on nähtävissä VaR-mallin estimointitulokset. Otsikko ”N” tarkoittaa havaintojen lukumäärää, ”VKV” varianssi-kovarianssi-menetelmän estimointituloksia ja otsikko ”HS” historiallisen simulaation estimointituloksia. Taulukossa on esitetty estimoinnit 95 %:n ja 99 %:n luottamustasoilla.

Taulukko 6: VaR-estimointien tulokset

Indeksi	VKV 95 %	HS 95 %	VKV 99 %	HS 99 %
MSCI Japani	2,00 %	1,94 %	2,84 %	3,40 %
MSCI UK	1,59 %	1,57 %	2,25 %	2,80 %
MSCI Venäjä	2,44 %	2,16 %	3,47 %	4,28 %
MSCI Brasilia	2,22 %	2,21 %	3,16 %	3,49 %
MSCI Ukraina	3,08 %	2,75 %	4,36 %	5,35 %

Tarkasteltaessa estimointituloksia 95 %:n luottamustasolla tuottaa varianssi-kovarianssi-menetelmä korkeamman ennusteen riskisyydestä verrattuna historialliseen simulaatioon. Iso-Britannian ja Brasilian tulokset ovat kummallakin estimointimenetelmällä hyvin samankaltaiset, joka on mitä todennäköisemmin johtuvainen siitä, että kyseessä olevien maiden indeksien empiiriset tuottojakaumat ovat lähimpänä normaalijakaumaa. Japanin, Venäjän ja Ukrainan empiiriset tuottojakaumat eivät ole yhtä huipukkaita 95 %:n luottamustason leikkauskohdassa kuin teoreettinen normaalijakauma, jonka seurauksena estimaatit ovat yliarvioita todellisesta riskistä.

Puolestaan 99 %:n luottamustasolla tuottaa historiallinen simulaatio korkeamman ennusteen riskisyydestä verrattuna varianssi-kovarianssi-menetelmään, joka puolestaan mitä todennäköisemmin liittyy estimointimenetelmän soveltavuuteen huomioida erilaisia tuottojakaumia paremmin verrattuna varianssi-kovarianssi-menetelmään. Kuten kappaleessa 2.3.1 aiemmin todettiin tuottojakauman ollessa paksuhäntäisempi kuin teoreettinen normaalijakauma tuottaa varianssi-kovarianssi-menetelmä aliarvion todellisesta riskistä.

5.2 CVaR-estimointi

Taulokosta 7 on nähtävissä CVaR-mallin estimointitulokset. Otsikko ”N” tarkoittaa havaintojen lukumäärää, ”VKV” varianssi-kovarianssi-menetelmän estimointituloksia ja otsikko ”HS” historiallisen simulaatin estimointituloksia. Taulukossa on esitetty estimoinnit 95 %:n ja 99 %:n luottamustasoilla.

Taulukko 7: CVaR-estimointien tulokset

Indeksi	VKV 95 %	HS 95 %	VKV 99 %	HS 99 %
MSCI Japani	2,56 %	2,95 %	3,30 %	4,77 %
MSCI UK	2,03 %	2,36 %	2,62 %	3,49 %
MSCI Venäjä	3,16 %	3,59 %	4,07 %	6,31 %
MSCI Brasilia	2,86 %	3,08 %	3,69 %	4,58 %
MSCI Ukraina	3,83 %	4,40 %	4,95 %	7,52 %

Tutkittaessa CVaR-estimointituloksia 95 %:n luottamustasolla on huomattavissa, että varianssi-kovarianssi-menetelmä tuotti matalamman ennusteen riskisyydestä verrattuna historialliseen simulaatiin. Tulokset ovat siis täysin päin vastaisia verrattuna aiempiin VaR-estimointituloksiin. Puolestaan 99 %:n luottamustasolla ovat historiallisen simulaation estimointitulokset niin VaR- kuin CVaR-mallilla korkeammat kuin varianssi-kovarianssi-menetelmällä.

5.3 Jälkitestausprosessi

Tässä osiossa esitellään jälkitestaamisprosessin tulokset historialliselle simulaatiolle ja varianssi-kovarianssi-menetelmälle. VaR-mallin jälkitestaamisessa on käytetty Kupiecien testiä sekä binomitestiä. CVaR puolestaan on jälkitestattu Acerbin ja Szekelyn ehdottomalla testillä.

5.3.1 Binomitesti

Binomitesti tutkii VaR-mallien poikkeamien yleisyyttä. Odotettujen poikkeamien määrä 2870:lle havainnolle 95 % luottamustasolla on $(2870 \cdot 0,05) = 143,5$ ja 99 % luottamustasolla $(2870 \cdot 0,01) = 28,7$. Analyysin selkeyttämisen vuoksi olkoon odotettujen poikkeamien määrä 95 % luottamustasolla 144 ja 99 % luottamustasolla 29. Binomitestin tulokset ovat nähtävistä taulukosta 8 ja 9, jossa otsikko "N" tarkoittaa havaintojen lukumäärää, "HS" historiallisen simulaation poikkeamien määrää, "VKV" varianssi-kovarianssi-menetelmän poikkeamien määrää ja "ZArvoBin" viittaa binomitestin z-arvoon. Lihavoidut arvot tarkoittavat, että estimointimenetelmä joudutaan hylkäämään.

Taulukko 8: Binomitestin tulokset (VaR 95 %)

Indeksi	N	Luottamustaso 95 %			
		HS	ZArvoBin	VKV	ZArvoBin
MSCI Japani	2870	142	-0,12847	132	-0,98494
MSCI UK	2870	143	-0,04282	139	-0,38541
MSCI Venäjä	2870	143	-0,04282	115	2,44094
MSCI Brasilia	2870	144	0,04282	142	-0,12847
MSCI Ukraina	2870	144	0,04282	118	-2,18399

Taulukosta 8 tärkeimpänä on vertailla HS ja VKV arvoja. Tummennetut arvot viittaavat VaR-mallin hylkäämiseen ja normaalit arvot puolestaan mallin hyväksymiseen.

Taulukosta on nähtävissä, että binomitesti hyväksyy kaikki historiallisen simulaation estimoinnit 95 % luottamustasolla. Puolestaan varianssi-kovarianssi-menetelmän estimoinneista tulee hyväksytyksi kaksi. Taulukosta 4 on havaittavissa, että kyseessä olevilla mailla tuottojakauman muoto muistuttaa eniten normaalijakaumaa, jonka seurauksena varsinainen estimointi varianssi-kovarianssi-menetelmällä on onnistunut menestyksekkäämmin kuin muille maille.

Taulukko 9: Binomitestin tulokset (VaR 99 %)

Indeksi	N	Luottamustaso 99 %			
		HS	ZArvoBin	VKV	ZArvoBin
MSCI Japani	2870	28	0,13132	57	5,30918
MSCI UK	2870	28	0,13132	72	8,12324
MSCI Venäjä	2870	28	0,13132	52	4,37116
MSCI Brasilia	2870	29	0,05628	44	2,87033
MSCI Ukraina	2870	29	0,05628	47	3,43314

Tutkittaessa taulukon 9 arvoja on nähtävissä, että binomitestin tulokset ovat hyvin poikkeavia toisistaan. 99 % luottamustasolla mikään varianssi-kovarianssi estimoinneista ei läpäise testiä. Puolestaan historiallinen simulaatio läpäisee kaikki. 95 % luottamustasolla varianssi-kovarianssi-menetelmä tuotti yliarvion todellisesta riskistä, mutta puolestaan 99 % luottamustasolla menetelmä tuotti aliarvion riskistä. Jälkitestaamisprosessi vahvistaa oletuksen siitä, että tuottojakauma on leptokurtinen, eli häntätappioihin sisältyy useampia havaintoja, mitä teoreettinen normaalijakauma pystyy mallintamaan. Ääriarvot saattavat esiintyä vasta 99 %:n luottamustason jälkeen. Kaiken kaikkiaan historiallinen simulaatio suoriutui binomitestin mukaan kummallakin luottamustasolla estimoinneissa paremmin.

Selkeyttääkseni lukijan ymmärrystä kuinka z-arvo on laskettu hahmotellaan laskentaprosessia seuraavan esimerkin mukaisesti. Indeksi = MSCI UK, VaR-malli = historiallinen simulaatio, luottamustaso 95 %. Poikkeamien määrä (x) on 143, havaintojen

määrä (n) on 2870. 95 %:n luottamustasolla. Z-arvo on laskettavissa käyttämällä yllä olevia arvoja kaavaan x:

$$z = \frac{143 - 0,05 \cdot 2870}{\sqrt{0,05 \cdot (1 - 0,05) \cdot 2870}} = 0,13132 \quad (28)$$

5.3.2 Kupiecin testi

Taulukosta 10 on luettavissa Proportion on Failure (POF) testin arvot. Estimointimenetelmää ei hylätä 95 % luottamustasolla, jos $UO_{POF} \leq 3,84$ ja 99 % luottamustasolla jos $UO_{POF} \leq 6,63$. Lihavoidut arvot tarkoittavat, että estimointimenetelmä joudutaan hylkäämään.

Taulukko 10: Proportion of Failure (POF) testin tulokset

Indeksi	N	Luottamustaso 95 %		Luottamustaso 99 %	
		HS	VKV	HS	VKV
MSCI Japani	2870	0,01656	0,99570	0,01739	21,90439
MSCI UK	2870	0,00184	0,15004	0,01739	46,50998
MSCI Venäjä	2870	0,00184	6,37421	0,01739	15,40364
MSCI Brasilia	2870	0,00183	0,01656	0,00316	7,08428
MSCI Ukraina	2870	0,00183	5,06426	0,00316	9,88366

Selkeyttäkseni lukijan ymmärrystä uskottavuusosamäärän laskemisesta hahmotellaan laskentaprosessia seuraavan esimerkin mukaisesti: Indeksi = MSCI UK, VaR malli = historiallinen simulaatio, luottamustaso = 95 %. $P = 0,05$, $x = 143$, $n = 2870$, jolloin POF testin uskottavuusosamäärä on laskettavissa seuraavan kaavan mukaisesti:

$$UO_{POF} = -2 \log \left(\frac{(1 - 0,05)^{2870-143} \cdot 0,05^{143}}{\left(1 - \frac{143}{2870}\right)^{2870-143} \cdot \left(\frac{143}{2870}\right)^{143}} \right) = 0,01656 \quad (29)$$

Kuten taulukosta 10 on nähtävissä Proportion of Failure (POF) testi hyväksyy 95

%:n ja 99 %:n luottamustasolla HS estimoinnit, kun taas VKV estimointien tulokset hylätään kaikki 99 %:n luottamustasolla. 95 %:n luottamustasolla onnistuu VKV estimointien tulokset pysymään osittain viitearvojen sisällä.

5.3.3 Acerbin ja Szekelyn ehdoton testi

Taulukosta 11 ja 12 on luettavissa Acerbin ja Szekelyn ehdottoman testin tulokset. Otosikko ”HS” viittaa historiallisen simulaation testisuureeseen ja ”VKV” varianssi-kovarianssimenetelmän testisuureeseen. ”P-arvo” puolestaan viittaa testisuureen p-arvoon. Estimointimenetelmää ei hylätä, jos p-arvo on suurempi kuin 0,05. Lihavoidut arvot tarkoittavat, että estimointimenetelmä joudutaan hylkäämään.

Taulukko 11: Acerbin ja Szekelyn ehdottoman testin tulokset (CVaR 95 %)

Indeksi	N	Luottamustaso 95 %			
		HS	P-arvo	VKV	P-arvo
MSCI Japani	2870	-0,0107	0,4502	-0,0798	0,1916
MSCI UK	2870	-0,0705	0,2170	-0,2279	0,0059
MSCI Venäjä	2870	0,0392	0,5000	0,0991	0,5000
MSCI Brasilia	2870	-0,0686	0,2225	-0,0544	0,2672
MSCI Ukraina	2870	-0,0924	0,1569	-0,0010	0,4907

Tutkittaessa taulukon 11 tuloksia voidaan todeta historiallisen simulaation pärjänneen estimoinneissa 95 %:n luottamustasolla hyvin. Se läpäisi kaikki jälkitestausmenetelmät niin VaR kuin CVaR malleille. Kaiken kaikkiaan tutkittaessa varianssi-kovarianssimenetelmän jälkitestaamisprosessia, voidaan todeta, että CVaR-malli suoritui parhaiten. Mallin huomioidessa VaR-tason ylittävä osuus ottaa se huomioon rahoitusmarkkinoilla esiintyvän tuottojakaumien häntätappiot paremmin kuin VaR-malli.

Taulukko 12: Acerbin ja Szekelyn ehdottoman testin tulokset (CVaR 99 %)

Indeksi	N	Luottamustaso 99 %			
		HS	P-arvo	VKV	P-arvo
MSCI Japani	2870	-0,4456	0,0178	-1,3097	0,0001
MSCI UK	2870	-0,7076	0,0006	-1,3831	0,0001
MSCI Venäjä	2870	-0,1626	0,2117	-0,4981	0,0091
MSCI Brasilia	2870	-0,3265	0,0565	-0,5115	0,0079
MSCI Ukraina	2870	-0,3468	0,0463	-1,0083	0,0001

Tutkittaessa taulukon 12 tuloksia voidaan todeta, että 99 %:n luottamustasolla CVaR-mallit eivät suoriudu yhtä hyvin kuin 95 %:n luottamustasolla. Historiallinen simulatio epäonnistui ensimmäistä kertaa läpäisemään jälkitestaamisprosessin. Puolestaan varianssi-kovarianssi-menetelmä ei läpäissyt 99 %:n luottamustasolla yhdenkään indeksin kohdalla jälkitestaamisprosessia VaR- tai CVaR-estimoinneissa. Tuottojakauksen ollessa ei-normaalijakautunut voidaan 99 %:n luottamustasoa pitää varianssi-kovarianssi-menetelmälle liian haastavana. 95 %:n luottamustaso on monesti riittävä tehtävässä estimointeja, mutta tällöin kuitenkin voidaan päätyä tilanteeseen, jossa riskiä aliarvioidaan mikäli hännässä esiintyy useita havaintoja.

6 Johtopäätökset

Tutkimuksessa vertailtiin VaR- ja CVaR-mallien suoriutumista markkinariskin mittaamisessa kahdella erilaisella estimointimenetelmällä. Lisäksi selvitettiin miten taustaoletus tuottojen normaalijakautuneisuudesta on soveltuvainen parametrisille estimointimenetelmille.

Tutkimuksessa pyrittiin saamaan vastaus seuraaviin tutkimuskysymyksiin:

Voidaanko CVaR-mallia pitää ylivoimaisena verrattuna VaR malliin?

Soveltuvatko parametriset menetelmät estimointimenetelmäksi paremmin kuin ei-parametriset menetelmät?

Onko taustaoletus tuottojen normaalijakautuneisuudesta soveltuva käytettäessä parametrisia estimointimenetelmiä?

Jälkitestausprosessin perusteella voidaan todeta, että historiallinen simulaatio suoriutui tässä tutkimuksessa paremmin kuin varianssi-kovarianssi-menetelmä. Historiallisen simulaation kaikki tulokset hyväksyttiin 95 %:n luottamustasolla kummallakin mallilla. Varianssi-kovarianssi-menetelmä puolestaan ei suoriutunut yhtä hyvin. Huomioitavaa on, että käytettäessä parametrisia menetelmiä vaikuttaisi CVaR-malli olevan luotettavampi kuin VaR-malli tässä tutkimuksessa. Tähän vaikuttaa mitä todennäköisemmin CVaR-mallin kyky huomioida tuottojakauman häntäosaa paremmin, sillä merkittävä määrä havaintoja sijoittui VaR-mallin ylittävälle osalle 95 %:n luottamustasolla.

Ero estimointimenetelmien suoriutumiskyvyssä korostuu 99 %:n luottamustasolla. Kumminkin jälkitestausmenetelmät hyväksyivät historiallisen simulaation tulokset VaR-malleille ja puolestaan hylkäsivät kaikki varianssi-kovarianssi-menetelmän tulokset. Historiallinen simulaatio epäonnistui ensimmäisen kerran 99 %:n luottamustasolla CVaR-mallissa ja puolestaan mikään varianssi-kovarianssi-menetelmän estimointi ei tullut hyväksytyksi kyseisellä luottamustasolla. Aiemmat tutkimukset osoittavat 95 %:n luottamustason olevan soveltuvaisempi varianssi-kovarianssi-menetelmälle, mikäli tuottojakauman oletetaan mukavailevan normaalijakaumaa. Tämän tutkimuksen tulokset eivät

eroa aiemmista, sillä varianssi-kovarianssi menetelmä suoriutui paremmin 95 %:n luottamustasolla, kuin 99 %:n luottamustasolla.

Voidaan myös todeta, että oletus tuottojen normaalijakautuneisuudesta ei ole monesti soveltuvainen rahoitusmarkkinoilla esiintyville tuottojakaumille. Kuten aiemmat tutkimukset ovat osoittaneet, että VaR-mallin käyttäminen paksuhäntäisille tuottojakaumille johtaa tilanteeseen, jossa todellista riskisyyttä päädytään aliarvioimaan. Verrattuna aiempiin tutkimuksiin näyttäisi varianssi-kovarianssi-menetelmä 95 %:n luottamustasolla tuottavan puolestaan yliarvion todellisesta riskisyydestä. Tulos on kuitenkin riippuvainen tuottojakauman muodosta, sillä ääriarvoja alkaa esiintymään useammin vasta 95 %:n luottamustason jälkeen. Käytettäessä taustaoletusta tuottojen normaalijakautuneisuudesta voidaan päätyä tilanteeseen, jossa varianssi-kovarianssi-menetelmä tuottaa yliarvion tietyllä luottamustasolla ja puolestaan aliarvion toisella luottamustasolla.

Puolestaan 99 %:n luottamustasolla varianssi-kovarianssi-menetelmä aliarvioi riskiä verrattuna historialliseen simulaatioon. Tulos ei ole yllättävä johtuen tuottojakaumien muodosta. Aiempin tutkimusten mukaan kuten Hendricks (1996) mukaan historiallinen simulaatio tuottaa lievän yliarvion todellisesta riskisyydestä. Tämän tutkimuksen estimaatit historialliselle simulaatiolle olivat kuitenkin äärimmäisen tarkkoja, eikä niitä voida kutsua yliarvioiksi. Olson & Wu (2013) tutkimus osoitti, että logistinen normaalijakauma mukailee rahoitusmarkkinoilla esiintyviä tuottojakaumia parhaiten. Logistisen normaalijakauman muoto muistuttaa pitkälti normaalijakaumaa, jossa on paksimmat hännät, jonka takia sitä voidaan pitää yleisesti soveltuvaisempina empiirisille tuottojakaumille. Logistisen normaalijakauman kyky huomioida häntäosien paksuampi muoto on tärkeä ominaisuus, sillä varsinkin tappiopuolen häntäosassa saattaa esiintyä useita havaintoja. Myös tässä tutkimuksessa käytetty empiirisen aineisto oli huipukasta, jonka vuoksi teoreettinen normaalijakauma ei ole käytetylle aineistolle optimaalinen.

Vertailtaessa itse VaR- ja CVaR-mallien suoriutumiskykyä on hankalaa suoranaisesti sanoa, että toinen malli on parempi, kuin toinen. Kummallakin mallilla on omat vah-

vuudet, mutta myös heikkoudet. VaR-mallin käyttäminen on yksinkertaista ja nopeaa, se ei kuitenkaan ota huomioon hajautushyötyjä, eikä tuota yhtä paljon informaatiota verrattuna CVaR-malliin. VaR-malleille löytyy useita erilaisia jälkitestaamenetelmiä, jotka ovat lähtökohtaisesti yksinkertaisia toteuttaa verrattuna CVaR-malliin. CVaR-mallin matemaattiset ominaisuudet vaikeuttavat mallin jälkitestaamismahdollisuuksia, mutta toisaalta mahdollistavat mallin käyttämisen optimointitarkoituksissa, jota voidaan pitää tärkeänä ominaisuutena. CVaR-malli tuottaa aina korkeamman ennusteen riskisyydestä verrattuna VaR-malliin, mikä tekee sen käyttämisestä vähemmän houkuttelevaa. Toisaalta CVaR-mallin avulla pystytään tekemään ennusteita absoluuttisesti pahimmista tapahtumista, mikä voi olla elintärkeä ominaisuus suuremmille instituutioille, kuten investointipankeille. Kaiken kaikkiaan markkinariskin mittaamisessa ei tulisi tukeutua vain toiseen mittareista, sillä VaR- ja CVaR-mallit täydentävät toisiaan ja tuottavat yhdessä arvokasta tietoa markkinariskin mittaamiseen.

Tutkimuksessa käytettiin vain kahta erilaista estimointimenetelmää, jonka takia jatkotutkimuksen kannalta olisi mielenkiintoista vertailla myös Monte-Carlo -simulaation ja Bootstrapping-menetelmän suoriutumiskykyä markkinariskin mittaamisessa huomioiden volatilitietin optimaalinen estimointi. Lisäksi empiirisen tuottojakauman sovittaminen logistiseen normaalijakaumaan mahdollistaisi ennen kaikkea parametrusten estimointimenetelmien paremman suoriutumisen. CVaR-mallin avulla voitaisiin myös portfolion riskisyyttä minimoida modernilla tavalla.

Lähdeluettelo

- Acerbi, C. & Szekely, B. (2014), ‘Backtesting expected shortfall’, *Risk* **27**(11), 76–81.
- Acerbi, C. & Tasche, D. (2002), ‘On the coherence of expected shortfall’, *Journal of Banking & Finance* **26**(7), 1487–1503.
- Alexander, C. (2009a), *Market risk analysis, value at risk models*, Vol. 4, John Wiley & Sons, New York, USA.
- Alexander, G. (2009b), ‘From markowitz to modern risk management’, *European Journal of Finance* **15**, 451–461.
- Alexander, G. J. & Baptista, A. M. (2004), ‘A comparison of var and cvar constraints on portfolio selection with the mean-variance model’, *Management science* **50**(9), 1261–1273.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M. & Heath, D. (1999), ‘Coherent measures of risk’, *Mathematical finance* **9**(3), 203–228.
- Basel Committee on Banking Supervision (2005), ‘International convergence of capital measurement and capital standards’.
URL: <https://www.bis.org/publ/bcbs118.pdf>
- Citibank (2019), ‘Annual report’.
URL: <https://www.jpmorganchase.com/content/dam/jpmc/jpmorgan-chase-and-co/investor-relations/documents/annualreport-2019.pdf>
- Danielsson, J., Jorgensen, B., Mandira, S., Samorodnitsky, G. & Vries, C. (2005), ‘Subadditivity re-examined: the case for value-at-risk’.
- Dattels, P. & Kodres, L. (2009), ‘Global financial system shows signs of recovery, imf says’, *IMF Survey Magazine* .
- Dowd, K. (2003), *An introduction to market risk measurement*, John Wiley & Sons, Chichester, United Kingdom.

- Dowd, K. (2007), *Measuring market risk*, John Wiley & Sons, Chichester, United Kingdom.
- Goorbergh, R. & Vlaar, P. (1999), ‘Value-at-risk analysis of stock returns historical simulation, variance techniques or tail index estimation?’.
- Hendricks, D. (1996), ‘Evaluation of value-at-risk models using historical data’, *Economic policy review* **2**(1).
- Hull, J. (2012), *Risk management and financial institutions*, 4th edn, John Wiley & Sons, New Jersey, USA.
- Jorion, P. (2007), ‘Value at risk—the new benchmark for managing financial risk’, *Financial Markets and Portfolio Management* **21**(3), 397.
- JPMorgan&Chase (2019), ‘Annual report’.
URL: <https://www.jpmorganchase.com/content/dam/jpmc/jpmorgan-chase-and-co/investor-relations/documents/annualreport-2019.pdf>
- Kaltenbach, H.-M. (2011), *A concise guide to statistics*, SpringerBriefs in Statistics, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Germany.
- Longerstaey, J. & Spencer, M. (1996), ‘Riskmetricstm—technical document’.
- Markowitz, H. (1952), ‘Portfolio selection’, *The Journal of Finance* **7**(1), 77–91.
- Olson, D. L. & Wu, D. (2013), ‘The impact of distribution on value-at-risk measures’, *Mathematical and Computer Modelling* **58**(9), 1670 – 1676. Computational simulation and risk analysis.
- Rockafellar, R. T. & Uryasev, S. (2000), ‘Optimization of conditional value at risk. journal of risk’, *Volume 2*.
- Sarykalin, S., Serraino, G. & Uryasev, S. (2008), Value- at-risk vs conditional value-at-risk in risk management and optimization.
- Simons, K. (1996), ‘Value at risk—new approaches to risk management’, *New England Economic Review* pp. 3–14.

- Taleb, N. (1997), 'The world according to Nassim Taleb', *Derivatives Strategy* **2**(1), 37–40.
- Wong, A. & Vlaar, P. (2003), Modelling time-varying correlations of financial markets, WO Research Memoranda 739, Netherlands Central Bank, Research Department.
- Yamai, Y. & Yoshida, T. (2005), 'Value-at-risk versus expected shortfall: A practical perspective', *Journal of Banking & Finance* **29**(4), 997–1015.

A Indeksien tuottojakaumat

