

LAPPEENRANNAN-LAHDEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

School of Engineering Science

Laskennallisen tekniikan koulutusohjelma

Kandidaatintyö

*Kusti Kurvinen*

**Binääritislaamon tilastollinen ja dynaaminen mallintaminen**

Ohjaajat: Lassi Roininen ja Teemu Härkönen

## **TIIVISTELMÄ**

Lappeenrannan-Lahden teknillinen yliopisto

School of Engineering Science

Laskennallisen tekniikan koulutusohjelma

Kusti Kurvinen

### **Binääritislaamon tilastollinen ja dynaaminen mallintaminen**

Kandidaatintyö

2021

Ohjaajat: Lassi Roininen ja Teemu Härkönen

Avainsanat: binääritislaamo; differentiaaliyhtälö; mallinnus; ode45; Runge-Kutta; parviajo; luottamusväli;

Binääritislaamo on yleinen sovellus kemiallisessa prosessiteollisuudessa seosten erottelussa kahteen erilliseen komponenttiinsa. Tämän kandidaatin aiheena on mallintaa 5-vaiheisen binääritislaamon toimintaa dynaamisesti sekä tilastollisesti. Mallinnus on toteutettu differentiaaliyhtälöiden avulla sekä hyödyntämällä sopivaa mallia niille.

Työssä käydään aluksi läpi yleistä teoriaa aiheesta, kuten differentiaaliyhtälöiden analyttisiä ja numeerisia ratkaisumenetelmiä, joista pääsääntöisesti vain numeerisia hyödynnetään tässä työssä. Binääritislaamomalli, joka mallintaa systeemin toimintaa, kuvataan läpi perusteellisesti sekä selostetaan simuloinnin vaiheet. Simuloinnista saadaan tulokseksi refluksisuhde eli kuinka tehokas erotteluprosessi on loppujenlopuksi, kevyemmän komponentin mooliosuus ja luottamusvälit kahdelle eri parametrille, joista voidaan havainnollistaa parametrien vaihtelun vaikutusta systeemissä.

# Sisällys

<b>1 JOHDANTO</b>	<b>4</b>
1.1 Tausta . . . . .	4
1.2 Tutkimusongelma, tavoitteet ja rajaus . . . . .	4
<b>2 DIFFERENTIAALIYHTÄLÖIDEN TEORIAA</b>	<b>5</b>
2.1 Analyttinen menetelmä . . . . .	6
2.2 Numeerinen menetelmä . . . . .	6
2.3 Ode45 ja Runge-Kutta . . . . .	7
2.4 Parviajojen logiikka . . . . .	8
2.5 Luottamusvälit ja niiden mallintaminen . . . . .	8
<b>3 BINÄÄRITISLAAMO - MALLI</b>	<b>10</b>
3.1 Mallin kuvaus . . . . .	11
3.2 Differentiaaliyhtälöt ja simulointi . . . . .	12
<b>4 YHTEENVETO</b>	<b>15</b>
<b>LÄHTEET</b>	<b>16</b>

# 1 JOHDANTO

## 1.1 Tausta

Jotta pystyisimme mallintamaan ympäröivää maailmaamme paremmin, on ajan saatossa kehitetty differentiaaliyhtälöt. Tällaiset matemaattiset yhtälöt koostuvat yhden tai useammasta tuntemattoman muuttujan funktioista ja sen derivaatoista. Hyödyntämällä niitä eri sovelluksissa, kuten fysikaalisissa ja kemiallisissa systeemeissä, voimme saada paremman kuvan mallinnuksesta kuin paljain silmin katsoen.

Koska differentiaaliyhtälöillä pyritään kuvaamaan funktioiden muutoksia, niin yksi sopivista sovellutuksista on teollisuudessa käytetty binääritislaus. Binääritislauksessa idean ytimenä on erottaa nestemäisestä seoksesta kaksi tai useampaa komponenttia tislaukskolonnin avulla. Tämän työn tarkoituksena on kuvata, miten differentiaaliyhtälöitä voidaan käyttää hyväksi tehokkaasti mallintamaan binääritislaamon käyttäytymistä dynaamisesti ja tilastollisesti.

## 1.2 Tutkimusongelma, tavoitteet ja rajaus

Tutkimusongelmana sekä tavoitteena tässä työssä on saada mahdollisimman kattava mallinnus binääritislaamo-mallista, joka koostuu 5 vaiheesta. Mallinnus koostuu mallin differentiaaliyhtälöiden simuloinnista, josta saadusta datasta saamme kuvaajat sekä vaihteluvälit kuvaamaan systeemiä sekä tilastollisesti että dynaamisesti.

Differentiaaliyhtälö systeemejä voi mallintaa numeerisesti ja analyttisesti. Kuitenkin tässä työssä binääritislaamon yhtälöt ovat liian monimutkaisia analyttisen ratkaisun saamiseksi, joten analyttisen ratkaisun tutkiminen on rajattu pois kokonaan.

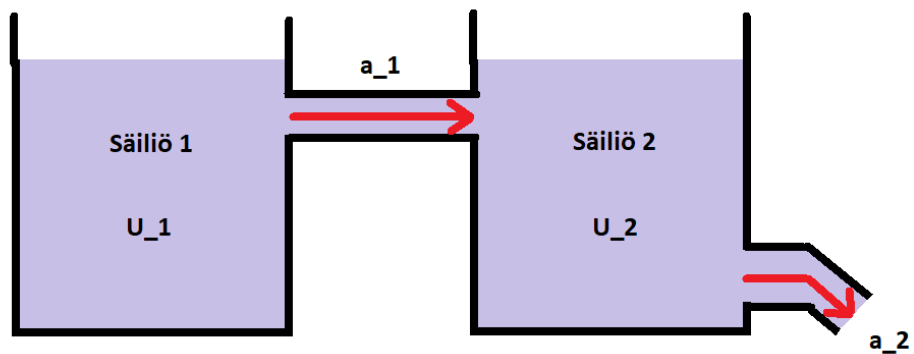
## 2 DIFFERENTIAALIYHTÄLÖIDEN TEORIAA

Differentiaaliyhtälöparilla pystytään esimerkiksi mallintamaan kahden linkitetyn säiliön nesteen virtausta (Zill 2012). Alla olevassa yhtälöparissa funktiot  $u'_1$  ja  $u'_2$  ovat säiliöiden nesteiden määrien muutosnopeuksia. Funktiot  $u_1$  ja  $u_2$  ovat taas nesteiden määriä säiliöissä. Parametrit  $a_1$  ja  $a_2$  kuvaavat nesteiden kulkunopeutta säiliöiden välillä.

$$u'_1 = -a_1 \cdot u_1,$$

$$u'_2 = a_1 \cdot u_1 - a_2 \cdot u_2.$$

Valitsemalla differentiaaliyhtälömalli tämän systeemin mallintamiseksi saadaan yksinkertainen ymmärrys siitä, miten nesteen määrä muuttuu säiliöissä suhteessa aikaan. Kuva 1 mallintaa tarkasteltavaa yhtälöparia.



**Kuva 1.** Mallinnus differentiaaliyhtälöstä. Systeemissä säiliöstä 1 virtaa nestettä nopeudella  $a_1$  säiliöön 2 ja säiliöstä 2 virtaa nestettä pois nopeudella  $a_2$

## 2.1 Analyttinen menetelmä

Differentiaaliyhtälöille ei ole suoraa yleistä ratkaisumenetelmää vaan ensiksi pitää tunnistaa niiden tyyppi ja ratkaista sen kautta käyttämällä tämän oikeanlaisen tyypin ratkaisukaavaa, jolloin saadaan analyttinen ratkaisu. Aina se ei ole kuitenkaan niin yksinkertaista ja pitää tyytyä numeeriseen ratkaisuun.

Aiemmin esitellyn dy-parin yhtälöt ovat lineaarisia ensimmäisen asteen kertaluvun differentiaaliyhtälöitä. Koska näiden yhtälöiden tyyppi tunnetaan, on mahdollista laskea analyttiset ratkaisut käyttämällä sen kyseisen tyypin ratkaisukaavoja.

$$u_1 = c_1 \cdot e^{-a_1 \cdot t},$$

$$u_2 = c_2 \cdot e^{-a_2 \cdot t} - \frac{a_1 \cdot c_1 \cdot e^{t \cdot (-(a_1 + a_2))} \cdot (e^{a_2 \cdot t} - e^{a_1 \cdot t})}{a_1 - a_2}.$$

Ratkaisusta saadaan selville systeemin tarkat nesteiden määrät  $u_1$  ja  $u_2$  tietynä  $t$  hetkenä. Funktio  $c_1$  ja  $c_2$  kuvaavat tuntemattomia kertoimia, jotka voidaan selvittää, jos tiedetään systeemin alkuarvot.

## 2.2 Numeerinen menetelmä

Numeeriset menetelmät differentiaaliyhtälöille ovat menetelmiä, joita käytetään numeeristen likiarvojen löytämiseen tavallisten differentiaaliyhtälöiden (ODE) ratkaisuihin. Niiden käyttöä kutsutaan myös ”numeeriseksi integroinniksi”, vaikka tämä termi voi viitata myös integraalien laskemiseen.

Kuten aiemmin mainittu, moniakaan differentiaaliyhtälöitä ei voida ratkaista analyttisesti laskemalla. Käytännön tarkoituksiin, kuten esimerkiksi suunnittelussa, kuitenkin numeerinen likiarvo ratkaisuun riittää. On siis olemassa erilaisia algoritmeja, joita voidaan käyttää tällaisen likiarvon laskemiseen, kuten esimerkiksi Euler ja Runge-Kutta menetelmät. Vaihtoehtoinen menetelmä on käyttää laskennan tekniikoita ratkaisun sarjalaajennuksen saamiseksi.

Tavallisia differentiaaliyhtälöitä esiintyy monilla tieteenaloilla, mukaan lukien fysiikka, kemia, biologia ja taloustiede. Lisäksi jotkut numeerisissa osittaisdifferenssiyhtälöissä käytetyt menetelmät muuntavat osittaisdifferenssiyhtälöt tavallisiksi differentiaaliyhtälöiksi, joka on sitten analyttisesti ratkaistavissa.

## 2.3 Ode45 ja Runge-Kutta

Differentiaaliyhtälöparin ratkaisuun on käytetty MATLAB-ohjelmiston ode45 funktiota. Sen päätarkoituksena on ratkaista tavallisia tai osittaisdifferentiaaliyhtälöitä numeerisella menetelmällä. Se perustuu 4. asteen Runge-Kutta menetelmään, joka on hyvin keskeinen numeerisen analyysin menetelmä differentiaaliyhtälöiden ratkaisuun. Sen kehittivät aikoinaan saksalaiset matemaatikot Carl Runge ja Martin Wilhelm Kutta vuosien 1895-1901 aikana. Menetelmällä itsellään on lukuisia sovellutuskohteita muun muassa fysiikan ja tilastotieteen alalla (ode45 2006).

Ode45 käyttää Runge-Kutta menetelmää, RK4 eli yleisemmin neljännen kertaluvun Runge-Kutta menetelmää (Adams 2003). Seuraavaksi esitellään tässä siis yleinen kuvaus menetelmästä alkuarvo-ongelmana:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0.$$

Funktio  $y$  on ajan  $t$  tuntematon funktio, jonka haluamme arvioida. Oletetaan, että  $\frac{dy}{dt}$  on  $y$ :n muutosnopeus, jossa muuttujina on  $t$  ja  $y$  itsekin. Aloitushetkellä  $t_0$ :a vastaava  $y$ -arvo on  $y_0$ . Kirjoitetaan RK4-menetelmä seuraavasti:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$$

$$t_{n+1} = t_n + h,$$

missä  $h$  kuvaa käytettyä aika-askelta ja  $y_{n+1}$  on RK4-menetelmän estimaatti arvosta  $y(t_{n+1})$  ja

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot k_2\right)$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + h \cdot k_3)$$

Kuvauksessa esiintyvät kertoimet  $k_i$  voidaan määrittellä mallinnettavan funktion kulmakertoimiksi välin eri pisteissä. Arvo  $k_1$  tarkoittaa välin alkupisteiden kulmakerrointa. Arvo  $k_2$  tar-

koittaa approksimaatio puolivälin kulmakertoimesta, jotka on laskettu Eulerin menetelmällä. Arvo  $k_3$  käyttää  $k_1$ :n sijaan  $k_2$ :a Eulerin menetelmässä ja arvo  $k_4$  on  $k_3$ :a hyödyntäen laskettu kulmakertoimen arvo välin päätepisteessä. Lopuksi lasketaan keskiarvo käyttämällä näitä neljää arvoa niin, että painotetaan puolivälin kulmakertoimia.

Runge-Kutta menetelmän tarkkuus on neljättä kertalukua niin kuin nimikin sanoo. Se tarkoittaa, että käytetyn aika-askelen  $h$  neljäs potenssi on verrannollinen virheeseen. Aika-askelta kohti virhe menetelmässä on  $h^5$ , ja koska askelia tarvitaan  $\frac{1}{h}$  aikayksikköä kohden, on kokonaisvirhe enemmän verrannollinen suureeseen  $h^4$ .

## 2.4 Parviajojen logiikka

Parviajossa on nimensä mukaisesti useita jäseniä (eri malleissa 20–50) ja ne kaikki kuvaavat samaa ennustetta hieman erilaisin muunnelmin alkutilanteesta. Parviajon jäsenten välinen hajonta auttaa arvioimaan ennusteiden epävarmuutta.

## 2.5 Luottamusvälit ja niiden mallintaminen

Differentiaaliyhtälöparille on myös mallinnettu luottamusvälit, jotta saadaan tietää ennusteet, miten parametrit ja funktiot muuttuvat ajan suhteen ääriolosuhteissa.

Luottamusväli on yleisemmin tilastotieteen käsite, jolla kuvataan estimaattista väliä, jolla populaation generoivan mallin parametrit sijaitsevat. Toisin sanoen sitä käytetään määrittämään estimaatin luotettavuutta (Dekking 2005). Seuraavaksi käsitellään, miten luottamusvälejä lasketaan.

Luottamusvälejä lasketaan riippuen mitä tietoja perusjoukosta tiedetään. Tilanteessa yksi, jossa tunnetaan perusjoukon keskihajonta  $\sigma$  voidaan laskea keskiarvon  $\bar{x}$  keskivirhe:

$$\bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$n$  on otoksen koko. Tästä saadaan luottamusvälin virhemarginaalit kaavalla:

$$\bar{x} \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

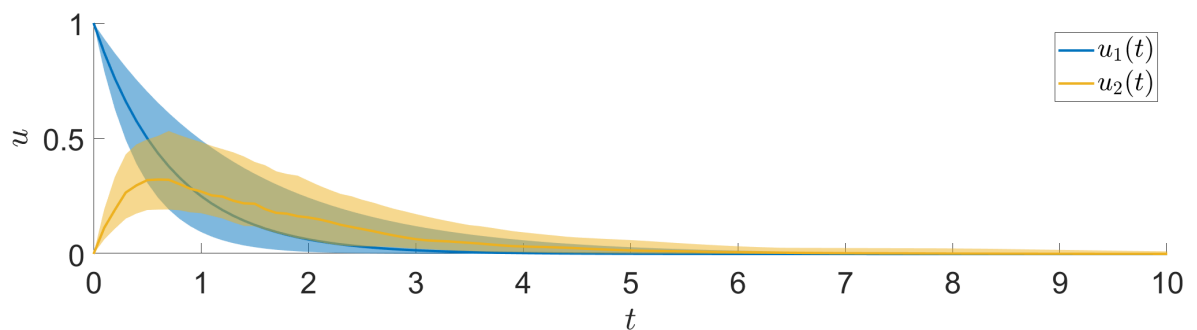


jossa  $z$  on eri luottamustasoilla kriittinen arvo tai  $Z$ -estimaatti. Tilanteessa kaksi taas ei tunneta keskihajonta  $\sigma$ , mutta  $s$  keskihajonta on tiedossa. Tällöin lasketaan keskiarvon  $\bar{x}$  keski-  
virhe:

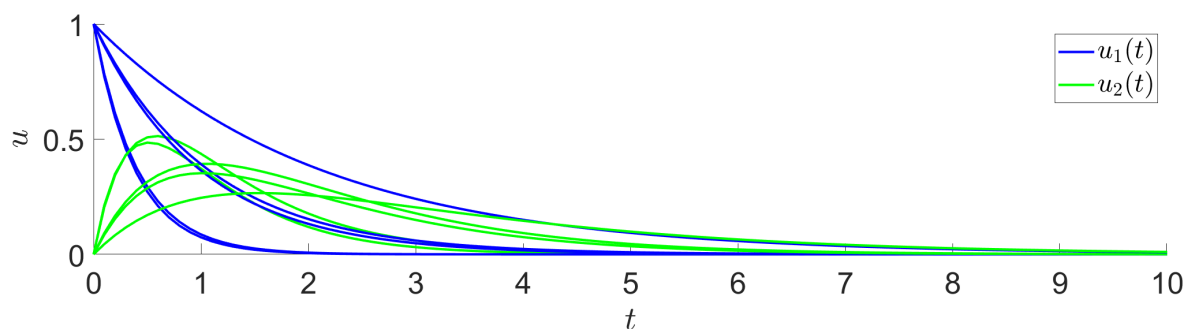
$$\bar{x} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Tästä saadaan luottamusvälit  $T$ -estimaatin avulla.

Seuraavaksi mallinnetaan, miten aiemmin mainitun differentiaaliyhtälöparin luottamusvälit piirtyvät. Yhtälöparissa  $a_1$  ja  $a_2$  ovat normaalijakaumalla satunnaisesti valittuja positiivisia vakioita. Laskemalla differentiaaliyhtälön ratkaisut kaikille satunnaisesti valituille arvoille saadaan arvioitua ratkaisujen luottamusvälejä. Saatuja luottamusvälejä ja ratkaisuja esitetään kuvaajissa 2 ja 3.



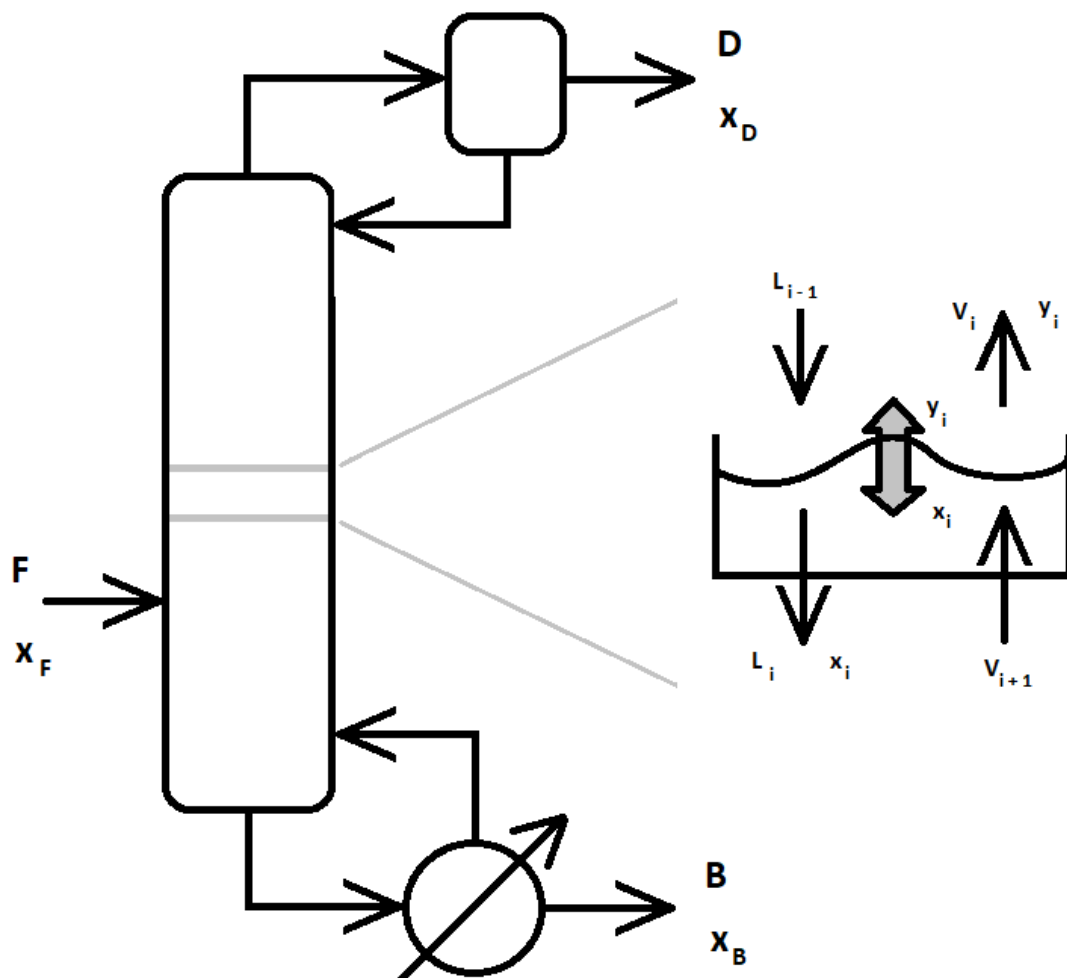
**Kuva 2.** Differentiaaliyhtälöistä saadut luottamusvälit 25 - 75% välillä.



**Kuva 3.** Differentiaaliyhtälöistä saadut satunnaisesti valitut käyrät.

### 3 BINÄÄRITISLAAMO - MALLI

Yksi tärkeimmistä operaatioista kemian teollisuudessa on tislaminen. Jatkuvana toimiva tisluskolonniin ideana on erottaa kaksi tai useampaa lähellä toisiaan kiehuvaa nestettä toisistaan. Tislaus onkin hyvä esimerkki vaiheistetusta tasapaino-operaatiosta. Tutkittavan komponentin mooliosuus on keskeinen prosessimuuttuja, joka vaihtelee pylväikön korkeuden mukaan. Pylvään yläosassa oleva lauhdutin muodostaa ensimmäisen vaiheen, kun taas alaosassa oleva kattila muodostaa N:n vaiheen. Syöttö syötetään syöttölokeroon, joka on jossain ylä- ja alaosan välissä. Tavallisessa binääritislaus kolonnissa kevyt komponentti, tisle, saadaan ylhäältä ja raskaampi komponentti, alite, alhaalta (Kaisare 2017).



**Kuva 4.** Kaavio tisluskolonnista ja yksittäinen tasapaino lokeron kolonnista.

### 3.1 Mallin kuvaus

Tislattavan seoksen kevyemmän komponentin mooliosuus on prosessin tilamuuttuja. Yksittäisessä tasapainokolonissa neste ja höyry ovat tasapainossa, mutta ne virtaavat vaiheesta toiseen jatkuvasti, joten prosessi mallinnetaan siten tasapainovaiheiden jaksona. Kevyemmän komponentin mooliosuus nestemäisenä ja kaasumaisena olomuotona yksittäisessä vaiheessa esitetään  $x_i$  ja  $y_i$  vastaavasti. Näiden kahden oletetaan olevan tasapainossa. Vaiheesta lähtevien neste- ja höyryvirtausten nopeus on vastaavasti  $L_i$  ja  $V_i$ .

Tisla saadaan kolonin yläosassa olevasta lauhduttimesta. Tisleen mooliosuus on  $x_D$  ja virtausnopeus  $D$ . Alite taas saadaan kolonin alaosasta, kiehuttimesta. Alitteen mooliosuus on myös vastaavasti  $x_B$  ja virtausnopeus  $B$ . Syöte tulee syöttölokeroon nesteenä mooliosuudella  $x_F$  ja virtausnopeudella  $F$ . Kullakin vaiheella oleva nesteen viivästys arvo oletetaan olevan vakio. Materiaalitasapainon säilyttämiseksi on seuraavan ehdon täytyttävä:

$$F = D + B$$

Jotta mallista saataisiin yksinkertaisempi, on tehtävä joitain oletuksia. Ensimmäisenä suhteellinen volatilitteetti oletetaan vakioksi ja se määritellään seuraavasti:

$$\alpha = \frac{y/(1-y)}{x/(1-x)}$$

Mitä suurempi  $\alpha$  on, sitä helpompaa on erottaa kaksi komponenttia. Suhteellisen volatilitteetin oletaminen vakiona on kohtuullinen oletus seokselle, joka on hyvin lähellä ideaalista. Siten neste- ja höyryolomuotokoostumukset liittyvät toisiinsa kaavalla

$$y_i = \frac{\alpha x_i}{1 + (\alpha - 1)x_i}$$

Toinen oletus on, että molaarisuusvirtaus nopeuksien oletetaan vakioiksi. Toisin sanoen  $L_i$  ja  $V_i$  ovat vakiot strippausvaiheissa (syöttövaiheen alapuolella olevat lokerikot) ja rektifointivaiheissa (syöttövaiheen yläpuolella olevat lokerikot). Jokaisen yksittäisen lokeron molaarinen tasapaino kevyessä komponentissa tuottaa

$$M_i \frac{dx_i}{dt} = V_{i+1}y_{i+1} + L_{i-1}x_{i-1} - V_i y_i - L_i x_i$$

Oletuksena oli siis, että molaarinen virtausnopeus pysyy vakiona. Siten höyryn olomuotovirtausnopeus pysyy vakiona tasolla  $V$  koko kolonnissa. Samoin rektifointiosassa ( $i > i_{\text{feed}}$ ) nesteen molaarinen virtausnopeus on vakio  $L$ :ssä. Syöte lisätään kuitenkin nesteenä syöttölokeroon, joten strippausosassa ( $i < i_{\text{feed}}$ )  $L_i = L + F$ . Nestekierto, joka tulee kiehuttimeen, jaetaan kahteen virtaan, alitteeseen ja kiehumisvirtaan. Tällöin

$$L + F = V + B.$$

Samoin lauhduttimeen tuleva höyry jaetaan tisle- ja palautusvirtaan:

$$V = L + D.$$

Tällöin rektifointivaiheelle saadaan

$$L_i = L, V_i = V$$

ja strippausvaiheelle

$$L_i = L_s, V_i = V, \text{ missä } L_s = L + F.$$

## 3.2 Differentiaaliyhtälöt ja simulointi

Seuraavaksi käsitellään binääritislauskolonnin eri vaiheiden lopulliset differentiaaliyhtälöt sekä käydään läpi simulointiparametrien kanssa.

$$\begin{aligned}
\text{Lauhdutinvaihe:} & \quad M_C \frac{dx_1}{dt} = Vy_2 - Dx_1 - Lx_1 \\
\text{Rektifointivaiheet:} & \quad M \frac{dx_i}{dt} = V(y_{i+1} - y_i) + L(x_{i-1} - x_i) \\
\text{Syöttövaihe:} & \quad M \frac{dx_i}{dt} = V(y_{i+1} - y_i) + Fx_F + Lx_{i-1} - L_s x_i \\
\text{Strippausvaiheet:} & \quad M \frac{dx_i}{dt} = V(y_{i+1} - y_i) + L_s(x_{i-1} - x_i) \\
\text{Kiehutinvaihe:} & \quad M_R \frac{dx_N}{dt} = -Vy_N - Bx_N + L_s x_{N-1}
\end{aligned}$$

Simuloinnissa on käytetty  $\alpha = 4$ . Tislauskolonnissa on 5 vaihetta, yksi kutakin strippaus- sekä rektifointivaihetta kohden. Muut parametrit on annettu alla olevassa taulukossa.

---

Syöttö: $F = 30$ mol/s	Tason viivästys: $M = 200$ mol
Tisle: $D = 10$ mol/s	Lauhduttimen viivästys: $M_C = 2$ kmol
Höyry: $V = 30$ mol/s	Kiehuttimen viivästys: $M_R = 1$ kmol
$x_F = 0.45$	

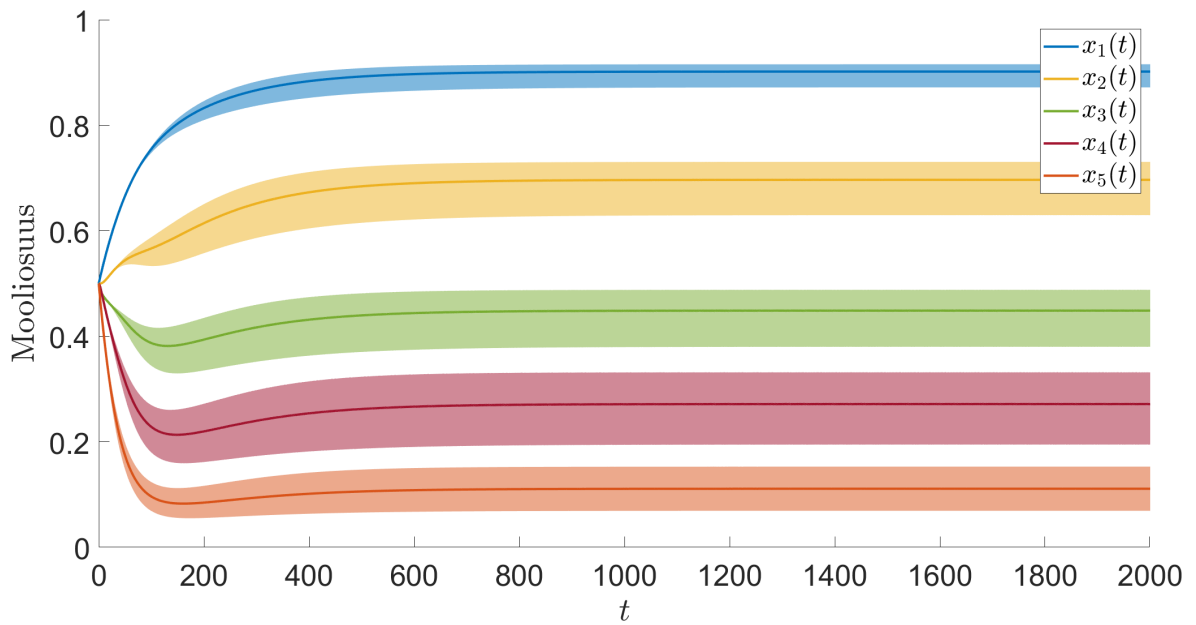
---

Systeemi simuloidaan ”D-V moodia”käyttämällä. Sen periaatteena on, kun tiedetään vain tisleen ja höyryn tarkat virtausnopeudet niin loput virtaukset saadaan laskettua näitä kahta käyttämällä. Simuloinnin tuloksena saatiin refluksisuhde ja kevyemmän nesteen mooliosuuksien lauhduttimessa sekä kiehuttimessa 30 minuutin kuluttua.

$$R = \frac{L}{D} = 2, \quad x_D = 0.92521, \quad x_B = 0.2124$$

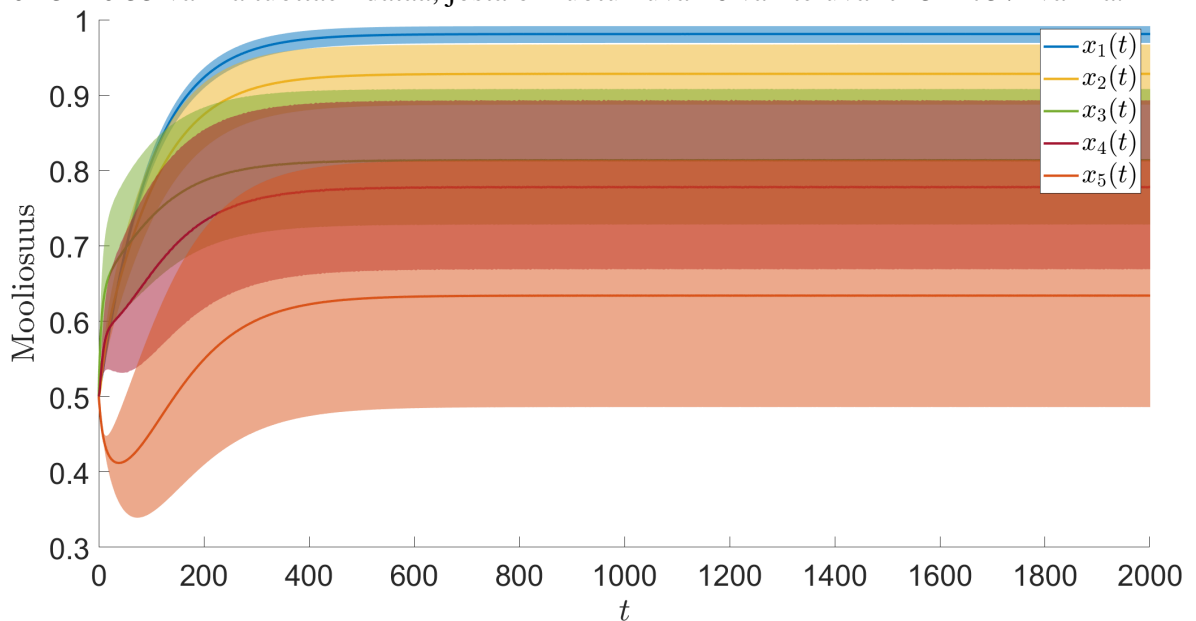
$R$  eli refluksisuhde kuvaa lauhduttimesta menevän nesteen virtausnopeutta takaisin tislauskolonniin,  $L$ , ja valmiin tisleen virtausnopeutta pois binääritislaamosta,  $D$ . Näiden kahden arvon suhteesta saadaan refluksisuhde. Se kertoo, kuinka tehokkaasti erotteluprosessi tapahtuu. Arvot  $x_D$  ja  $x_B$  kuvaavat taas vastaavasti tisleessä ja alitteessa olevia kevyemmän komponentin mooliosuuksia.

Lisäksi simuloinnista mallinnettiin kahden parametrin vaihtelua luottamusvälien avulla. Ensimmäinen tutkittava parametri oli, miten syötteen virtausnopeus  $F$  vaikuttaa systeemin toimintaan.  $F$  laitettiin vaihtelevaan 20 – 30 mol/s välillä tuottaen 100 erilaista lopputulosta mallin toiminnasta. Tästä datasta luotiin luottamusvälit 25 – 75% välillä ja tulokset voi nähdä kuvasta 5.



**Kuva 5.** Syötteen vaihtelulle luottamusvälit 25-75% välillä. Käyrien viimeiset arvot kuvaavat systeemin kevyemmän komponentin mooliosuuksia 30 minuutin jälkeen.

Toisena parametrina pyrittiin mallintaa syötteessä olevan kevyemmän komponentin mooliosuuden vaihtelua, mutta tulokset eivät ole yhtä selkeät kuin kuvassa 5. Parametri  $x_F$  vaihtelee 0.45 – 0.55 välillä tuottaen dataa, josta on luotu kuvan 6 vaihteluvälit 25 – 75% välillä.



**Kuva 6.** Syötteessä tulevan kevyemmän komponentin mooliosuuden vaihtelulle luottamusvälit 25-75% välillä.

## 4 YHTEENVETO

Tämän työn ideana oli mallintaa binääritislaamaa differentiaaliyhtälöiden avulla. Työtä rajoitettiin tutkimalla pääsääntöisesti vain numeerista ratkaisua.

Aluksi selitettiin differentiaaliyhtälöistä teoriaa analyyttisellä ja numeerisella puolella sekä mallinnettiin yksinkertaisen kahden säiliön systeemiä. Lisäksi kuvattiin miten MATLAB-ohjelmiston ode45 funktio ja sen käyttämä Runge-Kutta menetelmä toimii sekä kerrottiin parviajojen ja luottamusvälien teoriaa.

Mallinnuksessa saatiin selkeä näkemys siitä, miten seos erottuu tislaamossa ajan suhteen sekä mahdolliset vaihteluvälit, kun alkuarvoja muutetaan. Saadut tulokset näistä kuvaajista ovat saavuttaneet alkuperäiset tavoitteet.

Mallinnusta voisi jatkotutkimusta varten lähteä tarkastelemaan eri differentiaaliyhtälömallin avulla. Lisäksi useamman lähtömuuttujan vaikutusta voisi tarkastella luottamusvälien avulla.

## Lähteet

- Adams, Robert A. (2003). *Calculus: A Complete Course*. 5. painos. Addison-Wesley. ISBN: 0-201-79131-5.
- Dekking, F. M. (2005). *A Modern Introduction to Probability and Statistics*. 1. painos. Springer-Verlag London. ISBN: 1-85233-896-2.
- Kaisare, Niket S. (2017). *Computational Techniques for Process Simulation and Analysis Using MATLAB*. CRC Press. ISBN: 1498762123.
- ode45 (2006). *The MathWorks*. [viitattu: 04.07.2021]. URL: <https://se.mathworks.com/help/matlab/ref/ode45.html>.
- Zill, Dennis G. (maaliskuu 2012). *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications*. Cengage Learning. ISBN: 978-1-285-40110-2.