MAAPERÄN MALLINNUSMENETELMÄT

Soil modeling methods

Lappeenrannan–Lahden teknillinen yliopisto LUT

Konetekniikan kandidaatintyö

2022

Aki Pietarinen

Tarkastaja: Tutkijaopettaja, TkT Marko Matikainen

TIIVISTELMÄ

Lappeenrannan–Lahden teknillinen yliopisto LUT

LUT Energiajärjestelmät

Konetekniikka

Aki Pietarinen

Maaperän mallinnusmenetelmät

Konetekniikan kandidaatintyö

2022

37 sivua, 2 kuvaa ja 1 liitettä

Tarkastaja: Tutkijaopettaja, TkT Marko Matikainen

Avainsanat: Maaperä, mallinnus, FEM, DEM, partikkelimekaniikka

Tämä työ on toteutettu kirjallisuuskatsauksena, jossa on esitelty maaperän mallinnusta. Käsiteltyjä menetelmiä ovat diskreetti elementtimenetelmä, elementtimenetelmä, partikkelimekaniikka ja hybridimenetelmä. Menetelmiä käsitellään kevyesti historian ja teorian osilta pääpainon ollessa sovelluskohteet. Työssä annetaan esimerkkejä yleisistä parametreistä ja mittauksesta. Vertailua tehdään menetelmien välillä, mutta hybridimenetelmän osalta vertailu keskittyy menetelmän sisäiseen sovellukseen.

Tulokset osoittavat elementtimenetelmän olevan yleisin käytetty menetelmä ja se toimii hyvin tilanteisiin missä maa käyttäytyy homogeenisenä aineena, eikä suuria muodonmuutoksia tapahdu. Diskreetti elementtimenetelmä soveltuu parhaiten mallintamaan radikaaleja muodonmuutoksia, murtuman jälkeistä käyttäytymistä ja isoja raekokoja. Diskreetti elementtimenetelmä vaatii kuitenkin isommissa tilanteissa erittäin paljon laskentatehoa, eikä sovellu ongelmiin, joissa mallin raja-arvoja halutaan määrittää. Partikkelimekaniikka on käsitellyistä menetelmistä kapein sovelluskohteiltaan, joita ovat leikkauskriittisien kohtien mallintaminen ja halkeamat. Hybridimenetelmä soveltuu maanperän käytöksen reaaliaikaiseen simuloimiseen fysiikkamoottoreita hyödyntäen. Mallit eivät sovellu lähes koskaan suoraan haluttuun maaperään, vaan ne vaativat kalibrointia.

ABSTRACT

Lappeenranta–Lahti University of Technology LUT

School of Energy Systems

Mechanical Engineering

Aki Pietarinen

Soil modeling methods

Bachelor's thesis

2022

37 pages, 2 figures and 1 appendix

Examiner: Associate professor, D.Sc. (Tech.) Marko Matikainen

Keywords: Soil, modeling, FEM, DEM, Particle mechanics

This work has been carried out as a literature review, which presents soil modelling. The processed methods include the discrete element method, element method, particle mechanics and hybrid method. The methods are treated lightly from the parts of history and theory, with the main focus being the applications. Examples of general parameters and measurements are given in the work. Comparisons are made between methods, but for the hybrid method, the comparison focuses on the internal application of the method.

The results show that the element method is the most common method used and works well for situations where the soil behaves as a homogeneous substance, and there are no radical deformations. The discrete element method is best suited for modelling radical deformations, post-failure behaviour and large grain sizes. However, the discrete element method requires a great deal of computing power in larger situations and is not suitable for problems where you want to solve threshold values. Particle mechanics are the narrowest of the methods discussed best suited for modelling shear bands of cutting-critical points and cracking. The hybrid method is suitable for real-time simulation of soil behaviour using physics engines. Models are almost never suitable directly for the desired soil but require calibration.

KIITOKSET

Haluan kiittää työn ideasta ja työssä ohjaamisessa Marko Matikaista. Perhettä ja ystäviä kiitän tuesta ja auttamisesta jaksamaan stressin täyteisillä hetkillä. Avopuolisoani haluan kiittää tuesta työn aikana, kiireen keskellä kodin ylläpidossa avustamisessa ja työn ulkoasun kanssa avustamisesta. Kiitokset vielä myös konetekniikan koulutusohjelman opettajille ja erityisesti kandikurssin vetäjille.

SYMBOLI- JA LYHENNELUETTELO

Roomalaiset

$\boldsymbol{f}$	tasapainottava voimavektori	[N]
$\boldsymbol{q}$	voimavektori	[N]
U	jännitys	[Pa]
V	jännitys	[Pa]
V	tilavuus	[m^3]

Kreikkalaiset

ψ	dillaatiokulma	[°]
φ	leikkauskestävyyskulma	[°]

Vakiot

c	koheesio

Dimensiottomat luvut

e	tyhjien osien suhde
K	jäykkyysmatriisi
U	paikan erojen normaali ja tangenttikomponentti
Ú	nopeuden normaali ja tangenttikomponentti
u	venymä
u	solmusiirtymien vektori
v	venymä

Alaindeksit

abn	pisteiden a ja b erojen normaali
abt	pisteiden a ja b tangenttikomponentti
n	normaali
t	tangentti
T	total
S	solid
V	tyhjä

1	solmun järjestysnumero
2	solmun järjestysnumero
3	solmun järjestysnumero

Yläindeksit

d	vaimennus
s	jäykkyys
1	elementin järjestysnumero

Lyhenteet

ALE	arbitrary Lagrangian-Eulerian method
CEL	coupled Eulerian Lagrangian method
DEM	discrete element method
GPD	general particle dynamics
FEM	finite element method
SNIP	source normalized impact per paper
SJR	journal rank indicator
SPH	smoothed particle hydrodynamics

Sisällysluettelo

Tiivistelmä

Abstract

Sisällysluettelo

1 Johdanto 8
1.1 Työn tausta ja ongelma 8
1.2 Tavoitteet 9
1.3 Tutkimus metodit ja rajaukset 9
2 Mallinnusmenetelmien teoria 11
2.1 Katsauksessa käsiteltävät menetelmät 11
2.1.1 Diskreetti elementtimenetelmä 11
2.1.2 Partikkelimekaniikka 14
2.1.3 Elementtimenetelmä 15
2.1.4 Hybridimenetelmä 19
2.2 Muita menetelmiä 21
2.3 Soveltuvuus 21
2.4 Menetelmiin tarvittava data ja mittaus 23
3 Tulosten analyysi 25
3.1 Vertailu 25
3.2 Avaintulokset 26
3.3 Reliabiliteetti ja validiteetti 27
4 Pohdinta 28
5 Yhteenveto 30
Lähteet 31

Liitteet

Liite 1. SNIP ja SJR vertailu työssä käytetyille lähteille

1 Johdanto

Johdannossa käsitellään lyhyesti kyseisen kandidaatintyön tarkoitus, sekä avataan taustoja ja määritellään rajaukset. Työn taustat kertovat, minkä takia työ tehty. Tarkoitus esittää mitä työssä käsitellään ja mihin ongelmaan sillä yritetään vastata. Rajaukset kertovat tarkemmin siitä, mitä tässä työssä käsitellään ja työn ulkopuolelle jäävät asiat.

1.1 Työn tausta ja ongelma

Tieto maaperien mallinnusmenetelmistä ja niiden soveltuvuudesta erilaisten maaperien mallinnukseen vaikuttaa merkittävästi tuotettujen mallien tarkkuuteen, maaperän käytöksen ennustettavuuteen ja tulosten sovellettavuuteen. Maaperämalleja tarvitaan monella eri alalla, kuten rakennusalalla, maataloudessa, maanjäristysten analysoinnissa ja renkaan ja maaperän välisen vuorovaikutuksen analysoinnissa. Maaperän ominaisuuksien määrittäminen ja mallintaminen, antaa tietoa maaperän muokattavuudesta ja muokkauksen vaikutuksista maaperään. Tietyt ominaisuudet, kuten kosteus ja lujuus vaikuttavat teknisiin ratkaisuihin, joita kyseiselle alueelle voidaan tehdä (Coloma et al. 2016, 3–4; Gray et al. 2013)

Hyvillä malleilla voidaan arvioida kustannuksia, joita maan muokkauksesta tai maaperän vaikutuksista koituu sitä hyödyntäville ihmisille. Malleilla voidaan arvioida ja ennustaa ympäristövaikutuksia ja muokkaustoimien kuluttavuutta tulevaisuutta varten. Maaperämallien valinnassa on tärkeää tietää, kuinka tarvittavat tutkimukset käytännössä toteutetaan ja miten mallin muodostaminen tapahtuu. Ymmärtämällä miten malli muodostetaan laskennallisesti ja datasta asetettujen parametrien vaikutukset tuloksiin, osataan valita tilannekohtaisesti paras malli, niin taloudellisesta, kuin toiminnallisesta näkökulmasta. (Coloma et al. 2016, 3–4)

Eri mallinnusmenetelmistä on saatavilla hyvin tietoa, mutta koottua katsausta yleisimmin käytetyistä menetelmistä on hankala löytää. Kootun katsauksen tuottaminen on yksi tämän kandidaatin työn tarkoituksista.

1.2 Tavoitteet

Tämän työn tavoitteina on esitellä yleisesti käytettyjä mallinnusmenetelmiä ja tarjota lukijalle niiden teoreettinen pohja. Työ pyrkii määrittämään eri menetelmien soveltuvuuskohteet, sekä vertailee menetelmiä. Työssä esitetään menetelmiin tarvittava data ja esimerkkejä mittauksesta. Työn ulkopuolelle jäävistä menetelmistä annetaan lyhyt kuvaus.

Erilaisten menetelmien käsittelyn tavoitteena on antaa lukijalle hyvät pohjatiedot eri menetelmistä ja mahdollisesti avustaa valitsemaan omaan tilanteeseen parhaiten soveltuvan menetelmän. Menetelmien heikkoudet ja kompastuskivet tuodaan esille ja ehdotetaan tapoja niiden välttämiseen.

1.3 Tutkimus metodit ja rajaukset

Tutkimus toteutetaan etsimällä tietoa eri menetelmistä ja kokoamalla ne hyvin jäsennetyksi kokonaisuudeksi, jossa kuvaillaan tarvittavat asiat alusta loppuun. Tiedonhaku toteutetaan tutkimalla internettiin tai kirjallisuuteen julkaistuja artikkeleita ja teoksia usealla eri kielellä. Tietoa haetaan myös alan ihmisiltä ja heidän ehdottamistansa teoksista. Lähteiden tarkastelussa ja arvioimisessa käytetään triangulaarista menetelmää siten, että saatu tieto varmistetaan internetin, kirjallisuuden ja alan ammattilaisen toimesta.

Tutkimus rajataan viiteen yleisesti käytettyyn menetelmään ja muita menetelmiä esitellään lyhyesti joko nimeltä mainiten tai lyhyen kuvauksen kanssa. Menetelmien soveltuvuus rajataan enintään kolmeen parhaiten käypään esimerkkiin ja maaperäkohtainen vertailu suoritetaan parametrien pohjalta eniten totuutta kuvailevan kohteen osalta. Elementtimenetelmän

tapauksessa tarkkuutta voidaan parantaa näytetiheyden ja elementtiverkon tihentämisellä erittäin paljon johtuen vaadittavasta laskentatehosta, joten se toimii vertailun ylärajana.

2 Mallinnusmenetelmien teoria

Seuraavissa kappaleissa käsitellään yleisesti käytettyjen maaperien mallinnusmenetelmien teoria ja käydään läpi menetelmissä käytetyt kaavat. Muita kuin tässä työssä käsiteltäviä menetelmiä kuvaillaan lyhyesti. Käsittelen myös menetelmien hyödyntämiseen tarvittavan datan ja esimerkkejä mittauksesta. Teoria osion luotettavuustarkastelussa keskitytään menetelmien yleisimpiin kompastuskiviin ja menetelmien heikkoihin kohtiin.

2.1 Katsauksessa käsiteltävät menetelmät

Tässä katsauksessa käsitellään laajemmin viittä maaperän mallinnus menetelmää ja muutamia sivutaan lyhyesti. Laajasti käsiteltyjä menetelmiä ovat diskreetti elementti menetelmä (DEM), partikkelimekaniikkaan pohjautuva malli, monikappale dynamiikkaan perustava malli, elementtimenetelmä eli finite element method (FEM) ja hybridimenetelmä. Muita taustatutkimuksissa esille tulleita menetelmiä käsitellään hyvin pintapuolisesti tai ei ollenkaan.

2.1.1 Diskreetti elementtimenetelmä

Diskreetti elementtimenetelmä hyödyntää sarjaa matemaattisia yhtälöitä, jotka kuvaavat kaksi- tai kolmiulotteisien kappaleiden mekaanista käyttäytymistä ja kanssakäymistä. Alun perin Cundallin ja Strackin 1979 kehittelemä menetelmä rakennettiin analysoimaan maaperän käyttäytymistä kaksiulotteisina ympyröinä. (Mishra ja Rajamani 1992, 598–589) Menetelmää on hyödynnetty tieteen monilla eri osa-alueilla kuten maataloudessa, jauhemetallurgiassa lääketieteissä ja erityisesti rakeisten aineiden prosessien simuloimisessa (Marigo et al. 2015).

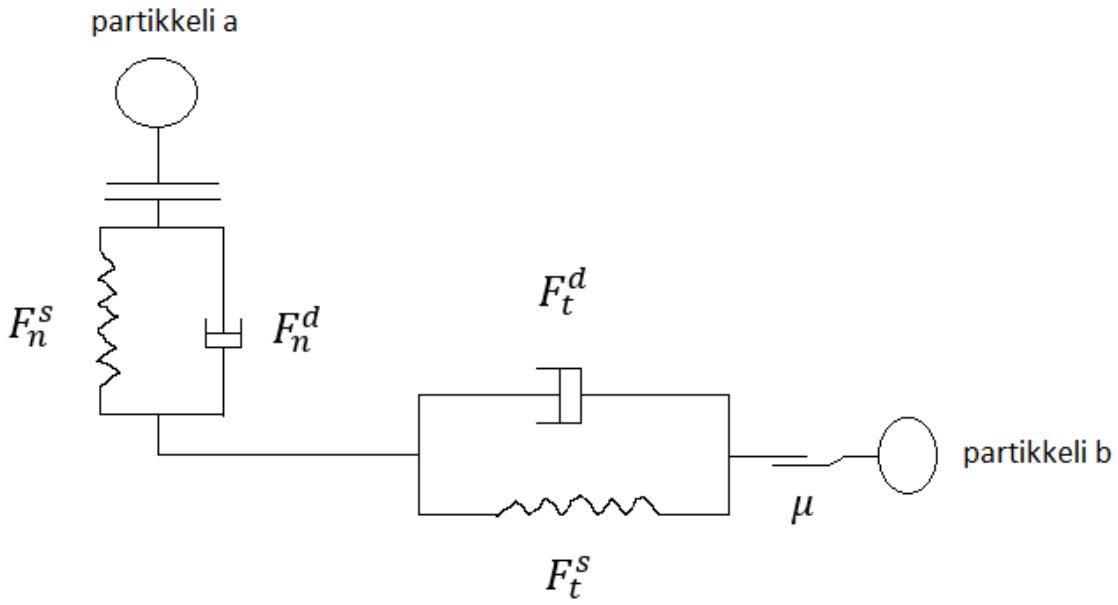
DEM-menetelmässä tutkittava kohde jaetaan tiettyyn määrään partikkeleita. Yleensä partikkelit ovat kaksiulotteisissa tapauksissa pyöreitä ja kolmiulotteisissa tapauksissa

sylinterimäisiä, vaikka muunkin muotoisia partikkeleita on mahdollista käyttää. Partikkeleiden muoto on yleensä ympyrä tai sylinteri laskennan helpottamiseksi. Partikkeleiden välistä vuorovaikutusta kuvataan kontaktimalleilla, jotka toimivat fysiikan lakien mukaan. Jokaisella ajan hetkellä tiedetään partikkeliin vaikuttavat voimat, sen orientaatio ja paikka. DEM-menetelmässä oletetaan, että tietyllä ajan hetkellä, jolloin yksi laskentakierros suoritetaan, partikkeli vaikuttaa vain itsensä viereisiin partikkeleihin. Näiden ajanhetkien välillä partikkelin nopeuden ja kiihtyvyyden oletetaan olevan vakioita, kunnes lasketaan uusi kierros ja vuorovaikutus tapahtuu. Laskentasykliä toistetaan, kunnes päädytään tasapainoiseen tilanteeseen tai valittu simulaation aika loppuu. (Fielke et al. 2014.)

DEM kuvaa partikkelien kontaktien vaikutusta partikkelien paikkaan ja orientaatioon. Tarkan mallin luomiseksi on siis valittava parhaiten partikkelien vuorovaikutusta kuvaava kontaktimalli ja mallin parametrit on säädettävä kuvaamaan todellisen materiaalin käyttäytymistä. (Marigo et al. 2015.) Alun perin DEM on kehitetty koheesiottomalle materiaalille, mutta nykyään kontaktimallit voidaan jakaa kolmeen ryhmään: koheesiottomaan, koheelliseen tai sitoutuneeseen kontaktimalliin. Koheesiottomassa mallissa partikkelien ajatellaan siirtävän voimia pelkästään suorassa kosketuksessa ja laskennassa hyödynnetään vaimennetun liikkeen kaavoja. Koheellisessa mallissa usein ajatellaan lähekkäin olevien partikkelien välillä vaikuttavan jonkin lainen adheesio voima, kuten Van der Waalsin voima tai nestesilta. Koheellisessa mallissa siis partikkelit vaikuttavat lähellä oleviin partikkeleihin, vaikka ne eivät olisi suorassa kosketuksessa ja uusia yhteyksiä voi muodostua. Sitoutuneessa kontaktimallissa partikkelien välistä vuorovaikutusta kuvataan partikkelien välisillä sidoksilla, jotka muodostuvat sidoksen alustusajanhetkellä simulaatiossa ja sidoksen rikkoutuminen on peruttamatonta. Sidoksiin pohjautuva malli pystyy yleensä kuvaamaan taivutus- ja kiertymisvastusta partikkelien välillä. Sidokset kuvaavat yhdistyneitä partikkeleita materiaalina arvioidakseen massan käyttäytymistä ja sidosten särkyminen palautumatonta halkeamista. (Chen et al. 2021.)

DEM-simulaation koheesiottoman kontaktimallin yksinkertaisena esimerkkinä voidaan pitää Cundallin ja Strackin 1971 perustuvaa lineaarista jousikontaktimallia, joka käsittelee ympyrämäisiä kappaleita tasokoordinaatistossa. Lineaarisessa jousikontaktimallissa otetaan

huomioon vain kitkalliset lineaariselastiset kontaktit ja vakioina määritetään jäykkyyden ja vaimennuksen kertoimet kullekin materiaalille. Kuvassa 1 on esitetty tällaisen kontaktimallin kahden partikkelin vuorovaikutusta. (Di Maio ja Di Renzo 2004, 526–527) Simulaatiossa havaitaan ensimmäiseksi kontaktissa olevat partikkelit, niiden suhteellisten paikan erojen normaali (U_{abn}) ja tangenttikomponentit (U_{abt}). Myös partikkeleiden välinen suhteellinen nopeus merkitään normaali ja tangentti komponentteina ($\acute{U}_{abn}$ ja $\acute{U}_{abt}$). Nämä lasketaan partikkelien väliseen kontaktiin niiden annetuilla ajan hetkinä. (Ucgul et al. 2014,107)



Kuva 1. Jousikontaktimalli mekaanisena mallina (Tanaka et al. 2000)

Kontaktivoimien komponentit (F_n^s ja F_t^s) normaalin ja tangentin suuntaan lasketaan tarkoitusta vastaavan kontaktilain mukaan ja materiaalin viskoosisuuden aiheuttamaa energian absorptiota kuvataan niin ikään vaimentavilla komponenteilla (F_n^dja F_t^d) kummassakin suunnassa. (Ucgul et al. 2014,107)

Kontaktivoimat määritellään jäykkyyden ja suhteellisen siirtymän funktioina (K_n ja K_t) normaalin ja tangentin suunnissa ja vaimentava voima on määritettävissä vaimennusvakion ja suhteellisen nopeuden funktiona Rajin (1999) mukaan. Ucgul et al. (2014,107) artikkelissa

"*Three-dimensional discrete element modelling of tillage: Determination of a suitable contact model and parameters for a cohesionless soil*" esitellään jousikontaktimallin laskentaa tarkemmin.

DEM- mallin kalibroiminen on iso osa toimivan mallin rakentamista. Mallin kalibrointi tarkoittaa usein kontaktiin vaikuttavien parametrien kuten kimmomoduulin tai koheesio kertoimen säätämistä. Ensin on kuitenkin joitakin arvoja materiaaleille valittava. Näitä on yleensä partikkelin säde ja kitkan tai vierimiskitkan arvot. Testausta valituilla arvoilla voi tietenkin tiedon puutteessa tehdä jollakin alueella, kuten 20 % maksimiarvosta. Koheesiokerroin tai vaimennus vaikuttaa mallin käyttäytymiseen paljon, koska tarkastellaan partikkelien välistä kanssakäymistä ja onkin yksi tarkkaan säädettävistä arvoista. (Balling et al. 2022, 1–2)

2.1.2 Partikkelimekaniikka

Partikkelimekaniikan osalta tässä työssä keskitytään kahteen menetelmään. Ensimmäinen on ”Smoothed particle hydrodynamics” eli lyhenteenä SPH ja toinen on yleinen partikkelidynamiikkakoodi, jonka lyhenne GPD tuleen englannista ”General particle dynamics code”. Molemmat ovat perustuvat Langrangen työhön ja SPHn juuret juontaakin astrofysiikkaan missä sitä on ensiksi hyödynnetty Lucyn (1977) kuten myös Gingoldin ja Monaghanin (1977) toimesta. GPD perustuukin SPH:hon ja ohittaa joitakin ongelmia mitä SPH:ssa esiintyy. (Monaghan 1992; López et al. 2012; Bi et al. 2019,1)

SPH:ssa alue erotellaan kokoelmaan partikkeleita, jotka toimivat myös interpolaatiopisteinä. Partikkeleilla on itsenäiset materiaaliominaisuudet ja tasoitusetäisyys (h). Partikkelit vaikuttavat toisiin partikkeleihin joko tasoitusetäisyyden tai ytimen funktioihin perustuen. Jokaisella partikkelilla on massa ja tiheys, joista voidaan laskea tilavuus. Tasoitusetäisyys (h) kuvastaa tuentaa ytimen ympärillä. Liun (2010) teoksessa ”Smoothed particle hydrodynamics: a meshfree particle method.” on kuvattu menetelmän teoriaa, etuja ja numeerista puolta hyvin kattavasti. (López et al. 2012.)

Partikkeleiden tasoitusetäisyyttä pienentämällä voidaan parantaa simulaation tarkkuutta, mutta kasvattaa laskentaan vaadittavaa tehoa. On mahdollista pienentää tasoitusetäisyyttä paikallisesti kahdella tavalla ja hienontaa mallia pienempiin osiin, mutta tämä vaatii symmetrisoimista eri tasoitusetäisyyden omaavien partikkelien välillä. Ensimmäinen tapa on staattinen. Staattisessa tavassa partikkelien määrää kasvatetaan ja kokoa pienennetään paikallisesti ennen simulaatiota halutuissa tai lisätarkkuutta vaativissa kohdissa. Toinen tapa on lisätä tarkkuutta dynaamisesti simulaation aikana. Feldman ja Bonet (2007) kehitti menetelmän jakaa partikkeli pienempiin tytärpartikkeleihin tietylle geometriselle alueelle säilyttääkseen tasapainoehdot. Tarkemmin dynaamisesta lähestymisestä tarkentamiseen tutustutaan Lópezin et al. (2011) teoksessa ” Particle refinement for fluid flow simulations with SPH”. (López et al. 2012.)

Lopezin ja kollegoiden (2012) teos kuvaa maaperän mallinnuksen osalta koheesiottoman maan käyttäytymistä rakenteen murtumisen jälkeen rinteessä. Yleisen partikkelidynamiikkakoodin (GPD), jota on kuvattu tarkemmin Zhoun et al. (2015) teoksessa ” Numerical simulation of crack growth and coalescence in rock-like materials containing multiple pre-existing flaws.”, tapauksessa on mahdollista jakaa mallin käyttäytymistä. Zang et al. (2019) on lisännyt rinteen murtumisen ja käyttäytymisen mallintamiseen Drucker-Pragerin myötöehdon kuvaamaan muodonmuutoksia ja elastisplastista käyttäytymistä. Myötöehtoa on hyödynnetty tunnistamaan maaperän plastiset alueet. Maaperälle on tässä menetelmässä määritettävä ennen laskentaa parametrit koheesiokerroin, kimmomoduuli ja kitkakulma. (Bi et al. 2019, 1–3)

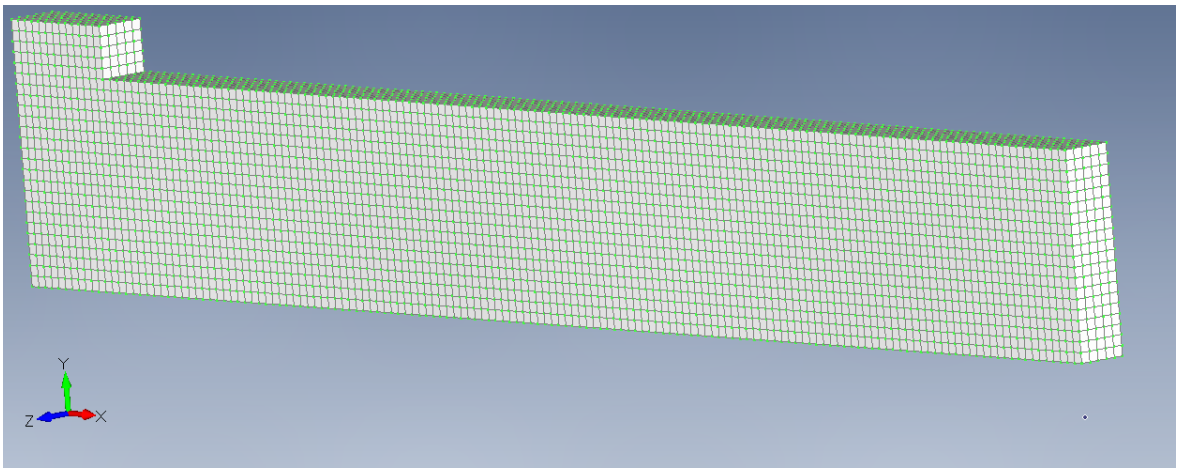
2.1.3 Elementtimenetelmä

Elementtimenetelmä eli ”Finite element method” on analyysimenetelmä, jota on hyödynnetty moniin ongelmiin kivi- ja maaperämekaniikan alalla. Elementtimenetelmä on systemaattinen numeerinen menetelmä, jonka kehitys kiihtyi nopeiden tietokoneiden yleistyessä. Menetelmällä on monia etuja, joihin lukeutuu kyky käsitellä monimutkaisia realistisia muotoja, muuttuvia materiaaliarvoja, rajapintoja muuttuvilla raja-arvoilla, lineaarisia tai epälineaarisia ominaisuuksia ja viskositeettia. Kaikenlaisten muutosten ja erilaisten muotojen huomioiminen tekeekin menetelmästä erinomaisen arvioimaan maaperän käyttäytymistä. Elementtimenetelmällä voidaan arvioida myös maaperän monia muita mielenkiintoisia

ominaisuuksia kuten, lämmön johtumista, maaperän pakkautumista tai erilaisten aineiden kulkeutumista ja suodattumista maaperässä. (Radhakrishnan 1977, 95–96)

Hrenikoff esitteli 1941 menetelmän nimeltä ”framework method” jossa tasaista elastista ainetta kuvattiin erilaisin laatikoin ja palkein. Tämän jälkeen vuonna 1943 Courant käytti komiomaisia elementtejä ja jatkuvia laskelmia arvioimaan tuntematonta funktiota. Ensimmäiset viralliset esitykset elementtimenetelmästä on ajateltu olevan Argyriksen and Kelseyn julkaisema ” Energy Theorems and Structural Analysis” ja M. J. Turnerin ryhmän julkaisema “Stiffness and deflection analysis of complex structures,” 1956. R.W. Clough käytti ensimmäistä kertaa nimeä ”Finite element method” vuonna 1960. (Reddy 2019, 25)

Elementtimenetelmässä isompi kappale jaetaan pienempiin osakappaleisiin ja tästä muodostuu elementtiverkko. Jokaisen osakappaleen kohdalla sovelletaan valittuja yhtälöitä riippuen siitä mitä halutaan arvioida ja osakappaleen arvot sitten periytyvät jokaiseen viereisen kappaleen rajapintaan ja tämän perusteella lasketaan seuraavan osakappaleen arvot. Jakamalla iso kokonaisuus pienempiin paljon yksikertaisempiin paloihin voidaan arvioida mahdottomalta yhtälöltä tuntuvaa kokonaisuutta. Iso kokonaisuus jaetaan tietysti sellaisiin paloihin, joiden yhtälöiden ratkaisujen pohjalta voidaan laskea aina seuraavan palan arvot ja lopulta tulee kokonaisen kappaleen arvot määriteltyä ja kappaletta voidaan tarkastella mistä kohtaa tahansa. Kun kappale on jaoteltu elementteihin niin niille soluille voidaan suorittaa kaikkia haluttuja jatkuvuusluontoisia yhtälöitä, joka mahdollistaa monien erilaisten ominaisuuksien arvioimisen. Elementti verkon eri elementit voivat olla eri muotoisia, kunhan käytetyt yhtälöt soveltuvat jokaisen elementin itsenäiseen ratkaisuun ja viereisen elementin arvot voidaan määrittää rajapinnan arvoilla. Jokainen elementti on kiinni toisessa pisteillä, joita kutsutaan solmuiksi. Mainittavana ominaisuutena myös arvioiden virhettä voidaan tarkastella elementti kerrallaan ja virhe voidaan summata kokonaiselle kappaleelle. (Reddy 2019, 13–16) Kuvassa 2 on esitetty kolmiulotteinen kappale, joka on jaettu elementteihin hyödyntäen ”Simcenter Femap with Nastran” ohjelmistoa.



Kuva 2. Esimerkki kuva finite element menetelmästä verkotuksesta ja solmuista.

Menetelmässä ensimmäiseksi valitaan kappale, jota halutaan tarkastella ja määritetään sen dimensiot. Kappaleelle määritetään reunaehdot, joita kappaleen käytös noudattaa, kuten mistä kohtaa se on jäykästi kiinnitetty, jotta tasapainoehdot täyttyvät. Kappaleen ominaisuudet määritetään, kuten myös kappaleeseen vaikuttavat voimat, esimerkiksi painovoima, ulkoinen kuorma tai muut simuloitavat vaikutukset, kuten lämpö. Kappale jaetaan käytettyjä yhtälöitä tasapainoisesti tyydyttäviin elementteihin ja määritetään solmupisteet, joilla elementit yhdistyvät. Jokaisen elementin ominaisuudet oletetaan tiedettävän tarkasti erillisten kokeiden tai laskelmien perusteella. Jokaiseen solmuun vaikuttavat tekijät määritetään itsenäisesti elementin jännitysten ja kuormien aiheuttaman solmujen suhteellisen siirtymän avulla laskennallisesti. Esimerkiksi kaksiulotteisen lineaariselastisen elementin tapauksessa elementissä 1, jossa tarkastellaan voimia ja siirtymiä kolmessa solmussa. Solmujen arvot sijoitetaan matriisiin. (Taylor et al. 2005, 1–4)

$$q^1 = \begin{Bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \\ q_3^1 \end{Bmatrix} \quad q_1^1 = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \end{Bmatrix}, \ jne. \tag{1}$$

jossa q on voimat, q:n yläindeksi elementin järjestys numero ja alaindeksi solmun järjestysnumero, U ja V jännitykset koordinaatistossa x ja y suuntiin solmun numero alaindeksillä merkittynä.

$$\mathbf{u}^1 = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^1 \\ \mathbf{u}_2^1 \\ \mathbf{u}_3^1 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{u}_1^1 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}, jne. \tag{2}$$

jossa **u** on siirtymä, **u**:n yläindeksi elementin järjestys numero ja alaindeksi solmun järjestysnumero, *u* ja *v* venymä koordinaatistossa x ja y suuntiin solmun numero alaindeksillä merkittynä.

$$\mathbf{q}^1 = \mathbf{K}^1\mathbf{u}^1 + \mathbf{f}^1 \tag{3}$$

jossa q on voimavektori, K on jäykkyysmatriisi, u on siirtymävektori ja f on tasapainottava voimavektori.

Voiman ja siirtymän matriiseista kaavoista 1 ja 2 jokaiselle elementille ja jäykkyyden suhteesta kaavalla 3 rakennettaisiin seuraavaksi jäykkyyden matriisit jokaiselle elementille ja niistä vastaaville järjestysnumeroille kappaleen globaali jäykkyysmatriisi. Tämän avulla voitaisiin selvittää voimat, siirtymät ja jännitykset kappaleen eri elementeissä, kun tiedetään että kappaleen on oltava tasapainossa. (Taylor et al. 2005, 4–5)

Kuten edellä mainittu FEM- menetelmässä on tiedettävä elementin käyttäytymiseen tarvittavia arvoja, jotta menetelmällä pystytään arvioimaan käyttäytymistä numeerisesti. Ennen laskennan aloittamista ominaisuuksia pystytään arvioimaan erilaisten käyttäytymismallien avulla. Popa ja Batali (2010) Esittävät teoksessaan" Using Finite Element Method in geotechnical design. Soil constitutive law sand calibration of the parameters. Retaining wall case study" kolme erilaista mallia ja niiden kalibrointia. (Batali ja Popa 2010, 177)

Mohr-Coloumbin mallilla, jolla pystytään laboratorio kokeiden avulla arvioimaan kimmokerrointa, Poissonin vakiota ja plastisia parametrejä, kuten koheesiota (c), dillaatiokulmaa (Ψ) ja leikkauskestävyyskulmaa (φ). Novan (1982) malli on epälineaarinen elastiskovettumis plastinen kriteeri isotrooppisille materiaaleille aksiaalisessa puristuksessa ja sen

poistossa, Cam-clay mallin (1993) inspiroimana Batalin ja Popan (2010) tapauksessa hiekalle sovellettuna. Novan mallin avulla on mahdolllista arvioida lineariselastista käytöstä kuormituksen sykleissä usealla parametrillä, joihin lukeutuu, laajenemista, murtumista ja venymistä/puristumista usealla parametrillä. Vermeerin malli (1982) käsittelee myös aksiaalisen kuormituksen sykliä ja perustuu Hooken elastisuuteen ottaen huomioon Youngin elastisuuden riippuen rasituksen vaiheesta ilman Poissonin suhdetta. Parametrit Vermeerin mallissa kuvaavat elastisuutta, kitkakulmaa ennen murtumista ja laajentumista. (Batali ja Popa 2010, 178–184)

Maaperän monimutkaisen rakenteen vuoksi on hankalaa määrittää ominaisuuksia tarkasti normaaleissa laboratorio-olosuhteissa ja kalibrointia tarvitaan, niin ominaisuuksien määrittämisen yhteydessä, kuin myös FEM-laskentaan siirtyessä. FEM-mallin muodostaessa on myös hyvä suorittaa kalibrointia testattuihin arvoihin verraten, jotta päästäisiin mahdollisimman lähelle oikeaa tilannetta kuvaavaa lopputulosta. (Batali ja Popa 2010, 185)

2.1.4 Hybridimenetelmä

Maaperän monimutkaisuuden vuoksi reaaliaikaisten muodonmuutosten simuloiminen ja mallintaminen on hankalaa. Maaperän käyttäytyminen vaihtelee pakkautumisen ja siihen kohdistuvien muokkaavien toimenpiteiden johdosta, joten on tarpeellista pystyä simuloimaan maan käyttäytymistä jatkuvasti. Hybridimenetelmä, jossa maaperän käyttäytyminen jaetaan molempiin puoliin, murtumisen jälkeisten partikkelien liikkeiden arvioimiseen ja maa-aineksen pakkautumiseen staattiseksi aineeksi pyrkii arvioimaan maan luontaista käyttäytymistä monimuotoisissa tilanteissa. Beer et al. esittää julkaisussaan” Soil Deformation Models for Real-Time Simulation: A Hybrid Approach” mallin missä maaperän käyttäytymistä arvioidaan staattisesti pilareina tasapainoisessa tilassa Sumner et al. (1999) mukaan ja muodonmuutosten tapahtuessa dynaamista liikettä arvioidaan DEM-perusteisella käyttäytymismallilla, kunnes tasapainotila on saavutettu. (Beer et al. 2009, 21–24)

Kyseisessä menetelmässä maaperän tilavuutta määritellään sen kiinteiden osien, kuten hiekan ja kivien mukaan, mutta myös ”tyhjien” osien mukaan summaamalla nämä yhteen. Nämä niin kutsutut tyhjät osat muodostuvat vedestä ja ilmasta, joten niiden huomiotta jättäminen vääristäisi kuvaa verrattuna todellisuuteen. Tyhjien osien ja kiinteiden osien suhteelle voidaankin asettaa arvo, joka kuvastaa maaperän pakkautumista, koska tyhjät osat on puristettu paineen johdosta muualle. (Beer et al. 2009, 22–23)

$$V_T = V_S + V_V \tag{4}$$

jossa V_T on kokonaistilavuus, V_S kiinteiden osien tilavuus ja V_V ”tyhjien” osien tilavuus.

$$e = \frac{V_V}{V_S} \tag{5}$$

jossa e on tyhjien osien suhde, V_S kiinteiden osien tilavuus ja V_V ”tyhjien” osien tilavuus.

Kaavassa 4 on esitetty kokonaistilavuuden laskentakaava ja kaavassa 5 tyhjien osien suhdetta kiinteisiin osiin, minkä perusteella on mahdollista arvioida maan pakkautumista. Pienempi suhdeluku e tarkoittaa siis tiukempaan pakkautunutta maata ja korkeampi väljempää. Mohr-Coloumbin ehdon mukaan tästä voidaan jatkaa leikkauskestävyyden ja -jännityksen arvioihin. Näillä arvoilla taas on mahdollista selvittää millä kitkakulman, koheesion ja jännityksen arvoilla maaperästä tulee epästabiili, kullakin rinteen kulmalla. Das (1983) kuvailee tarkemmin pakkautumisen ja jännitysten yhteyttä. Menetelmän kannalta tärkeä käytöksen muuttumisen piste on siis määritettävissä ja siihen aikaisemmin mainitut parametrit selvitettävissä. (Beer et al. 2009, 23–24)

Kun voidaan arvioida missä tilanteessa maaperän käyttäytyminen on staattista tai dynaamista. Pystytään muodostamaan suhteellisen isosta alueesta dynaamisesti käyttäytyvä malli, missä itsenäisesti käyttäytyvien partikkelien määrä pysyy pienenä staattisiiksi pilareiksi

muutetun tiedon ansioista. Tällainen malli vähentää merkittävästi tarvittavaa laskentatehoa säilyttäen hyväksyttävän tarkkuuden ja samalla mahdollistaen reaaliaikaisen simuloinnin. (Beer et al. 2009, 29–30)

Tarkemman kuvauksen partikkelien käyttäytymisestä, muodostamisesta ja niiden muokkaamisesta staattisiksi pilareiksi löytyy Beer et al. (2009) julkaisusta. Julkaisussa annetaan myös esimerkki Newtonin lakeihin perustuvan fysiikka moottorin käyttämisestä ja mallin visualisoimisesta. Julkaisussa kerrotaan myös adaptiivisen maaperä otannan hyödyntämisestä laskentatehon pienentämiseksi ja eroosion vaikutuksista mallin toimintaan.

2.2 Muita menetelmiä

Muita menetelmiä, joita tässä työssä ei käsitellä tarkemmin ovat esimerkiksi ”Finite difference method” ja ”Boundary element method” jatkuvuusmenetelmistä. Molemmat menetelmät perustuvat elementtimenetelmän tavoin käsiteltävän alueen pilkkomiseen yhtälöiden yksinkertaistamiseksi. Finite difference method on esimerkiksi erinomainen lämmönsiirtymisen arvioimiseen. (Gray et al. 2013, 20–22) Lisää elementtiverkkoon perustuvista menetelmistä ja niiden eroista voi lukea Zhang et al. (2013) teoksesta ” Comparative FEM and DEM modeling of basement-involved thrust structures, with application to Sheep Mountain, Greybull area, Wyoming”. Partikkelimekaniikan puolelta on kehitetty erilaisia DEM-algoritmeja kuvamaan maapartikkelien käyttäytymistä plastisesti ja elastisesti. Gray et al (2013) julkaisusta “Overview of continuum and particle methods for mechanical modeling of contractional structures” löytyy useita tapoja arvioida maaperän partikkelimaista käytöstä.

2.3 Soveltuvuus

DEM oli alun perin kehitetty koheesiottomien rakeiden ryhmittymien tarkastelua varten, mutta uusilla kontaktimalleilla ja varsinkin sidotulla kontaktimallilla on mahdollista simuloida jopa tiheydeltään sementtimäisten aineiden käyttäytymistä (Balling et al. 2022, 1–2). DEM-mallia käytetään yleensä, kun halutaan ratkaista maan murtumisen jälkeisiä liikkeitä

(Gray et al.2013, 22–23). DEM soveltuu myös hyvin virtaavien rakeiden tai hyvin suurien muodonmuutosten mallintamiseen (Ucgul et al. 2017; Chen et al. 2018). Isojen raekokojen eli esimerkiksi kivien käytöstä on arvioitu DEM:llä (Lisjak ja Grasselli, 2014). Jännitysten tai siirtymien arvioiminen vaatii yleensä perusteellista kalibrointia syötettävien parametrien osalta, jotta malli soveltuu tarkasteltavan maaperän käytöksen arvioimiseen (Balling et al. 2022). Coetzeen (2016) avaa mallin kalibrointia tarkemmin julkaisussaan" Calibration of the discrete element method and the effect of particle shape".

Elementtimenetelmä on kaikkein yleisin jatkumoa hyödyntävistä menetelmistä ja se soveltuu integraatiokaavansa vuoksi suurimpaan joukkoon geologiasia ongelmia (Gray et al. 2013). Elementtimenetelmää on hyödynnetty useisiin maan pakkautumiseen ja jännitysten analysoimiseen renkaiden alla (Koolen et al 2003; Cueto et al., 2016). Griffiths ja Lane demonstroi jo vuonna 1999 useita esimerkkejä rinteiden vakauden analysoimiseen elementtimenetelmällä julkaisussa " Slope stability analysis by finite elements" ja tätä julkaisua on siteerattu useassa 2022 vuoden julkaisussa liittyen juuri rinteen vakauteen (Chaturvedi et al. 2022; Chakraborty ja Dey 2022; Chavda et al. 2022). Menetelmän heikkouteen kuuluu kuitenkin rinteen murtumisen jälkeisten tapahtumien kuvaaminen isossa mittakaavassa koska elementtiverkko voi vääristyä liikaa (Zhang et al. 2019, 1–2). FEM:n heikkouksiin elementtiverkon vääristymisen suhteen on kehitetty uudelleenverkottamis menetelmiä, kuten "arbitrary Lagrangian-Eulerian method" eli ALE tai "Coupled Eulerian-Lagrangian method" eli CEL, joiden toiminnasta lisää julkaisussa " Numerical modelling of large deformation problems in geotechnical engineering: A state-of-the-art review" (Augarde et al. 2021, 1719–1722)

Partikkeli dynamiikkaan perustuvat menetelmät ovat myös onnistuneesti mallintaneet maaperän käyttäytymistä omilla vahvuusalueillaan. Mallien luonteen vuoksi niillä on hankala kuvailla tarkkoja jännitys- tai venymävasteita, mutta ne omaavat luonteensa vuoksi kriittisten tilojen ja mekaanisten vasteiden käyttäytymisen arvioimiseen hyvät lähtökohdat. (Gray et al. 2013, 22–23) Partikkelimekaniikan on osoitettu soveltuvan sellaisiin tilanteisiin, jossa tapahtuu suuria muodonmuutoksia kuten rinteen murtumista, murtumisen jälkeistä virtausta

penkereen murtumista hydrostaattisen huokospaineen alaisena ja säröjen kasvamista tai yhdistymistä kivimäisissä aineksissa (Fukagawa ja Bui 2011; Zhang et al. 2019).

Hybridimenetelmä on siitä erilainen, että sitä on hyödynnetty simuloimaan maaperän muodonmuutoksia reaaliajassa (Berglund et al. 2021; Beer et al. 2009,30). Molemmissa tutkimuksissa on hyödynnetty fysiikkamoottoria simulaation luomiseksi. Vuoden 2009 (Beer et al.) tutkimuksesta, jossa käsiteltiin puskutraktorin aiheuttamia muodonmuutoksia, on edistytty verraten hyvinkin suuren alueen simuloimiseen, jota on demonstroitu Berglund et al. (2021) julkaisussa ” A multiscale model of terrain dynamics for real-time earthmoving simulation”.

2.4 Menetelmiin tarvittava data ja mittaus

Maaperät ovat heterogeenisiä materiaaleja ja niiden käyttäytymiseen vaikuttaa moni muuttuja. Näitä muuttujia voi olla raekoko, mineralogia, rakenne, huokosten vesipitoisuus alkuperäiset jännitykset ja monia muita. (Batali ja Popa 2010,177) Kolmiaksiaalinen puristustesti on yleisin laboratoriotesti, jolla määritetään rakeisen materiaalin mekaanisia ominaisuuksia (Hashanh al. 2013,92). Yksi jännitysten tarkastelun väline on ödometritesti, joka on eräänlainen puristuskoe. Ödometristä ja sillä saatavien tietojen käytöstä parametrien määrittämisen lisää Gomes et al. (2018) julkaisussa “Numerical modeling of soil compaction in a sugarcane crop using the finite element method” kappaleessa 2.2. Hazeltonin ja Murphyn (2007) kirjoittamassa kirjassa “Interpreting soil test results what do all the numbers mean?” ensimmäisessä kappaleessa on esitelty näytteiden ottamista ja eri menetelmiä siihen.

Kaikille tässä työssä käsitellyille menetelmille vaaditaan tiheyden, tilavuuden ja painon määritys käsiteltävälle maaperälle. Näihin vaikuttaa maaperän kosteus ja kiinteiden osien ominaisuudet kuten myös ilmavuus. Parametrejä, jotka on selvitettävä joko kokeellisesti tai valittava ja kalibroitava mallia rakentaessa on Poissonin suhde, liuku- ja/tai kimmomoduuli ja koheesiokerroin vähintään vaimennuksen muodossa. Selvitettäviä parametrejä partikkeliajattelussa on kitkan eri parametrit ja murtumiseen liittyvät kulmat missä maaperän käytös

muuttuu radikaalisti. Pakkautumista käsittelevissä malleissa, kuten FEM, DEM ja hybridi-menetelmä, tyhjien osien ja kiinteiden osien välinen suhde vaikuttaa tiheyteen ja jännitysten eri parametreihin. (Ucgul et al. 2014; Gomes et al. 2018 Zhang et al. 2019; Berglund et al. 2021)

3 Tulosten analyysi

Tämän työn tutkimuksia analysoidaan vertailemalla menetelmiä keskenään vaadittavan laskentatehon, eri tilanteisiin soveltuvuuden ja yleisen käyttöasteen kannalta. Vertailussa mainitaan, mutta ei verrata reaaliaikaisia hybridimenetelmiä muihin matalan tarkkuuden vuoksi. Hybridimenetelmän vertailu liittyy lähinnä sisäisesti kahden tutkimuksen eri lähtökohtiin ja simulaatiossa käytettyyn laitteistoon. Kappaleessa esitetään työn avaintulokset sekä tarkastellaan lähteiden luotettavuutta. Tuloksien hyödynnettävyyttä arvioidaan käytännön tasolla.

3.1 Vertailu

Kuten ylempänä mainittu, elementtimenetelmä on yleisin geotekniikassa käytetty menetelmä. Elementtimenetelmä tuottaa hyväksyttäviä tuloksia monissa maaperän mallinnukseen liittyvissä ongelmissa, kunhan solmujen siirtymät pysyvät määritellyn kappaleen rajoissa. Menetelmät kuten uudelleen verkotus on sopeuttanut elementtimenetelmää suurempien muodonmuutosten mallintamiseen.

Suuriin muodonmuutoksiin on hyödyllisempi käyttää epäjatkuvuus menetelmää kuten DEM, koska sen luonne itsessään tuo esille itsenäisesti käyttäytyviä partikkeleita vuorovaikutuksessa toisten kanssa. Vaikka tämä luonne sallii mallin rajattoman muovautumisen tuo se kuitenkin esille DEM:n suurimmat ongelmat verrattuna elementtimenetelmään. Realistisen tuloksen saavuttamiseen tarvitaan suhteellisen realistinen partikkelikoko tai partikkelien sulauttamista, joka kasvattaa itsenäisten partikkelien käyttäytymiseen suoritettavan laskennan määrää. Suurempien mallien tuottaminen kasvattaa tarvittavaa laskentatehoa elementtimenetelmään verrattuna kohtuuttomasti. Itsenäisen partikkelit tekevät myös mallin raja-arvoihin liittyvien ongelmien ja kohdistuvien voimien ratkaisemisesta lähes mahdotonta ison mallin tapauksessa.

SPH on vähän käytetty DEM:iin ja FEM:iin verrattuna, mutta se säilyttää suosiotaan tietynlaisissa tilanteissa. Verrattuna elementtimenetelmään se tarjoaa vankemman mallintamistavan korkean leikkauksen kohdille. Vaikkakin SPH:n laskennalliset vaatimukset ylittävät elementtimenetelmään vaadittavan laskentatehon keskisuuria muodonmuutoksia käsittelevissä ongelmissa, alkaa se olemaan kilpailullinen suurissa 3D tapauksissa, koska tarvetta uudelleen verkottamiselle ei ole. SPH:n on myös todettu olevan tehokas mallintamaan säröjen syntymistä ja murtumista, jotka taas eivät ole elementtimenetelmän vahvuuksia. (Augarde et al. 2021)

Hybridimenetelmän suhteen on vertailukelpoista mainita Beer et al. (2009) käyttämän DEM:n ja pilarimallin yhdistelmä simulaation olevan suoritettu suhteellisen normaalilla pöytäkoneella ” Intel(R) Core(TM)2 Duo CPU at 1.8GHz, 4GB RAM and a NVIDIA Geforce 8600M GT graphics adapter”, verrattuna Berglund et al. (2021) suorittamaan simulaatioon huomattavasti suuremmista malleista. Berglundin ryhmän simulaatioon on käytetty huomattavasti tehokkaampaa pöytäkonetta ” Intel Core i7-7800X CPU at 3.5 GHz and 32 GB RAM”.

3.2 Avaintulokset

Monia erilaisia malleja on kehitetty kuvaamaan maaperän käyttäytymistä erilaisissa tilanteissa ja elementtimenetelmä on niistä suosituin. (Gray et al. 2013,33) Diskreetti elementtimalli mahdollistaa suurempien muodonmuutosten mallintamisen kuitenkin nostaen tarvittavaa laskentatehoa tarkkoja tuloksia haluttaessa. (Ucgul et al. 2017; Augarde et al. 2021) Tasoitettu partikkelihydrodynamiikka ja yleinen partikkeli dynamiikkakoodi mahdollistaa kapean, mutta kuitenkin tärkeän osa-alueen arvioimisen kriittisissä leikkauskohdissa ja halkeaman tai murtuman tilanteessa. (Zhang et al. 2019; Augarde et al. 2021) Diskreetti elementtimenetelmä loistaa taas suurien muodonmuutosten ja vähäkoheesioisten maaperien tilanteissa. (Augarde et al. 2021.) Elementtimenetelmän parhaat puolet tulevat esille stabiiliustarkastelussa, jännitysten arvioimisessa ja maaperän pakkautumisen mallintamisessa. (Gens et al. 2003; Cueto et al. 2016; Chavda et al. 2022). Hybridimenetelmä käsitellyistä menetelmistä on mahdollistanut maaperän reaaliaikaisen simuloimisen erilaisia

fysiikkamoottoreita hyödyntäen ja kohtuullisen pienen mallin tapauksessa normaalilla pöytäkoneella. (Berglund et al. 2021; Beer et al. 2009). Mikään mallinnusmenetelmä ei suoraan sovi jokaiseen maaperään. On valittava ja kalibroitava syötettäviä arvoja maaperän käyttäytymiseen ja ominaisuuksiin liittyen. (Gray et al. 2013,33)

3.3 Reliabiliteetti ja validiteetti

Tässä työssä käytetyt lähteet ovat joko tieteellisiä julkaisuja tai aiheeseen liittyviä kirjoja. Lähteitä arvioidaan myös mahdollisuuksien mukaan kahden indikaattorin avulla. Ensimmäinen indikaattoreista on ”Journal Rank Indicator”, lyhemmin SJR. SJR arvioi lehden vaikuttavuutta ja sen laskentamalli ei huomioi lehden sisäisiä viittauksia, jotta lehden indikaattorin arvoa ei pystyisi keinotekoisesti muokkaamaan. Toinen käytetyistä indikaattoreista on ”Source Normalized Impact per Paper”, lyhemmin SNIP. SNIP- indikaattori pyrkii arvioimaan lehden vaikuttavuutta sen omassa aihepiirissä. SNIPin huomioimia parametrejä ovat käytettyjen lähteiden määrä, artikkeliin tulevien viittauksien määrää julkaisuajankohdan jälkeen ja käytetyn kirjallisuuden määrää aihealueen suhteen. (Eskelinen 2022, 38).

Tulosten oikeellisuutta vahvistetaan Lappeenrannan teknillisen yliopiston tutkijaopettajan tekniikan tohtorin Marko Matikaisen konsultaatiolla. Saatavilla olevia indikaattoreita on koottu taulukkoon liitteessä 1. Taulukkoon on merkitty julkaisun alusta, SJR-indikaattorin arvo ja SNIP- indikaattorin arvo. Lähteistä kerätyn tiedon on myös katsottu mukailevan yleistä konsensusta aiheesta.

4 Pohdinta

Työn syvyys käsiteltäviin menetelmiin on lähteisiin verrattuna pintapuolinen, koska jokainen menetelmä vaatisi teoreettisen ja laskennallisen pohjan puolesta vähintään koko katsauksen pituisen seikkakohtaisen kuvauksen. Tutustumalla tarkemmin esitettyihin lähteisiin pääsee hyvään alkuun, jos tavoitteena on toteuttaa oma tutkimus tai tutustua aiheeseen. Lukijan näkökulmasta tämä katsaus antaa käsityksen millaisella menetelmällä omaa kohdetta kannattaa lähteä tarkastelemaan. Hyötyä tästä katsauksesta on sellaiselle henkilölle, jolla ei vielä ole syvempää ymmärrystä käsitellyistä menetelmistä tai on kiinnostunut maaperän mallinnuksesta aiheena. Työssä on pyritty tarjoamaan myös hieman historiaa maaperän mallinnuksesta, ja siitä mihin esitellyt menetelmät pohjautuvat.

Jatkotutkimusaiheita tälle katsaukselle on monta. Ensimmäiseksi voisi valita yhden menetelmän ja tarkastella sitä yksityiskohtaisesti tarjoten kattavan näkemyksen sen teoriaan ja toteutukseen. Toisena aiheena voisi olla menetelmien käytännön tietoteknisen tutkimuksen toteuttaminen kuten, millaisia ohjelmia ja algoritmeja kussakin menetelmissä hyödynnetään. Kolmanneksi jatkotutkimusta pystyisi toteuttamaan tarvittavasta datasta, parametrien vaikutuksista, mittauksesta, näytteiden testauksesta ja yksittäisen menetelmän kalibroimisesta jonkun tyyppiselle maaperälle.

Maaperien mallinnus on hyvin kohdekriittistä ja monimuotoista. Menetelmiä ja niiden sovelluksia riittää, koska maaperä itsessään on monimuotoista ja vaihtelevaa. Tiedeyhteisö on pystynyt kuitenkin vastaamaan tähän loputtomien muuttujien haasteeseen ja onnistunut kehittämään menetelmiä, joiden avulla mahdottomalta tuntuvien yhtälöiden ratkaisuja arvioidaan yllättävän tarkasti. Kehittyvä teknologia avaa koko ajan uusia mahdollisuuksia hyödyntää näitä menetelmiä tarkemmin ja suuremmalla mittakaavalla, eikä simulaatioita ole enää tarvetta yksinkertaistaa kauas maaperän todellisesta käytöksestä. Tarkan ja todellisuutta kuvaavan mallin rakentaminen maaperästä vaatii syvällistä tietämystä usealta tieteen alalta

unohtamatta käytännön työtä yksilöllisen kohteen testauksessa. Tulevaisuuden näkymät alalle ovat loputtoman mielenkiintoiset ja aikaisempaa tarkempi tietämys maaperän käyttäytymisestä avaa insinööreille ympäri maailmaa mahdollisuuksia toteuttaa parempia käytännön ratkaisuja vaarantamatta turvallisuutta. Maaperä on kuitenkin perusta ihmisen rakentamalle infrastruktuurille ja saamme jatkuvasti tietoa, miten sitä voi muokata tai miten muokkaukset vaikuttavat sen ominaisuuksiin.

5 Yhteenveto

Työn tavoitteena oli esitellä yleisesti käytettyjä maaperän mallinnusmenetelmiä. Tarjota menetelmälle teoreettinen pohja, sekä avustaa lukijaa valitsemaan omaan tilanteeseen soveltuva menetelmä, informoida heikkouksista ja tuoda esille tapoja niiden välttämiseksi. Työssä haluttiin myös kertoa menetelmien toteutukseen vaadittavasta testauksesta ja datasta. Pyrkimyksenä oli vielä vertailla menetelmiä mahdollisuuksien mukaan.

Työssä esiteltiin neljää yleisesti käytettyä menetelmää. Nämä menetelmät ovat diskreetti elementtimenetelmä, elementtimenetelmä, hybridimenetelmä, tasoitettu partikkelihydrodynamiikka ja sen jatkeena yleinen partikkelidynamiikka koodi. Näille menetelmille tarjottiin pintapuolinen teoreettinen kuvaus. Menetelmät vaativat kuitenkin kattavamman ja yksityiskohtaisen selityksen mikä näitä haluaa hyödyntää. Menetelmille esiteltiin valintaperusteita ja jokaisen kohdalla kerrottiin mihin ne ovat parhaiten soveltuvia. Soveltuvuudesta annettiin esimerkkejä ja lukija ohjattiin lähteiden muodossa julkaisuihin, joissa niitä on hyödynnetty. Soveltuvuuden yhteydessä käsiteltiin menetelmien heikkouksia ja kompastuskiviä, joihin tarjottiin menetelmän mahdollisuuksien rajoissa ratkaisuja. Työssä kerrottiin menetelmien parametreistä ja yleisesti vaadittavista lähtötiedoista, jotka kuitenkin vaihtelevat menetelmän sisäisesti soveltamisesta riippuen. Näytteiden testauksesta esiteltiin yleisiä menetelmiä ja lukija ohjattiin lähteiden muodossa julkaisuihin, joista selviää tarkemmin testauksen kulkua. Vertailua suoritettiin vaadittavan laskentatehon, tilannekohtaisen soveltuvuuden ja yleisen käyttöasteen muodoissa.

Tuloksia voidaan hyödyntää yleisesti tiedon hakemiseen maaperien mallinnuksesta. Tulokset antavat kuvan mitä menetelmää lähteä tarkemmin selvittämään tietyssä tilanteessa tai mikä voisi parhaiten soveltua selvitettävään ongelmaan. Työn avulla saadaan käsitys siitä, millaisia pohjatietoja kyseisiin menetelmiin on selvitettävä ja yleisiä parametrejä mitä niissä käytetään. Tämä mahdollistaa sen, että kuhunkin tilanteeseen voidaan valita parhaiten sopiva menetelmä.

Lähteet

Augarde, C., Lee, S. ja Loukidis, D. 2021. Numerical modelling of large deformation problems in geotechnical engineering: A state-of-the-art-reviw. Soils and Foundations. Vol.61:6. s. 1718-1735. ISSN:00380806

Balling, O., Foldager, F., Green, O., Heck, R., Munkhom, L., Negrut, D., Serban., R. 2022. Modeling soil aggregate fracture using the discrete element method. Soil and Tillage Research. Vol. 218. ISSN: 0167-1987

Batali, L. ja Popa, H. 2010. Using Finite Element Method in geotechnical design. Soil constitutive lawsand calibration of the parameters. Retaining wall case study. Geotechnics and Foundations DepartmentTechnical University of Civil Engineering of Bucharest. Vol. 5:3. ISSN: 1991-8747

Beer, T., Holz, D. ja Kuhlen, T. 2009. Soil Deformation Models for Real-Time Simulation: a Hybrid Approach. [verkkojulkaisu]. [viitattu: 3.4.2022]. Saatavissa: https://lut.primo.exlibrisgroup.com/discovery/search?query=any,contains,Soil%20Deformation%20Models%20for%20Real-Time%20Simulation:%20A%20Hybrid%20Approach&tab=Everything&search_scope=LUT_CAMPUS_CDI&vid=358FIN_LUT:LUT&lang=fi&offset=0

Berglund, T., Nystedt, S. ja Servin, M. 2021. A multiple model of terrain dynamics for real-time earthmoving simulation. Advanced Modeling and Simulation in Engineering Science. Vol. 1:11. s. 1-35. ISSN: 2213-7467

Bi, J., Qian, Q. ja Zhou, X.2014. Numerical Simulation of Crack Growth and Coalescence in Rock-Like Material. Containing Multiple Pre-existing Flaws. Rock Mechanics and Rock Engineering. Vol.48:3. s. 1097-1114. ISSN: 0723-2632

Bi, J., Guo, D., Zhang, X., Zheng, L. 2019. Numerical simulation of stability of soil slope using general particle dynamics with elastic-plastic constitutive model. Material Design & processing communications. Vol.1:4. ISSN: 2755-6578

Bravo, E., Coronel, C., Cueto, O., Morfa, C. ja Suárez, M. 2016. Modelling in FEM the soil pressures distribution caused by a tyre on a Rhodic Ferralsol soil. Journal of Terramechanics. Vol.63. s. 61-67. ISSN: 0022-4898

Bui, H. ja Fukagawa, R. 2013. An improved SPH method for saturated soils and its application to investigate the mechanisms of embankment failure: Case of hydrostatic pore-water pressure. International journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. Vol. 37:1. s. 31-50 ISSN: 0363-9061

Chavda, J., Karthik, A. ja Manideep, R. 2022. Sensitivity analysis of slope stability using finite element method. Innovative Infrastructure Solutions. Vol. 7:2. ISSN: 2364-4176

Chakraborty, R. ja Dey, A. 2022. Probabilistic slope stability analysis: state-of-the-art review and future prospects. Innovative Infrastructure Solutions. Vol.7:2. ISSN: 23644176

Chaturvedi, U., Karir, D., Khandelwal, M., Kumar, A., Rai, R. ja Ray, A. 2022. Stability prediction of a natural and man-made slope using various machine learning algorithms. Transportation Geotechnics. Vol.34. ISSN: 22143912

Chen, X., Morrissey, J., Ooi, J ja Peng., D. 2021. A comparative assessment and unification of bond models in DEM simulations. Granular Matter. Vol. 24:1. ISSN: 1434-5021

Chen, Y., Milkevych, V., Munkholm, L. ja Nyord, T. 2018. Modelling approach for soil displacement in tillage using discrete element method. Soil and Tillage Research. Vol. 183. s. 60-71. ISSN: 0167-1987

Chikichev, I. Gray, G., Harkins, N., Morgan, J., Sanz, P. ja Zhang, J. 2013. Comparative FEM and DEM modeling of basement-involved thrust structures, with application to Sheep Mountain, Greybull area, Wyoming. Tectonophysics. Vol.608:26. s. 408-417. ISSN: 0040-1951

Coetzee, C. 2016. Calibration of the discrete element method and the effect of the particle shape. Powder Technology. Vol. 297. s. 50-70. ISSN: 0032-5910

Coloma, R., Ikävalko, O., Kallio, H., Lehtikangas, M., Saresma, M., Toropainen, M. ja Wennerström, M. 2016. Rakentamisen maa- ja kallioperämallien käsitteitä, ominaisuustietoja ja niiden arvoja. [verkkojulkaisu]. [viitattu: 13.4.2022]. Saatavissa: https://6aika.fi/wp-content/uploads/2019/06/CGM_Rakentamisen-maa-ja-kalliopera%CC%88mallien-ka%CC%88sitteita%CC%88-ominaisuuksia-ja-niiden-arvoja.pdf

Di Maio, F ja Di Renzo, A. 2004. Comparison of contact-force models for the simulation of collisions in DEM-based granular flow codes. Chemical Engineering Science. Vol. 59: 3. s. 525-541. ISSN: 0009-2509

Fielke, J., Saunders, C. ja Ucgul, M. 2014. Three-dimensional discrete element modelling of tillage: Determination of a suitable contact model and parameters of a cohesionless soil. Biosystems Engineering. Vol. 121. s. 105-117. ISSN 1537-5110

Fielke, J., Saunders, C., Ucgul, M. 2017. Discrete element modelling of the top soil burial using a full scale mouldboard plough under field conditions. Biosystems Engineering. Vol.160. s. 140-153. ISSN: 1537-5110

Fielke, J., Saunders, C., Ucgul, M. 2018. Comparison of the discrete element and finite element methods to model the interaction of the soil and tool cutting edge. Biosystems Engineering. Vol.169. s. 199-208. ISSN: 1537-5110

Gingold, R. ja Monaghan, J. 1977. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. Vol. 181. s. 375-389.

Gens, A., Sheng, D., Sloan, S. ja Smith, D. 2003. Finite element formulation and algorithms for unsaturated soils. Part 1: Theory. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. Vol. 27:8. s. 745-765. ISSN: 1082-5010

Gomes, E., Raguiara P., Rolim, I., Pedrosa, U., Silva, M. ja Tavares, A. 2018. Numerical modeling of soil compaction in a sugarcane crop using the finite element method. Soil and tillage Research. Vol.181. s. 1-10. ISSN: 0167-1987

Grabrowski, A., Nitka, M. ja Tejcham, J. 2021. Comparative 3D DEM simulations of sand-structure interfaces with similarly shaped clumps versus spheres with contact moments. Acta Geotechnica. Vol.16:11. s. 3533-3554. ISSN: 1861-1125

Grasselli, G. ja Lisjak, A. 2014. A review of discrete modeling techniques for fracturing processes in discontinuous rock masses. Journal of Rock machines and Geotechnical Engineering. Vol.6:4. s. 301-314. ISSN: 1674-7755

Gray, G., Morgan, J. ja Sanz, P. 2014. Overview of continuum and particle dynamics methods for mechanical modeling contractional geologic structures. Journal of Structural geology. Vol.59: s. 19-36. ISSN: 0191-8141

Hashash, M., Lee, S. 2012. Simulation of triaxial compression tests with polyhedral discrete elements. Computers and Geotechnics. Vol. 43. s. 92-100. ISSN: 0266-352X

Koolen, A., Poodt, M. ja Van der Linden, J. 2003. FEM analysis of subsoil reaction on heavy wheel loads with emphasis on soil preconsolidation stress and cohesion. Soil and Tillage Research. Vol.73:1-2. s. 67-76. ISSN: 0167-1987

Lopéz, Y., Morfa, C. ja Roose, D. 2012. Dynamic refinement in SPH: Application to free surface flow and non-cohesive soil simulations. Computational Mechanics. Vol. 51:5. s. 731-741. ISSN: 0178-7675

Lucy, L. 1977. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. Astronomical Journal. Vol. 82: 12. s. 1013-1024.

Marigo, M., Stitt, E., Wilkinson, S., Yan, Z. 2015. Discrete element modelling (DEM) input parameters: Understanding their impact on model predictions using statistical analysis. Computational particle Mechanics. Vol. 2:3. s. 283-299. ISSN: 2196-4378

Mishra, B. K. ja Rajamani, R. 1992. The discrete element method for the simulation of ball mills. Applied math modeling. Vol.16:11. S.598-604. ISSN: 0307904X

Monaghan, J. 1992. Smoothed particle hydrodynamics. Annual review of astronomy and astrophysics. Vol. 30. s. 543-574.

Radhakrishnan, N. ja Reese L. N.d. A review of applications of the finite element method of analysis to problems in soil and rock mechanics. [verkkojulkaisu]. [viitattu: 23.3.2022] Saatavissa: https://www.jstage.jst.go.jp/article/sandf1960/10/3/10_3_95/_pdf

Reddy, J. 2019. Introduction to the Finite Element Method. 4. painos. McGraw-Hill Education. 65 s. ISBN: 978-1-25-986190-1

Scopus. 2020 a. Source details. [verkkojulkaisu]. [viitattu: 13.4.2022]. saatavissa: https://www.scopus.com/sourceid/17392

Scopus. 2020 b. Source details. [verkkojulkaisu]. [viitattu: 13.4.2022]. saatavissa: https://www.scopus.com/sourceid/38003

Scopus. 2020 c. Sources. [verkkojulkaisu]. [viitattu: 13.4.2022]. saatavissa: https://www.scopus.com/sources.uri

Scopus. 2020 d. Source details. [verkkojulkaisu]. [viitattu: 13.4.2022]. saatavissa: https://www.scopus.com/sourceid/21100855984

Scopus. 2020 e. Source details. [verkkojulkaisu]. [viitattu: 13.4.2022]. saatavissa: https://www.scopus.com/sourceid/26268

Scopus. 2020 f. Sources. [verkkojulkaisu]. [viitattu: 13.4.2022]. saatavissa: https://www.scopus.com/sourceid/21101039774

Scopus. 2020 g. Source details. [verkkojulkaisu]. [viitattu: 13.4.2022]. saatavissa: https://www.scopus.com/sourceid/18898

Scopus. 2020 h. Source details. [verkkojulkaisu]. [viitattu: 13.4.2022]. saatavissa: https://www.scopus.com/sourceid/21100888788

Scopus. 2020 i. Source details. [verkkojulkaisu]. [viitattu: 13.4.2022]. saatavissa: https://www.scopus.com/sourceid/29651

Scopus. 2020 j. Source details. [verkkojulkaisu]. [viitattu: 13.4.2022]. saatavissa: https://www.scopus.com/sourceid/38003

Scopus. 2020 k. Source details. [verkkojulkaisu]. [viitattu: 13.4.2022]. saatavissa: https://www.scopus.com/sourceid/28990

Scopus. 2020 l. Source details. [verkkojulkaisu]. [viitattu: 13.4.2022]. saatavissa: https://www.scopus.com/sourceid/61490

Scopus. 2020 m. Source details. [verkkojulkaisu]. [viitattu: 13.4.2022]. saatavissa: https://www.scopus.com/sourceid/61490

Scopus. 2020 n. Source details. [verkkojulkaisu]. [viitattu: 13.4.2022]. saatavissa: https://www.scopus.com/sourceid/61490

Scopus. 2020 o. Source details. [verkkojulkaisu]. [viitattu: 13.4.2022]. saatavissa: https://www.scopus.com/sourceid/28218

Scopus. 2020 p. Source details. [verkkojulkaisu]. [viitattu: 13.4.2022]. saatavissa: https://www.scopus.com/sourceid/16214

Scopus. 2020 q. Source details. [verkkojulkaisu]. [viitattu: 13.4.2022]. saatavissa: https://www.scopus.com/sourceid/4700152635

Scopus. 2020 r. Sources. [verkkojulkaisu]. [viitattu: 13.4.2022]. saatavissa: https://www.scopus.com/sources.uri

Scopus. 2020 s. Source details. [verkkojulkaisu]. [viitattu: 13.4.2022]. saatavissa: https://www.scopus.com/sourceid/24432

Scopus. 2020 t. Source details. [verkkojulkaisu]. [viitattu: 13.4.2022]. saatavissa: https://www.scopus.com/sourceid/28457

Scopus. 2020 u. Source details. [verkkojulkaisu]. [viitattu: 13.4.2022]. saatavissa: https://www.scopus.com/sourceid/26704

Scopus. 2020 v. Source details. [verkkojulkaisu]. [viitattu: 13.4.2022]. saatavissa: https://www.scopus.com/sourceid/16413

Scopus. 2020 w. Source details. [verkkojulkaisu]. [viitattu: 13.4.2022]. saatavissa: https://www.scopus.com/sourceid/21100825344

Scopus. 2020 x. Source details. [verkkojulkaisu]. [viitattu: 13.4.2022]. saatavissa: https://www.scopus.com/sourceid/26651

Scopus. 2020 y. Sources. [verkkojulkaisu]. [viitattu: 13.4.2022]. saatavissa: https://www.scopus.com/sources.uri

Scopus. 2020 z. Sources. [verkkojulkaisu]. [viitattu: 13.4.2022]. saatavissa: https://www.scopus.com/sources.uri

Taylor, R., Zhu, J. ja Zienkiewicz, O., 2005. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. 6. painos. Elsevier Butterworth-Heinemann. 802 s. ISBN: 0 7506 6320 0

Liite 1. SNIP ja SJR vertailu työssä käytetyille lähteille

Julkaisu	Lehti	SNIP 2020	SJR 2020	CiteScore 2020	Lähde
Numerical modelling of large deformation problems in geotechnical engineering: A state-of-the-art-reviw	Soils and Foundations	1,54	1,03	3,5	Augarde et al. (Scopus 2020 a)
Modeling soil aggregate fracture using the discrete element method.	Soil and Tillage Research	2,21	1,71	8,6	Balling et al. (Scopus 2020 b)
Soil Deformation Models for Real-Time Simulation: a Hybrid Approach		N/A	N/A	N/A	Beer et al. (Scopus 2020 c)
A multiple model of terrain dynamics for real-time earthmoving simulation	Advanced Modeling and Simulation in Engineering Science	0,94	1,01	2,6	Berglund et al. (Scopus 2020 d)
Numerical Simulation of Crack Growth and Coalescence in Rock-Like Material. Containing Multiple Pre-existing Flaws	Rock Mechanics and Rock Engineering	2,47	2,14	9	Bi et al. (Scopus 2020 e)
Numerical simulation of stability of soil slope using general particle dynamics with elastic-plastic constitutive model	Material Design & processing communications	N/A	N/A	N/A	Bi et al. (Scopus 2020 f)
Modelling in FEM the soil pressures distribution caused by a tyre on a Rhodic Ferralsol soil	Journal of Terramechanics	2,44	0,60	5,1	Bravo et al. (Scopus 2020 g)
Sensitivity analysis of slope stability using finite element method	Innovative Infrastructure Solutions	1,00	0,40	2	Chavda et al. (Scopus 2020 h)
A comparative assessment and unification of bond models in DEM simulations	Granular Matter	1,39	0,94	4,6	Chen et al. (Scopus 2020 i)
Modelling approach for soil displacement in tillage using discrete element method	Soil and Tillage Research	2,21	1,71	8,6	Chen et al. (Scopus 2020 j)
Comparative FEM and DEM modeling of basement-involved thrust structures, with application to Sheep Mountain, Greybull area, Wyoming	Tectonophysics	1,44	1,70	6,5	Chikichev et al. (Scopus 2020 k)
Calibration of the discrete element method and the effect of the particle shape	Biosystems Engineering	2,12	0,89	7,2	Coatzee (Scopus 2020 l)
Discrete element modelling of the top soil burial using a full scale mouldboard plough under field conditions	Biosystems Engineering	2,12	0,89	7,2	Fielke et al. (Scopus 2020 m)
Comparison of the discrete element and finite element methods to model the interaction of the soil and tool cutting edge	Biosystems Engineering	2,12	0,89	7,2	Fielke et al. (Scopus 2020 n)
Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars	Monthly Notices of the Royal Astronomical Society	1,09	2,06	9,4	Gingold ja Monaghan (Scopus 2020 o)
Finite element formulation and algorithms for unsaturated soils. Part 1: Theory	International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics	1,63	1,42	5,7	Gens et al. (Scopus 2020 p)
Comparative 3D DEM simulations of sand-structure interfaces with similarly shaped clumps versus spheres with contact moments	Acta Geotechnica	2,59	2,15	6,4	Grabrowski et al. (Scopus 2020 q)
A review of discrete modeling techniques for fracturing processes in discontinuous rock masses	Journal of Rock machines and Geotechnical Engineering	N/A	N/A	N/A	Grasselli ja Lisjak (Scopus 2020 r)
Overview of continuum and particle dynamics methods for mechanical modeling contractional geologic structures	Journal of Structural geology	1,60	1,53	5,5	Gray et al. (Scopus 2020 s)
Dynamic refinement in SPH: Application to free surface flow and non-cohesive soil simulations	Computational Mechanics	1,49	1,46	6,1	Lopéz et al. (Scopus 2020 t)
A numerical approach to the testing of the fission hypothesis	Astronomical Journal	1,29	2,61	10	Lucy (Scopus 2020 u)
Comparison of contact-force models for the simulation of collisions in DEM-based granular flow codes	Chemical Engineering Science	1,50	1,02	7,3	Di Maio ja Di Renzo (Scopus 2020 v)
Discrete element modelling (DEM) input parameters: Understanding their impact on model predictions using statistical analysis	Computational particle Mechanics	0,90	0,48	3,3	Marigo et al. (Scopus 2020 w)
Smoothed particle hydrodynamics	Annual review of astronomy and astrophysics	8,04	15,62	48,9	Monaghan (Scopus 2020 x)
A review of applications of the finite element method of analysis to problems in soil and rock mechanics		N/A	N/A	N/A	Radhakrishnan ja Reese (Scopus 2020 y)
Introduction to the Finite Element Method		N/A	N/A	N/A	Reddy (Scopus 2020 z)