



STOKASTISTEN DIFFERENTIAALIYHTÄLÖMALLIEN HYÖDYNTÄMINEN VALUUTTAKURSSIEN ENNUSTAMISESSA

Case: EUR/USD-valuuttakurssien simulointi Hestonin ja geometrisen Brownin liikkeen malleilla

Lappeenrannan–Lahden teknillinen yliopisto LUT

Kauppätieteiden kandidaatintutkielma

2023

Anna Litmanen

Tarkastaja: Tutkijatohtori Jyrki Savolainen

TIIVISTELMÄ

Lappeenrannan–Lahden teknillinen yliopisto LUT

LUT-kauppakorkeakoulu

Kauppätieteet

Anna Litmanen

Stokastisten differentiaaliyhtälömallien hyödyntäminen valuuttakurssien ennustamisessa — Case: EUR/USD-valuuttakurssien simulointi Hestonin ja geometrisen Brownin liikkeen malleilla

Kauppätieteiden kandidaatintutkielma

2023

49 sivua, 13 kuvaa, 4 taulukkoa ja 1 liite

Tarkastaja: Tutkijatohtori Jyrki Savolainen

Avainsanat: stokastiset differentiaaliyhtälömallit, valuuttakurssien ennustaminen, geometrisen Brownin liikkeen malli, Hestonin malli

Stokastisia differentiaaliyhtälömalleja (SDY-mallit) voidaan käyttää tapahtumien mallintamisessa, kun asia sisältää stokastisuutta eli satunnaisuutta. Valuuttamarkkinoiden käyttäytymisen tiedetään olevan haasteellista ennustaa, koska ne ovat useiden tekijöiden vaikutuksen alaisia ja sisältävät stokastisuutta. SDY-mallit ovat siten yleisesti käytössä myös valuuttakurssien ennustamisessa.

Tässä kandidaatintutkielmassa määritellään, mitä SDY-mallit ovat ja tutkitaan niihin pohjautuvien Hestonin ja geometrisen Brownin liikkeen mallien suoriutumista valuuttakurssien simuloinnissa. Hestonin malli on monimutkaisempi matemaattinen malli, kun taas geometrisen Brownin liikkeen malli kuvautuu matemaattisesti yksinkertaisemmin. Tutkimuksessa käytetään kvantitatiivisia tutkimusmenetelmiä ja datana on käytetty aikasarjadataa EUR/USD-valuuttakurssista. Dataa käsitellään ja simuloinnit toteutetaan Matlab-ohjelmalla. Simulointeja verrataan toteutuneisiin valuuttakursseihin, ja myös mallien keskinäistä suoriutumista simulointien onnistumisessa verrataan.

Tutkimuksessa molemmat mallit onnistuvat kohtalaisesti suoriutumaan valuuttakurssien simuloinnista. Tulokset antavat hienoisesti tukea aiemmille tutkimuksille sen suhteen, että monimutkaisemman SDY-mallin avulla voidaan luoda tarkempia ennusteita. Empiriaosuiden tuloksia ei kuitenkaan työssä tehtyjen rajausten vuoksi voida laajemmin yleistää, ja osittain tulokset ovat ristiriitaisia. Tutkimuksen tuloksia voidaan hyödyntää alustavana tutkimuksena valuuttakurssien ennustamiseen liittyvälle tutkimukselle ja käyttää selventämään SDY-mallien käyttöä ennusteiden tekemisessä.

ABSTRACT

Lappeenranta–Lahti University of Technology LUT

School of Business and Management

Business Administration

Anna Litmanen

Forecasting exchange rates using stochastic differential models — Case: Simulation of EUR/USD exchange rates using Heston model and geometric Brownian motion model

Bachelor's thesis

2023

49 pages, 13 figures, 4 tables and 1 appendix

Examiner: PhD Jyrki Savolainen

Keywords: stochastic differential equation models, exchange rate forecasting, geometric Brownian motion model, Heston model

Stochastic differential equation models (SDE models) can be used to event modelling when factors include stochastic component, i.e., randomness. Behavior for foreign exchange markets is challenging to predict because they are subject to several factors and contain randomness. SDE models are commonly used to simulate randomness and thus SDE models are also used for simulating exchange rate movements.

The aim of this bachelor's thesis was to research what are SDY models and examine the performance of Heston model and Geometric Brownian motion model (GBM) to simulate exchange rates. Heston's model is a more complex mathematical model while GBM is mathematically simpler. Quantitative research methods are used in empirical research and the EUR/USD exchange rate time series data have been used as data. Data handling and exchange rate simulations are carried out in Matlab. The simulations are compared with the actual exchange rates. The performance of models is also evaluated in terms of the accuracy of simulations.

In the study, both models can reasonably perform the simulation of exchange rates. The results will provide some support for previous studies to that a more complex SDY model can be used to produce more accurate predictions. However, because of the restrictions of the study, the empirical results cannot be more generalized and, in part the results are contradictory. The results of the study can be used as a base study for exchange rate forecasting research and used for clarifying the use of SDY models for forecasting.

Sisällys

Tiivistelmä

Abstract

1	Johdanto.....	5
1.1	Tutkielman tavoitteet ja tutkimuskysymykset	6
1.2	Tutkimusmenetelmät ja teoreettinen viitekehys.....	6
1.3	Tutkielman rakenne.....	7
2	Teoreettinen tausta.....	8
2.1	Valuuttakurssien ennustaminen	8
2.1.1	Tekninen analyysi	10
2.2	Stokastisten differentiaaliyhtälöiden määritelmä ja käyttökohteet	12
2.2.1	Geometrisen Brownin liikkeen mallin määritelmä ja käyttökelpoisuus	15
2.2.2	Hestonin mallin määritelmä ja käyttökelpoisuus.....	17
3	Data ja metodologia.....	19
3.1	Data	19
3.2	Metodologia	20
3.2.1	Mallien parametrien laskenta.....	22
3.2.2	Mallien tuottamien simulointien arviointi	23
4	Tulokset	25
4.1	Datan ominaisuudet.....	25
4.2	Simulaatiomallien rakentaminen.....	27
4.3	Simulaatioiden tulokset.....	30
4.4	Tulosten analyysi	38
5	Yhteenveto ja johtopäätökset	41
5.1	Vastaukset tutkimuskysymyksiin.....	41
5.2	Tutkimuksen luotettavuus ja jatkotutkimusehdotukset.....	43
	Lähteet	45

Liitteet

Liite 1. Simuloitujen ennusteiden päivittäiset keskiarvot geometrisen Brownin liikkeen mallille sekä Hestonin mallille ja alkuperäiset valuuttakurssit

1 Johdanto

Talousennusteet ovat olleet muutaman vuoden ajan pinnalla eri kriisien aiheuttamien talousheijasteiden vuoksi. Viime aikoina muun muassa korkotasojen ja hintojen muutokset ovat aiheuttaneet yleistä epävarmuutta. Euroopan keskuspankki (2022a, 3) toteaa Talouskatsauksessaan 8/2022 vaikean maantieteellispoliittisen tilanteen, inflaation nousun ja rahoitusolojen kiristymisen vaikuttaneen maailmantalouteen. Ja esittää, että euroalueen talous on energiakriisin myötä voinut supistua vuoden 2022 lopussa, eikä sen odoteta nousevan vuoden 2023 alussa, inflaatiovauhti on ollut marraskuussa 2022 10,0 % ja koron nostot ovat aiheellisia. Kaikki taloudessa tapahtuvat muutokset taas heijastuvat valuuttakurssitasoihin, jotka nähdäänkin tärkeäksi mittariksi osana globaaleja rahamarkkinoita (Dash 2018).

Kansainväliseen rahoitukseen liittyvien asioiden voidaankin todeta olevan monimutkaisia kokonaisuuksia, erityisesti valuuttamarkkinoiden suhteen (Gamaliy, Shalimova, Zhovnovach, Zahreba & Levchenko 2018). Yleisesti ottaen rahoitusmarkkinoiden aikasarjat ovat monien vaikuttavien tekijöiden alaisia, epälineaarisia, kaoottisia ja monimutkaisia järjestelmiä. Valuuttamarkkinat taas ovat keskeinen osa näitä rahoitusmarkkinoita. (Huang 2022) Valuuttakurssien ennustamista voidaankin pitää tärkeää, koska siinä onnistumisen hyödyt näkyvät taloudessa niin mikro- kuin makrotasolla (Rime, Sarno & Sojli 2010). Castellano ja D'Ecclesia (2007) kuvailevatkin valuuttakurssien kehitystä kuvaavan mallin löytämisen olevan tutkijoiden ja ammattilaisten keskeinen tavoite.

Tässä tutkimuksessa esitetään teknisen analyysin piiriin kuuluvien stokastisten differentiaaliyhtälömallien (SDY-mallit) merkitystä valuuttakurssien ennustamisessa. Tutkielmaan valittuja malleja, geometrista Brownin liikettä ja Hestonin mallia, testataan ja lisäksi verrataan testauksessa saatuja tuloksia aiempiin tuloksiin, joita on saatu SDY-mallien suoriutumista vertailtaessa. Tutkimuksessa tuodaan esille SDY-mallien heikkouksia sekä toisaalta niiden vahvuutta yhdistettynä muihin menetelmiin sekä etuja käytännön toiminnan kannalta.

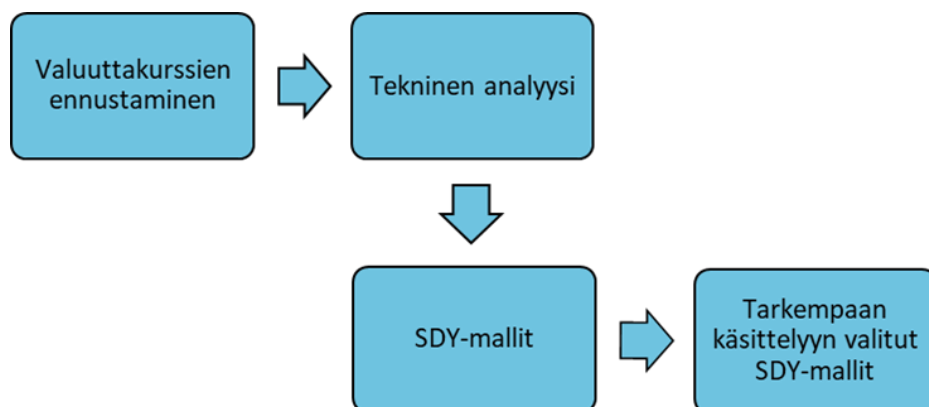
1.1 Tutkielman tavoitteet ja tutkimuskysymykset

Tutkielman tavoitteena on selvittää mitä stokastiset differentiaaliyhtälömallit (SDY-mallit) ovat, hahmottaa yleisimpiä SDY-malleja, joita käytetään valuuttakurssien ennustamisessa ja avata esille nousseiden mallien käyttöä sekä testata niiden suoriutumista hyödyntäen historiallista dataa. Tutkielmassa tarkastellaan siten valuuttakurssien ennustamista teknisen analyysin näkökulmasta kohdentaen tutkimusalue SDY-mallien käyttöön ja valittujen mallien testaamiseen empiirisesti. Tutkielmassa haetaan vastauksia seuraaviin kysymyksiin:

- 1. Mitä SDY-mallit ovat ja miten valuuttakurssien ennustamisessa hyödynnettävät yleiset SDY-mallit rakentuvat?*
- 2. Miten yleisimpiin SDY-malleihin kuuluvat geometrisen Brownin liikkeen malli ja Hestonin malli suoriutuvat EUR/USD-valuuttakurssien 23.12.2022-28.2.2023 simuloinnissa käytettäessä historiallisena datana 3.1.2022-22.12.2022 toteutuneita EUR/USD-valuuttakursseja?*

1.2 Tutkimusmenetelmät ja teoreettinen viitekehys

Tutkielman teoreettinen viitekehys rakentuu olemassa olevien tieteellisten tutkimusten sekä aihepiirin kirjallisuuden ympärille. Tutkielman teoreettinen viitekehys on havainnollistettu seuraavassa kuvassa (Kuva 1):



Kuva 1. Tutkielman teoreettinen viitekehys.

Viitekehys perustuu siis valuuttakurssien ennustamiseen ja SDY-malleihin. Valuuttakurssien ennustamisen osalta käsitellään tekninen analyysi, erotuksena fundamentaaliseen analyysiin. SDY-mallien käyttö on osa teknisiä analyysimenetelmiä, joten teknisen analyysin jälkeen tullaan käsittelemään SDY-mallit yleisesti, mistä painopiste siirtyy lopuksi ennustamiseen valittujen mallien käsittelyyn. Työn laajuus, tavoitteet ja toteutus huomioiden SDY-mallien tarkemmat perustelut ja ratkaiseminen on rajattu työn ulkopuolelle.

Tutkielman empiriaosuus toteutetaan kvantitatiivisena tutkimuksena, jossa aikasarjadataa käyttäen pyritään valittujen SDY-mallien avulla simuloimaan EUR/USD-valuuttakurssien kehitystä aikavälille 23.12.2022-28.2.2023, eli noin kahdelle kuukaudelle hyödyntäen historiallisena aineistona toteutuneita noin kahdentoista kuukauden EUR/USD-valuuttakursseja aikaväliltä 3.1.2022-22.12.2022. Empiriassa testattaviksi malleiksi pyritään löytämään kaksi eri mallia, jotka ovat hyödynnettävissä Matlab-ohjelmassa. Analyysi toteutetaan siten, että aineiston historiallisena osana käytettävän aikasarjan avulla luodaan aikasarjaennuste, jota verrataan todelliseen aikasarjaan. Analyysissä siis tutkitaan mallien tuottamien simulointien ja todellisuudessa toteutuneiden valuuttakurssitasojen välisiä eroja, sekä verrataan mallien keskinäistä onnistumista simuloinnissa. Tutkielman laajuus huomioiden parametrien estimointi malleihin on toteutettu yksinkertaistetusti.

1.3 Tutkielman rakenne

Johdannon jälkeen seuraavassa pääluvussa esitetään tutkielman teoreettisen viitekehys. Teoreettisen viitekehysten ensimmäinen osa koostuu valuuttakurssien ennustamisesta ja erityisesti teknisestä analyysistä. Toinen teoreettisen viitekehysten laajempi osa käsittelee SDY-malleja. SDY-mallit esitellään yleisesti sekä esitellään kirjallisuuden perusteella esille nousseita valuuttakurssien ennustamisessa hyödynnettäviä malleja. Teoreettinen viitekehys päättyy empiriaosuudessa hyödynnettävien SDY-mallien tarkempaan käsittelyyn. Teoreettisen viitekehysten jälkeen esitellään omassa pääluvussaan tutkimuksen empiriaosuuden data ja metodologia ja omassa pääluvussaan empiriaosuuden tulokset. Tutkielman viimeinen pää-luku sisältää tutkielman yhteenvetoa ja johtopäätöksiä, luotettavuuden arvioinnin sekä jatkotutkimusaiheiden esittelyn.

2 Teoreettinen tausta

Valuuttakurssien ennustamiseen, tekniseen analyysiin ja SDY-malleihin liittyvää teoriaa tarkastellaan tutkimuksessa vertaisarvioitujen tieteellisten artikkeleiden sekä aiheeseen liittyvän muun kirjallisuuden perusteella. Valuuttakurssien ennustaminen käsitellään omana alalukunaan, sisältäen teknisen analyysin tarkastelun. Samalla tehdään rajausta fundamentaaliin analyysiin. Teoreettisen viitekehyksen toinen alaluku muotoutuu SDY-mallien ympärille. Aluksi esitellään, mitä SDY-mallit yleisesti ottaen ovat. Lopuksi esitellään tarkemmin SDY-malleista valikoituneet empiriaosuudessa käytettävät mallit.

2.1 Valuuttakurssien ennustaminen

Valuuttakurssilla tarkoitetaan valuutan arvoa suhteessa toiseen valuuttaan (Özorhan, Toroslu & Sehitoğlu 2019), eli toisin sanoen valuutan hintaa toisessa valuutassa (Niskanen & Niskanen 2021, 449). Valuuttakurssien ennustamisella tarkoitetaan siten valuuttakurssien arvostuksen kehityksen suunnan arvioimista. Valuuttaparit hinnoitellaan valuuttamarkkinoilla ja valuuttakurssit vaihtelevat päivittäin riippuen kysynnästä ja tarjonnasta (Alhagyan 2022). Valuuttamarkkinoita voidaan pitää suurimpina ja monimutkaisimpina rahoitusalan markkinoina, koska ne eivät ole keskittyneet, niihin liittyy epälineaarisuutta, epäsäännönmukaisuutta ja korkea likvidisyys (Ayitey Junior, Appiahene, Appiah & Bombie 2023; Ahmed, Hassan, Aljohani & Nawaz 2020). Valuuttaparien hintojen ennustamisen voidaan siten todeta olevan haastavaa näin muodostuvan valuuttamarkkinoiden korkean volatiliiteetin vuoksi (Ahmed ym. 2020).

Valuuttakurssien ennustamiseen liittyy epävarmuutta, koska rahoitusmarkkinoille tyypillisesti valuuttakurssit ovat monimutkaisia järjestelmiä ja käyttäytyvät epälineaarisesti ja kaottisesti sekä niihin heijastuvat kaikki muut muutokset taloudessa (Huang 2022; Dash 2018). Toisaalta, koska kaikki muut talouden muutokset heijastuvat valuuttakursseihin, niin ne nähdään tärkeäksi mittariksi osana globaaleja rahamarkkinoita (Dash 2018).

Valuuttakurssien ennustamisen merkityksellisyys nousee esille niin mikro- kuin makrotasolla (Rime ym. 2010). Valuuttakursseilla on tärkeä rooli kansainvälisessä kaupankäynnissä, yritysten riskien hallinnassa, sijoituspäätösten teossa ja eri maiden taloudelle heijastuen esimerkiksi niiden vaihtotaseeseen (Korol 2014). Valuuttakurssien heikkous- ja vahvuus näkyy valtioiden viennissä ja tuonnissa. Valuuttakurssit heijastuvat esimerkiksi yritysten kilpailukykyyn kansainvälisillä markkinoilla ja yritysten kohtaamiin riskeihin, sekä yksittäisten ihmisten kohtaamiin hintatasoihin. Niiden kautta valuuttakurssien kehitys heijastuu taas esimerkiksi bruttokansantuotteeseen. Henríquez ja Kristjanpoller (2019) esittävät, että valuuttakurssien tutkiminen on merkityksellistä, koska valuuttakurssit toimivat valtioiden välisten kilpailun indikaattoreina ja koska valtioiden käyttämien valuuttojen arvo valuuttamarkkinoilla vaikuttaa valtioiden väliseen kaupankäyntiin.

Historiallisesti tarkastellen valuuttakurssien ennustamisesta on tullut haastavampaa sen jälkeen, kun useat valtiot ovat vaihtaneet valuutan arvostuksen valtioiden tekemistä rahapoliittisista päätöksistä valuutan kysyntään ja tarjontaan kansainvälisillä valuuttamarkkinoilla. Valuuttamarkkinoiden riskisyys on sen myötä kasvanut ja valuuttojen arvostuksen ennustettavuus on heikentynyt. Muutokset ovat toisaalta tuoneet mukanaan sen, että valuuttakurssien ennustaminen on tullut kiinnostuksen keskiöön niin valtioiden hallinnoissa, pankeissa, vakuutusyhtiöissä, sijoittajien keskuudessa sekä valuuttakauppojen parissa työskentelevien henkilöiden keskuudessa. Valuuttakurssien kehityksen ennustamisen liittyvien mallien parimmuuden arviointi on kuitenkin osoittautunut haastavaksi ja esimerkiksi merkityksellisten muuttujien määrittäminen ennustemalleihin on osoittautunut vaikeaksi. (Henríquez & Kristjanpoller 2019) Valuuttakurssien kehitystä kuvaavan mallin löytäminen on siten jo pitkään ollut tavoite, jota ei ole yksimielisesti saavutettu (Castellano & D'Ecclesia 2007).

Prabakaran, Palaniappan, Kannadasan, Dudi ja Sasidhar (2021) toteavat rahoitusmarkkinoiden käyttäytymisen tarkan ennustamisen olevan vaikeaa, koska niiden kulkuun vaikuttavat miljoonat parametrit ja ehdot. Valuuttakurssien taloudellisen merkityksellisyyden sekä niiden kehityksen ennustamisen haastavuuden vuoksi aiheutta on tutkittu laajasti ja ennustamiseen liittyviä käytäntöjä on paljon (Ahmed ym. 2020). Laajasta valuuttakurssien ennustamiseen liittyvästä tutkimuskentästä on havaittavissa kaksi ennustemenetelmien

pääsuuntausta; tekninen analyysi ja fundamentaalinen analyysi (Ahmed ym. 2020). Yksinkertaisimmillaan tekninen analyysi kuvataan menetelmäksi, joka hyödyntää hintojen historiallista dataa tulevaisuuden hintojen ennustamiseksi (Neely, Weller & Dittmar 1997). Fundamentaalisella analyysillä tarkoitetaan taas analyysia, jossa pyritään hyödyntämään talouteen liittyviä tietoja monipuolisesti tarkastellen niiden vaikutusta valuuttakursseihin (Oberlechner 2001). Seuraavaksi esitellään teknistä analyysia valuuttakurssien ennustamisessa.

2.1.1 Tekninen analyysi

Kuten todettua, yksinkertaisimmillaan tekninen analyysi voidaan kuvata menetelmäksi, joka hyödyntää hintojen historiallista dataa tulevaisuuden hintojen ennustamiseksi. Teknisen analyysin keinoja on kehitetty jo vuosikymmeniä, ja se on ollut laajasti rahoituksen ammattilaisten käytössä. Alun perin teknisen analyysin keinot on rakennettu osakemarkkinoiden hintojen ennustamista varten, josta se on siirtynyt muiden varojen hintojen ennustamisen keinoksi. Valuuttakurssien ennustamisessa teknisen analyysin keinot on otettu käyttöön, kun kelluvia valuuttoja on otettu laajalti käyttöön 1970-luvulta alkaen ja hinnat ovat siirtyneet markkinoiden määriteltäviksi. (Neely, Weller & Dittmar 1997) Voidaan siis todeta, että teknisen analyysin keinot ovat olleet jo pitkään myös valuuttakurssien ennustamisessa käytössä.

Teknisen analyysin keinot valuuttakurssien ennustamisessa ovat kuitenkin kohdanneet tutkijoiden piirissä epäilyksiä aiempina vuosikymmeninä (Neely, Weller & Dittmar 1997). Tekniseen analyysiin voidaan siten liittää myös heikkouksia näiden epäilyjen perusteiksi. Heikkouksiksi voidaan tulkita esimerkiksi teknisen analyysin kyvyttömyys käyttää muuta tietoa kuin historiallisia hintatietoja ennusteiden rakentamisessa. Fundamentaalin analyysin sijaan pystyy hyödyntämään hintahistorian ulkopuolista dataa, kuten geopolitiikkaan, taloustilanteeseen sekä kaupan käyntiin ja esimerkiksi uutisointiin liittyvää aineistoa. (Hu, Liu, Bian, Liu & Liu 2018) Teknisen analyysin käyttö hintojen ennustamisessa on tutkimuksessa myös yhdistetty siihen, että teknisen analyysin käyttö itsestään voi vaikuttaa markkinoiden käyttäytymiseen, koska markkinoiden toimijat käyttävät sitä laajasti. Teknisen analyysin käyttö on saattanut esimerkiksi aiheuttaa 1980-luvulla US dollarin yliarvostusta. (Lui & Mole 1998)

Tekninen analyysi on kuitenkin laajasti alan ammattilaisten käytössä sekä saavuttanut laajaa kiinnostusta valuuttakurssien ennustamiseen liittyvän tutkimuksen piirissä. Teknisen analyysin käyttöä valuuttakurssien ennustamisessa tutkitaan koko ajan lisää, koska myös tekniset menetelmät kehittyvät (esimerkiksi koneoppiminen). Tekniseen analyysin keinoilla voidaan nähdä siten olevan vahvuuksia, joihin fundamentaalisilla ennustemenetelmillä ei pääse. Esimerkiksi Luin ja Molen (1998) tutkimuksen perusteella käyttäjät kokevat teknisen analyysin vahvuusiksi teknisen analyysin kyvyn ennustaa trendejä ja hintojen muutosten käännekohtia. Pfahler (2022) taas toteaa, että fundamentaalisten analyysien heikkouksiin kuuluu niiden kyvyttömyys ennustaa lyhyen aikavälin valuuttakurssiliikkeitä ja teknisen analyysin keinoihin kuuluvat satunnaiskulun mallit suoriutuvat tehtävässä paremmin. Huangin (2022) mukaan perinteisiin rahoituksen ennustemenetelmiin pohjautuvien mallien (fundamentaalisien analyysimenetelmien), jotka eivät huomioi teknisten analyysin keinoja, on vaikea tehokkaasti mukautua rahoituksen aikasarjojen stokastisiin eli satunnaisuuteen perustuviin ominaisuuksiin. Teknisen analyysin avulla aikasarjoista voidaan havaita myös nämä stokastiset ominaisuudet (Huang 2022).

Yleisesti ottaen valuuttakurssien ennustamisen tekninen analyysi voidaan toteuttaa monin eri tavoin, ja menetelmien yksi osa-alue pohjautuu stokastisiin menetelmiin, joissa hyödynnetään aikasarjoja (Özorhan ym. 2019). Teknisen analyysin piiriin kuuluvat siten myös stokastiset differentiaaliyhtälömallit, jotka ovatkin laajasti hyödynnettävissä rahoituksen saralla, koska ne pystyvät huomioimaan tapahtumiin perustuvaa stokastisuutta (Huang 2022). Mainittakoon kritiikkinä SDY-malleja kohtaan, että esimerkiksi Ayitey Junior ym. (2023) mukaan joissain tutkimuksissa on osoitettu koneoppimisen tuottamien algoritmien onnistuvan paremmin rahoitusmarkkinoiden ennustamisessa kuin useimmat perinteiset stokastiset menetelmät. Tämän tutkimuksen tavoitteen mukaisesti seuraavaksi kuitenkin syvennyttään stokastisiin differentiaaliyhtälöihin, ja niiden käyttöön valuuttakurssien ennustamisessa.

2.2 Stokastisten differentiaaliyhtälöiden määritelmä ja käyttökohteet

Matemaattisiin malleihin kuuluvat SDY-mallit eli stokastiset differentiaaliyhtälömallit (engl. stochastic differential equation models, SDE models) ovat hyödynnettävissä eri tieteenoilla, kuten fysiikassa, biologiassa, taloustieteessä sekä rahoituksessa. Esimerkiksi modernin rahoituksen teoriaan liittyvä Black-Scholes-kaava, jota hyödynnetään esimerkiksi optioiden hinnoittelussa, pohjautuu stokastiseen differentiaaliyhtälöön. (Sauer 2013) Optio on arvopaperi, johon liittyy oikeus ostaa tai myydä se tietyillä ehdoilla sovittuna ajankohtana (Neftci 2000, 7). Stokastisia differentiaaliyhtälöitä hyödynnetään rahoituksessa myös esimerkiksi osakkeiden hintojen ennustamisessa, mihin tiedettävästi liittyy vahvasti satunnaisuus (Yang, Zheng & Mookerjee 2019). Muita käyttökohteita matemaattisen rahoituksen saralla ovat esimerkiksi korkotasojen ja volatilitietin määrittäminen (Chin, Nel & Olafsson 2014, 113).

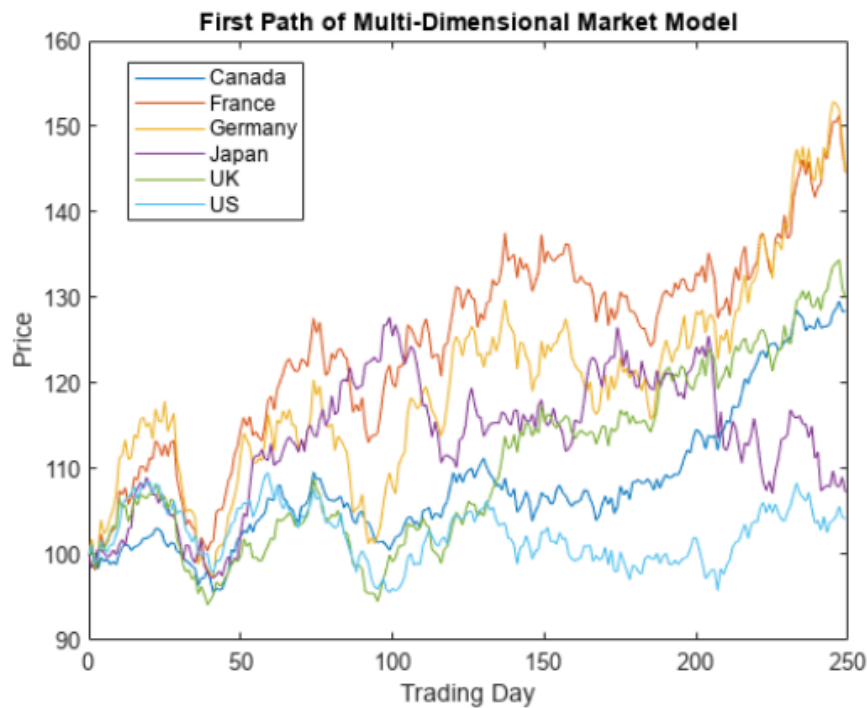
Yleisesti ottaen stokastiset prosessit (engl. stochastic processes) kuvaavat tarkasteltavan asian muuttumista ajan kuluessa, kun asia sisältää satunnaiskomponentin (engl. stochastic component). Stokastista prosessia tutkitaan siten tarkastelemalla kohteena olevan muuttujan saamia arvoja eri ajan hetkillä. (Lindsey 2004, 3) Stokastinen differentiaaliyhtälö (engl. stochastic differential equation, SDE) tarkoittaa differentiaaliyhtälöä, jonka termeistä ainakin yksi sisältää satunnaisuutta (Chin ym. 2014, 113).

Tyypillinen stokastisen differentiaaliyhtälön matemaattinen malli voidaan esittää kaavalla

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)d\beta_t, \quad (1)$$

jossa dX_t mittaa satunnaismuuttujan arvonmuutosta, t kuvaa ajan hetkeä, $\mu(X_t, t)$ määritellään ajautuma-/trenditermiksi (engl. drift), dt mittaa mielivaltaisen pienen tarkasteluajavälin pituutta, $\sigma(X_t, t)$ määritellään volatilitietiksi ja $d\beta_t$ mittaa tavallisen Brownin liikkeen (engl. Brownian motion, BM) arvonmuutosta. (Chin ym. 2014, 95; Neisy & Peymany 2011; Alvarez & Koskinen 2007, 40). Tässä SDY-mallin muodossa voidaan esittää monia rahoitukseen liittyviä malleja, kuten log-normaalisti jakautuneiden hintojen satunnaiskulun malleja sekä stokastisen volatilitietin malleja (Chin ym. 2014, 95). Volatilitietillä kuvataan

taloustieteessä aikasarjan satunnaisen muuttujan vaihtelua ja matemaattisesti se kuvaa keskihajontaa (Alhaguan 2022). MathWorksin (2023) luomassa kuvassa 2 havainnollistetaan tavanomaisen SDY-mallin avulla tuotettua mahdollista hinnan kehitystä.



Kuva 2. Esimerkkikuva SDY-mallin tuottamien hintaennusteiden simulaatioista Euler menetelmän avulla luotuna (MathWorks 2023).

Malliin sisältyvä Brownin liike on itsessään stokastinen prosessi. Mainittakoon, että Brownin liikkeellä on sama käyttäytyminen kuin Wiener-prosessilla, joka on siten myös stokastinen prosessi. Wiener-prosessin käsitettä käytetään myös usein SDY-mallien yhteydessä, koska Brownin liikkeen ja Wiener-prosessin tarkoitus malleissa on sama. Hienoisena erona voidaan sanoa olevan, että Brownin liike korostaa fyysisiä lähtökohtia ja Wiener-prosessi matemaattisia. Käsitteitä käytetään kuitenkin ristikkäin, koska matemaattiset ominaisuudet ovat liki samat. Käsitteiden tarkempi määritelmä sisältää esimerkiksi oletuksen normaalijakautuneisuudesta, jatkuvista poluista, stationaarisista lisäyksistä sekä lisäysten riippumattomuudesta. (Chin ym. 2014, 51–54) Tässä työssä on päädytty käyttämään Brownin liikkeen käsitettä, koska käsite on yleisesti käytössä matemaattisen rahoituksen saralla.

Taloudellista kvantitatiivista analyysia tehtäessä Brownin liikkeen avulla saadaan stokastiseen differentiaaliyhtälöön sattumanvaraisuus rakennettua historiallisesta datasta, kuten valuuttakursseista tai osakkeen hinnoista. Brownin liike käsittelee aineistoa kuin määrät olisivat satunnaisia. Näin SDY-malliin saadaan tallennettua satunnaisuus, minkä myötä satunnaisuus puolestaan saadaan yhdistettyä ennustettavien arvojen laskentaan. Koska rahoitusmallit ovat luonteeltaan stokastisia ja jatkuvia, Brownin liikettä käytetään siis yleensä ilmaisemaan SDY-mallin satunnaiskomponentti. (Chin ym. 2014, 51)

SDY-mallien ratkaisemiseksi on erilaisia menetelmiä. Ne perustuvat tavallisiin differentiaaliyhtälöihin, mutta ne on mukautettu vastaamaan stokastisuuteen. Tavanomaisiin differentiaaliyhtälöihin verrattuna SDY-mallien ratkaisut ovat satunnaisia, kun taas sopivien alkuehtojen täytyessä tavanomaiset differentiaaliyhtälöt saattavat saada yksiselitteisen ratkaisun. (Sauer 2013) Huomioiden tämän tutkielman tavoite, laajuus sekä empiriaosuuden toteutus, jossa hyödynnetään teknisen laskennan ohjelman valmiita funktioita, SDY-mallin sekä sen ratkaisemisen tarkemmat perustelut rajataan tutkielman ulkopuolelle.

Seuraavassa kahdessa alaluvussa esitellään empiriaosuudessa hyödynnettävät stokastisiin differentiaaliyhtälöihin kuuluvat mallit geometrisen Brownin liikkeen malli sekä Hestonin malli. Mallit ovat valikoituneet tieteellisistä julkaisuista siten, että niihin löytyvät valmiit funktiot Matlab-ohjelmasta, jota käytetään tutkielman empiriaosuudessa, ja että niihin on yhdistetty artikkeleissa toistuvasti valuuttakurssien ennustaminen. Muita tunnettuja rahoituksessa hyödynnettäviä SDY-malleja ovat esimerkiksi Batesin 1996 esittelemä malli sekä Hestonin ja Nandin vuonna 2000 esittelemä malli (Moyaert & Petitjean 2011), vain muutamia mainituksi.

2.2.1 Geometrisen Brownin liikkeen mallin määritelmä ja käyttökelpoisuus

Geometrisen Brownin liike (engl. geometric Brownian motion, GBM) on yksi SDY-malli, jota käytetään valuuttakurssien ennustamisessa. Geometrisen Brownin liike on Brownin liikkeen muoto, joka ei voi saada negatiivisia arvoja, joten se on paremmin hyödynnettävissä matemaattisen rahoituksen mallinnuksissa kuin alkuperäinen Brownin liike. (Alhagyan 2022) Geometrisen Brownin liikkeen malli voidaan määritellä seuraavasti: Stokastisen prosessin X_t todetaan seuraavan geometrista Brownin liikettä, jos se toteuttaa seuraavan stokastisen differentiaaliyhtälön

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t d\beta_t, \quad (2)$$

jossa trenditermi $\mu \in \mathbb{R}$ ja volatilitteetti $\sigma > 0$ ovat tunnettuja vakioita (Alhagyan 2022; Alvarez & Koskinen 2007, 40). Muut komponentit noudattavat kaavan (1) selitteitä.

Esimerkiksi Alhagyan (2022) on tutkinut valuuttakurssien ennustamisen onnistumista geometrisen Brownin liikkeen mallin avulla. Alhagyan (2022) toteaa geometrisen Brownin liikkeen mallin olevan yksi tärkeimpiä valuuttakurssien ennustamisessa käytettyjä malleja, mutta mallilla voidaan nähdä kuitenkin olevan heikkouksia. Heikkouksiin liittyen Alhagyan (2022) toteaa, että yksi on se, ettei geometrisen Brownin liikkeen malli luo muistia aineistosta, jonka perusteella ennustetta rakennetaan. Yang, Fabozzi ja Bianchi (2015) taas toteavat vakioksi oletetun volatilitteetin olevan yksi heikkous, koska silloin malli olettaa, ettei markkinoiden volatilitteetillä ole vaikutusta hinnoitteluun vaikuttavaan volatilitteettiin. Moyaert ja Petitjean (2011) toteavat myös, että empiirisissä tutkimuksissa volatilitteetti on todettu vaihtelevaksi, joten oletus vakiona säilyvästä volatilitteetista ei ole todenmukainen.

Osa geometrisen Brownin liikkeen heikkouksista on suoraan liitettävissä tavalliseen Brownin liikkeeseen. Esimerkiksi Chin ym. (2014, 54) toteavat, että Brownin liikkeen sisältämän normaalijakautuneisuusoletuksen vuoksi tuotot oletetaan symmetrisiksi ja lyhythäntäisiksi, kun käytetään malleja, joihin sisältyy Brownin liike. Siten Feinstonen (1987) mukaan geometrisen Brownin liike on huono kuvaus rahoitusvälineiden hintakäyttäytymisestä, koska empiiriset valuuttakurssit näyttävät vinoutta ja korkeaa huipukkuutta, joita ei voida selittää

geometrisen Brownin liikkeen avulla. Brownin liike sisältää myös oletuksen polkujen jatkuvuudesta (Chin ym. 2014, 51–54). Kimin, Kimin, Jun ja Rin mukaan (2020) empiirisissä tutkimuksissa on kuitenkin liitetty valuuttakurssien kehitykseen olennaisesti epäjatkuvuuskohdat, niin kutsutut hyyt (engl. jumps), eikä geometrinen Brownin liike pysty ongelmitta mukailemaan valuuttakurssien kehitystä. Stojkoski, Sandec, Basnarkova, Kararev ja Metzler (2020) toteavat myös, että yhä useammat tutkimukset osoittavat, ettei geometrisen Brownin liikkeen mallin yksinkertainen liikerata vastaa riittävän hyvin varojen hinnoittelun kulkuun.

Mallin saamasta kritiikistä huolimatta Alhaguan (2022) ja Yangin ym. (2015), sekä esimerkiksi Ozer-Imerin ja Ozkan (2014) tutkimuksissa todetaan, että geometrisen Brownin liikkeen malli liitetään edelleen matemaattisen rahoituksen tärkeimpiin malleihin. Ozer-Imerin ja Ozkan (2014) esittävät esimerkkinä, että jo aiemmin tutkielmassa mainitun Blackin ja Scholesin (1973) ja Mertonin (1973) kehittämän Black-Scholes-malli pohjautuu geometrisen Brownin liikkeen malliin. Myös Stojkoskin ym. (2020) toteavat, että edelleen esimerkiksi klassinen optioiden hinnoittelun teoria olettaa rahoitusvarojen arvon seuraavan geometrista Brownin liikettä viitaten Black-Scholes-malliin.

Vaikka Kim ym. (2020) toteavat, että geometrinen Brownin liike ei pysty ongelmitta vastaamaan valuuttakurssien kehitykseen, he ovat kuitenkin omassa tutkimuksessaan hyödyntäneet Brownin liikettä mallinuksissaan. He ovat tutkineet valuuttaoptioiden hinnoittelua eräänlaisella Brownin liikkeen mallilla, johon on liitetty hyyt. Tutkimuksen malli on rakennettu Brownin liikkeen pohjalta tehden siihen lisäyksiä, tavoitteena varojen hinnoittelun parempi onnistuminen. Myös Stojkoskin ym. (2020), jotka esittävät, että empiriaan verrattuna geometrinen Brownin liike ei yksinkertaisuudessaan pysty riittävän hyvin mallintamaan hintojen kulkua, keskittyvät kuitenkin optioiden hinnoitteluun liittyvässä tutkimuksessaan geometriseen Brownin liikkeen malliin verraten sen suoriutumista geometriseen Brownin liikkeen malliin, johon on tehty muunnoksia. Tutkimuksista saakin oletuksen, että kritiikistä huolimatta niin Brownin liike kuin geometrisen Brownin liikkeen malli itsessään edelleen kiinnostaa tutkijoita. Näitä malleja ei kuitenkaan tässä tutkielmassa käsitellä tarkemmin, vaan niiden avulla pyrittiin esimerkin omaisesti esittämään niin Brownin liikkeen kuin geometrisen Brownin liikkeen merkitystä matemaattisen rahoituksen saralla.

2.2.2 Hestonin mallin määritelmä ja käyttökelpoisuus

Heston (1993) esitteli artikkelissaan “A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options” varojen hinnoitteluun tarkoitettua stokastisen volatilitietin SDY-mallin. Mallin avulla voidaan pyrkiä ennustamaan esimerkiksi osakkeiden tai valuuttojen hintoja. Malli tunnetaan yleisesti nimellä Hestonin malli (engl. Heston model), ja sitä käytetään nykyisin laajasti erilaisten rahoitusinstrumenttien hinnoittelussa (Guo & Hung 2015). Mallissa volatilitietti huomioidaan ajassa vaihtelevana, joten sen voidaan katsoa suoriutuvan paremmin rahoituksen mallintamisessa kuin esimerkiksi Black-Scholes-mallin, jossa volatilitietti oletetaan ajassa vakioksi (Moyaert & Petitjean 2011). Hestonin mallissa hinnan muutosta kuvataan kaavalla

$$dX_t = \mu X_t dt + \sqrt{V_t} X_t d\beta_{1,t}, \quad (3)$$

jossa μ määritellään trenditermiksi, $\sqrt{V_t}$ määritellään hetkelliseksi volatilitietiksi ja $d\beta_{1,t}$ mittaa Brownin liikkeen arvonmuutosta.

Mallissa volatilitietin muutosta kuvataan kaavalla

$$dV_t = K(\theta - V_t)dt + \sigma \sqrt{V_t} d\beta_{2,t}, \quad (4)$$

jossa V_t kuvaa hetkellistä varianssia, θ on pitkän aikavälin varianssi, K kuvaa palautumisnopeutta pitkän aikavälin varianssiin, ja σ on varianssin volatilitietti, jota kutsutaan myös volatilitietin volatilitietiksi. σ kontrolloi siten varianssiprosessin volatilitiettiä kaavassa. (Moyaert & Petitjean 2011; Guo & Hung 2015) Mallin sisältämät termit $\beta_{1,t}$ ja $\beta_{2,t}$ kuvaavat tavanomaista Brownin liikettä, ja niiden välillä oletetaan olevan korrelaatio ρ , mitä kuvataan kaavalla

$$\text{corr}(d\beta_{1,t}, d\beta_{2,t}) = \rho dt \quad (5)$$

(Moyaert & Petitjean 2011).

Hestonin mallin julkaisun jälkeen stokastisen volatilitietin mallit ovat herättäneet laajaa kiinnostusta (Guo & Hung 2015). Stokastisen volatilitietin malleja on kehitetty paljon

hinnoittelun paremman suoriutumisen vuoksi. Useiden mallien heikkous kuitenkin on, ettei niitä usein voida esittää suljetussa muodossa, minkä vuoksi niiden tuottamat edut aiheuttavat kustannuksia käyttöönotossa ja kalibroinnissa. Hestonin mallin merkittävä etu on siten sen suljettu muoto, mikä helpottaa käyttöönottoa. (Moyaert & Petitjean 2011)

Alfeus ja Collins (2023) esittävät, että suljetun mallin etua voidaan perustella siten, että jos matemaattinen malli ei ole suljetussa muodossa, tarvitaan avuksi numeerisia menetelmiä. Niiden seurauksena on laskennan hitaus etenkin tapauksissa, joissa hinnoittelumalli on kalibroitava likvidien hintatietojen mukaan (Alfeus & Collins 2023). Tästä seuraa aiemmin mainitut kustannukset ei suljetun mallin käyttöönottoon ja kalibrointiin liittyen. Hinnoittelumallien valinnassa joudutaankin miettimään laskennan numeerisen tarkkuuden ja laskennan raskauden välillä (Alfeus & Collins 2023). Haataja ym. (2002, 25–26) kuvailevat numeeristen menetelmien olevan väline matemaattisten tehtävien käsittelyyn ja ratkaisuun kone-laskennassa, ja niillä saadun ratkaisun olevan likiarvo alkuperäisen tehtävän ratkaisulle.

Suljetun mallin eduista huolimatta Hestonin malliin voidaan liittää haasteita, jotka liittyvät yleisesti stokastisen volatiliteetin SDY-malleihin Esimerkiksi Neisy ja Peymany (2011) esittävät, että vaikka stokastisen volatiliteetin SDY-mallien sovelluskenttä on laaja, niiden käyttöönotto kohtaa haasteen sopivimman mallin löytämisessä sekä parametrien määrittämisessä. Myös Huang (2022) toteaa yleisesti SDY-mallien parametrien määrittämisen olevan vaikeaa, mikä liittyy SDY-mallien matemaattisen teorian monimutkaisuuteen.

Mallin parametrien estimointiin liittyen myös Cuin, del Baño Rollin ja Germanon (2017) toteavat Hestonin mallin parametrien kalibrointiin liittyvässä tutkimuksessaan, että Hestonin mallin parametrien määrittäminen on mallin käyttökelpoisuuden kannalta tärkeää, koska se vaikuttaa merkittävästi hintaennusteiden tarkkuuteen. Toisaalta he nostavat tärkeäksi asiaksi myös kalibroinnin nopeuden. Lisäksi he toteavat yleisesti ottaen ennustemalleihin liittyen, että kehittyneempi malli voi havainnollistaa todellisuutta paremmin kuin yksinkertaisempi malli. Ja että kehittyneemmän mallin käyttöönotto ja kalibrointi ovat usein kuitenkin haastavia toteuttaa, etenkin rahoitusinstrumenttien hinnoitteluun ja riskin arviointiin liittyvissä matemaattisissa malleissa.

3 Data ja metodologia

Tässä luvussa tullaan käymään läpi empiirisen tutkimuksen datan kuvailu ja esitellään käytettyä metodologiaa. Ensimmäisessä alaluvussa esitellään siten aineistoa ja sen valintaa. Ja seuraavassa alaluvussa kuvaillaan käytettyä tutkimusmenetelmää.

3.1 Data

Empiriaosuudessa käytettävä data on haettu Euroopan keskuspankin (2023) julkisesta datakannasta ”Statistical Data Warehouse”. Datana käytetään 3.1.2022-28.2.2023 välistä päivittäistä euron ja Yhdysvaltain dollarin välistä valuuttakurssia. Data on saatavissa tietokannasta 4 desimaalin tarkkuudella. Yhdysvaltain dollari ja euro ovat olleet vuonna 2021 vaihdetuimmat valuutat globaaleilla valuuttamarkkinoilla (Euroopan keskuspankki 2022b, 18), minkä vuoksi valuuttakurssipari on valittu aineistoon.

Datan aikajakso ja havaintojen frekvenssi on valittu aiempien tutkimusten pohjalta, joissa tekniseen analyysiin perustuvissa valuuttakurssiennusteissa historiallisena datana käytetään usein lyhyen aikavälin dataa päivittäisistä hinnoista. Esimerkiksi Lui ja Mole (1998) esittävät teknisen ja fundamentaalisen analyysin käyttöön liittyvässä kyselytutkimuksessaan, että vastaajat toteavat käyttävänsä useimmiten teknisen analyysin historiallisena datana 12 kuukauden ajanjaksolta päivittäisiä valuuttakurssinoteerauksia. Kim ym. (2020) ovat taas hyödyntäneet omassa valuuttaoptioiden hinnoitteluun liittyvässä tutkimuksessaan kolmen kuukauden ajanjaksolta historiallista dataa toteutuneista valuuttaoptioiden hinnoista. Ja Beneki ja Yarmohammadi (2014) noin seitsemän kuukauden päivittäisiä valuuttakurssinoteerauksia.

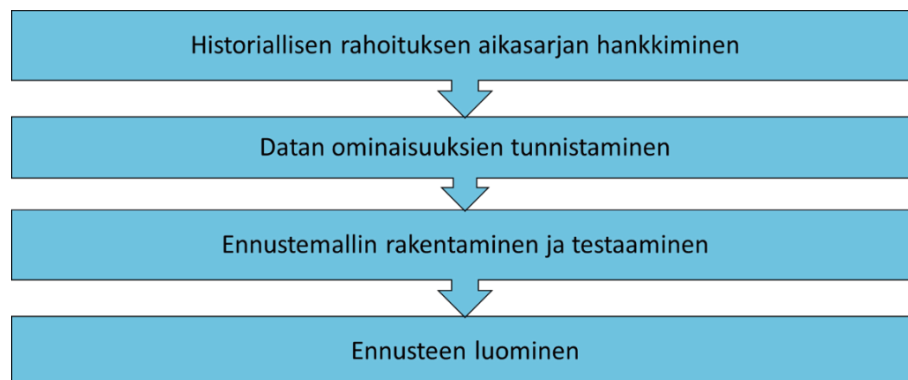
Tutkielmassa käytettävä aikajakso on valittu sillä ajatuksella, että se vastaisi mahdollisimman hyvin nykyhetkeä, millä tavoin pyritään replikoimaan esimerkiksi yritysten kohtaamia tilanteita ennusteiden luomisessa. Aineiston valintaan liittyvät asiat huomioiden aineiston valinnan ei voida sanoa perustuvan satunnaisotantaan, vaan tutkimuksen aineistona

käytetään harkinnanvaraista otosta. Eli näytettä, joka antaa tietoa tutkittavasta ilmiöstä näytteessä (Nummenmaa 2021, 66).

Aineisto jaetaan siten, että historiallisena datana käytetään havaintoja aikaväliltä 3.1.2022-22.12.2022, eli noin kahdeksatoista kuukaudelta. Ja 23.12.2022-28.2.2023 väliset havainnot, eli valuuttakurssit noin kahden kuukauden ajalta, valitaan ennusteen vertailuarvoiksi. Kahden kuukauden ennustehorisontti pohjautuu aiemmissä tutkimuksissa esitettyihin horisontteihin. Esimerkiksi Oberlechnerin (2001) mukaan teknisen analyysin käytön tärkeys korostuu käyttäjille, kun ennustehorisonttina on alle kolmen kuukauden ajan jakso. Samansuuntaista tulosta esittävät myös Gehrig ja Menkhoff (2006) sekä Lui ja Mole (1998). Beneki ja Yarmohammadi (2014) toteavat omassa valuuttakurssien ennustamiseen liittyvässä tutkimuksessa tehneensä ennusteen noin kolmen kuukauden ajan jaksolle.

3.2 Metodologia

Empiirinen tutkimus koostuu geometrisen Brownin liikkeen ja Hestonin mallin tuottamien testaamisesta ja ennusteiden vertailusta. Mallinnuksessa hyödynnetään aikasarja-analyysia käyttäen Matlab-ohjelman valmiita funktioita. Huang (2022) toteaa, että rahoituksellisen aikasarjaennusteen luomisessa voidaan tunnistaa tyypillisesti neljä askelta: historiallisen aikasarjan hakeminen, historiallisen datan ominaisuuksien tunnistaminen, tunnistettujen ominaisuuksien asettaminen ennustemalliin mallin luomiseksi ja testaamiseksi sekä lopullisen ennusteen tuottaminen. Kuvassa 3 havainnollistetaan esitetyt vaiheet:



Kuva 3. Tavanomainen prosessi rahoituksen aikasarjaennusteen luomisessa (mukaan Huang 2022).

Tarkemmin aikasarja-analyysia tutkimusmenetelmänä voidaan havainnollistaa esimerkiksi Nummenmaan (2021, 461) toteamaan tapaa siten, että aikasarjojen avulla voidaan arvioida erilaisten prosessien kehityssuuntaa ja tulevia muutoksia sekä laatia tulevaisuutta koskevia ennusteita. Aikasarja voidaan aineistona määritellä yksinkertaisesti toteamalla sen olevan ajan suhteen järjestetty havaintoarvojen joukko. Aikasarjoja analysoitaessa on otettava huomioon havaintoarvojen järjestys, koska tyypillisesti havainnot ovat keskenään riippuvia eli autokorreloituneita. Aikasarjatutkimuksessa aineistosta pyritään löytämään tilastollisten menetelmien avulla säännönmukaisuuksia. Aikasarja voi olla jatkuva tai diskreetti, mutta useimmiten tarkalleen määriteltäessä havainnot on kerätty diskreetisti eli esimerkiksi päivittäin. (Nummenmaan 2021, 461)

Aikasarja-analyysin perustavoitteena on aineiston tiivistäminen yksinkertaisempaan muotoon, missä kohdin hyödynnetään esimerkiksi erilaisten aikasarjaa kuvaavien komponenttien tunnistamista aikasarjasta. Tyypillisesti nämä komponentit ovat taso, trendi, kausivaihtelu ja suhdannevaihtelu. (Nummenmaan 2021, 461) Tässä tutkielmassa datan ominaisuuksien kuvailussa tullaan aineistolle määrittämään kuvailevat trendit. Trendit lasketaan aineistosta yksinkertaisen lineaarisen regressiosuoran kaavalla. Kaavan matemaattinen esitys on

$$\hat{y} = a + bx, \quad (6)$$

jossa \hat{y} on selitettävän muuttujan y :n ennustettu arvo, a on vakiotermin ja b on kulmakerroin ja x on selittävämuuttuja (Nummenmaa 2021, 440). Oletus on, että kun selittävän muuttujan arvot kasvavat tai pienenevät yhden yksikön verran, selitettävän muuttujan arvot kasvavat tai pienenevät aina tietyn vakion verran. (Nummenmaa 2021, 440)

Aikasarjassa esiintyvää vaihtelua, jota ei voida selittää edellä mainituilla tasolla, trendillä, kausivaihtelulla ja suhdannevaihtelulla tai muilla komponenteilla, kutsutaan satunnaisvaihteluksi. Aikasarjan tulevaa käyttäytymistä voidaan pyrkiä mallintamaan esimerkiksi aikasarjasta havaittavilla ominaisuuksilla. Mallinnuksen tavoitteena on määrittää aikasarjasta selälaiset parametrit, joilla aineistoa voidaan kuvata mahdollisimman tarkasti. Mallien arvioinnissa voidaan hyödyntää esimerkiksi jäännöstermien tarkastelua, minkä avulla tarkistetaan sitä, toimiiko malli yhtä hyvin kaikissa aikasarjan pisteissä. Lisäksi mallin antamien ennusteiden tarkastelu on niiden järkevyyden arvioimiseksi tärkeää. (Nummenmaan 2021, 461)

3.2.1 Mallien parametrien laskenta

Parametrit, jotka estimoitiin historiallisesta aineistosta, laskettiin seuraavaksi esiteltävien kaavojen avulla. Parametrien estimointiin on erilaisia menetelmiä. Työn laajuus huomioiden estimointia päätettiin yksinkertaistaa, minkä vuoksi kaavat valikoituivat käytettäväksi.

Aineistosta laskettujen parametrien pohjana toimivat prosentuaaliset päivätuotot, R_{t+1} , (engl. realized return), jotka laskettiin kaavalla

$$R_{t+1} = \frac{X_{t+1}}{X_t} - 1, \quad (7)$$

jossa $\frac{X_{t+1}}{X_t}$ kuvaa valuutan hintaa suhteessa edeltävän päivän hintaan (Berk & DeMarzo 2017, 357).

Valuuttakurssien päivittäinen keskituotto, \bar{R} , (engl. average annual return) laskettiin kaavalla

$$\bar{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t, \quad (8)$$

jossa T kuvaa havaintojen lukumäärää ja R_t on t :s päivätuotto (Berk & DeMarzo 2017, 359).

Lopuksi trenditermi μ muodostettiin annualisoimalla päivätuottojen keskituotto efektiivisen vuosituoton (engl. effective annual rate, EAR) kaavan avulla:

$$\text{Efektiivinen vuosituotto} = (1 + \bar{R})^n - 1, \quad (9)$$

jossa \bar{R} on keskituotto lasketulle ajanjaksolle (esimerkiksi kuukausi- tai päivätuotto) ja n on periodien määrä vuodessa (esimerkiksi 6 kuukauden tuoton periodien määrä n on 2). (Berk & DeMarzo 2017, 176)

Pitkän aikavälin varianssi θ muodostettiin annualisoimalla päivittäinen varianssi siten, että se kerrottiin vuodessa olevien kaupankäyntipäivien määrällä eli 252. Päivittäisten tuottojen

variassi, $Var(R)$, (engl. variance) laskettiin käyttäen realisoituneita tuottoja käyttäen varianssin kaavaa

$$Var(R) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R})^2, \quad (10)$$

jossa R on realisoitunut tuotto, \bar{R} , on tuottojen keskiarvo, T havaintojen lukumäärä (Berk & DeMarzo 2017, 361).

Tuottojen volatilitteetti σ muodostettiin laskemalla päivätuottojen annualisoitu volatilitteetti, $Vol(R)$, (engl. volatility), tai toisin ilmaistuna päivätuottojen keskihajonta (engl. standard deviation, $SD(R)$), kaavalla

$$Vol(R) = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R})^2} \times \sqrt[2]{252}, \quad (11)$$

jossa tuottojen varianssista otetaan neliöjuuri ja se kerrotaan vuodessa olevien kaupankäyntipäivien lukumäärällä (Berk & DeMarzo 2017, 361).

3.2.2 Mallien tuottamien simulointien arviointi

Mallien tuottamia ennusteita tullaan arvioimaan graafisen tarkastelun ja epäparametrisen testin avulla sekä numeerisilla arvoilla. Tutkimuksessa epäparametrisen testin avulla testataan simuloitujen ennusteiden ja alkuperäisen datan jakaumien samankaltaisuutta. Epäparametrisenä testinä tullaan käyttämään Mann-Whitney-Wilcoxonin testiä, joka on käytettävissä Matlabissa ranksum-funktiolla. Tässä tutkimuksessa testin merkitsevyytensä pidetään 5 % merkitsevyytensä. Merkitsevyytensä määrittää todennäköisyyden sille, että nollahypoteesi hylätään, vaikka se on todellisuudessa paikkansa pitävä (Tampereen yliopisto 2023). Nummenmaan (2021, 368) toteaa, että kyseinen testi perustuu järjestyslukuihin ja vertaa tutkittavan muuttujan luokkien mediaaneja. Epäparametriin testeihin eivät liity tiukat oletukset havaittujen muuttujien jakaumien muodosta. Esimerkiksi Mann-Whitney-Wilcoxonin testi ei ole jakaumien normaaliutta. Testin nollahypoteesina on, että muuttujien järjestyslukujen jakaumat ovat samankaltaiset. (Nummenmaa 2021, 368–381)

Tutkimuksessa muuttujien normaalijakautuneisuutta testataan Kolmogorov-Smirnovin testillä, joka on Matlabissa käytettävissä kpsstest-funktiolla, merkitsevyytasona on 5 %. Testi on yleisimpiä normaalijakaumatestejä, ja sen nollahypoteesina on, että testattava muuttuja on normaalijakautunut (Nummenmaa 2021, 275). Normaalijakautuneisuutta testataan tutkielmassa arvioidaessa dataa ja malleille sopivia testausmenetelmiä. Testauksen perusteella valittiin epäparametrinen testi mallien arviointiin. Nummenmaa (2021, 380) toteaa, että epäparametrisia testejä tulisi periaatteessa käyttää silloin, kun normaalijakaumaoletus ei toteudu. Normaalijakautuneisuuden arvioinnissa käytetään myös graafista tulkintaa sekä vinous- ja huipukkuuskertoimia. Näiden tulkintojen kokonaisuudelle voidaan antaa enemmän painoarvoa kuin pelkästään testin tulokselle. Yleisesti ottaen parametrisia testejä käytetään, koska niiden antamat tulokset ovat voimakkaampia kuin epäparametristen, ja niitä saatetaan myös käyttää, vaikka kaikki oletukset niiden käytöstä eivät toteudu. (Nummenmaa 2021, 276, 380) Tässä tutkimuksessa päädyttiin valitsemaan normaalijakaumatestausten perusteella epäparametrinen testi, koska tutkielman tuloksilla ei haeta yleistyksiä mallien suoriutumiselle.

Mallien tuottamille ennusteille tullaan laskemaan keskiarvoiset prosenttivirheet, jäännösvirrehajonnat sekä keskineliövirheet. Ennustemallien suoriutumista voidaan arvioida erilaisilla menetelmillä vertaamalla ennusteen antamia arvoja todellisiin arvoihin (Rout, Majhi, Majhi & Panda 2013). Kaksi yleistä menetelmää ovat esimerkiksi edellä mainitut keskiarvoinen prosenttivirhe (engl. mean average percentage error, MAPE) ja jäännösvirrehajonta (engl. root mean squared error, RMSE). Mitä pienemmät arvot mallit saavat ovat sitä tarkemmaksi ennustetta voidaan kuvata. Esitettyjen menetelmien matemaattiset kaavat voidaan esittää seuraavasti

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{A_i - P_i}{A_i} \right| \times 100\%, \quad (12)$$

$$RMSE = \sqrt{MSE}, \quad (13)$$

$$\text{jossa } MSE = \frac{1}{N} \sum_{n=i}^N (A_i - P_i)^2, \quad (14)$$

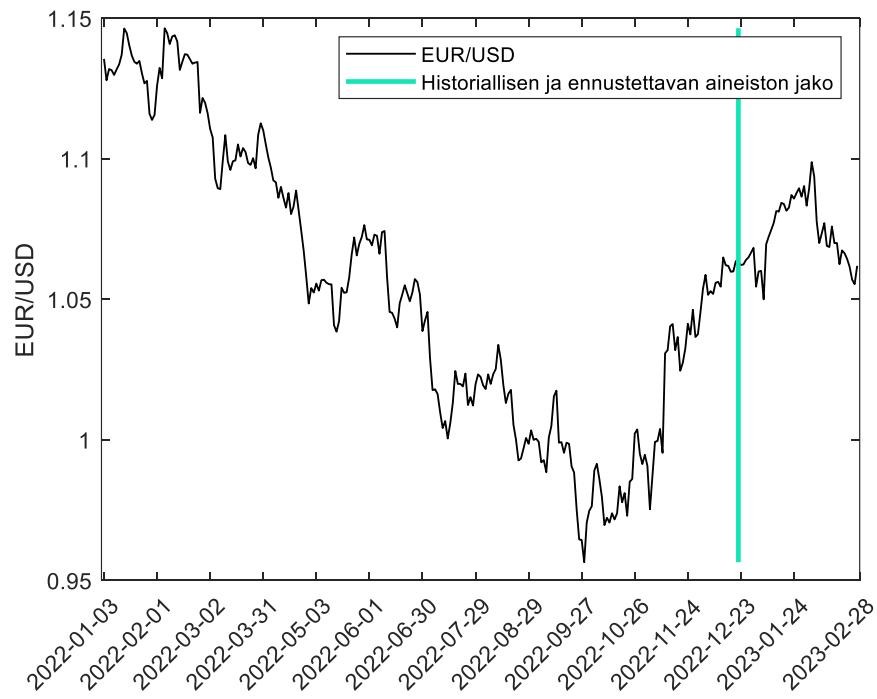
joissa A_i on toteutunut valuuttakurssi, P_i on ennustettu valuuttakurssi ja N on havaintojen määrä. (Rout, Majhi, Majhi & Panda 2013; Shen, Lee., Liu, Chang & Yang 2021) Jatkossa työssä käytetään keskiarvoisesta prosenttivirheestä lyhennettä MAPE, jäännösvirrehajonnasta RMSE ja keskineliövirheestä MSE.

4 Tulokset

Tässä luvussa esitetään empiriaosuuden analyysiprosessi. Luvussa kuvataan datan ominaisuuksia ja ennustemallien rakentamista sekä käydään läpi mallien tuottamat tulokset.

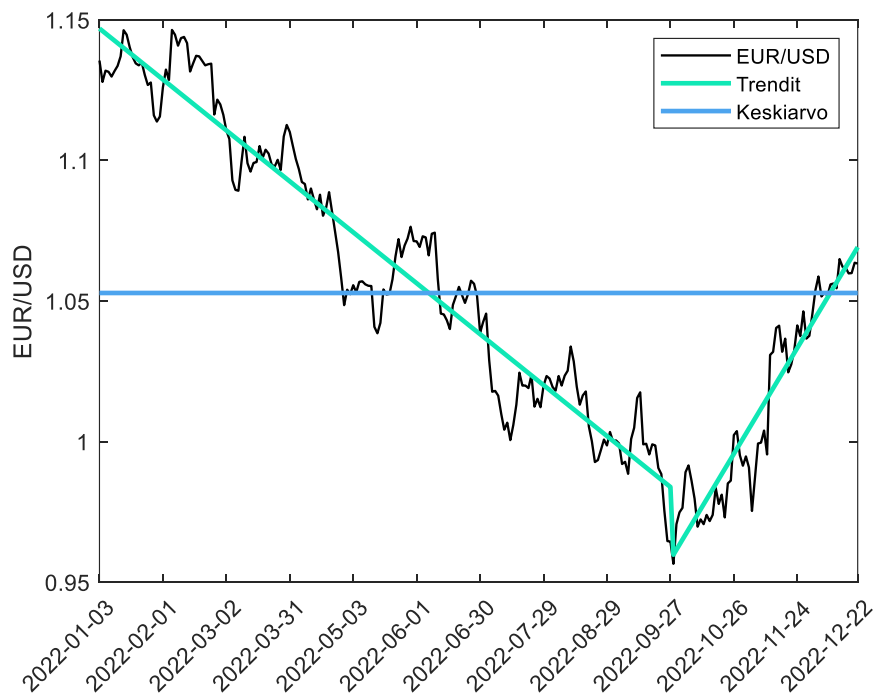
4.1 Datan ominaisuudet

Aikasarjan graafisella tarkastelulla voidaan havainnollistaa ilmiön kulkua suhteessa aikaan (Nummenmaa 2021, 463). Seuraavassa kuvasta on nähtävissä EUR/USD-valuuttakurssin kulku datan aikajaksolla. Punainen pystyviiva havainnollistaa jakoa ennustemallin luomisessa hyödynnetyn historiallisen datan ja ennustuksen vertailudatan välillä. Kaikkiaan aineistossa on havaintoyksiköitä 299, joista historiallisesti hyödynnettiin 252 havaintoyksikkö (määrä laskettu siten, että kuukaudessa valuuttakurssit noteerataan keskimäärin 21 päivänä). Ennusteen pituudeksi jää siten 47 noteerauspäivää. Aineistossa ei ollut tyhjiä havaintoja.



Kuva 4. Päivittäiset EUR/USD-valuuttakurssit 3.1.2022-28.2.2023 ajalta. Havainnollistaen lisäksi aineiston jakoa historiallisen ja ennustettavan osan välillä.

Historiallisen datan osalta kuvasta 5 voidaan havaita, että historiallinen ajanjakso sisältää ainakin kaksi suurempaa trendiä. Datan trendit on laskettu kaavan (6) avulla siten, että graafisen tarkastelun perusteella päätettiin trendien laskeminen jakaa kahteen osaan: ensimmäinen osa sisältää havainnot aikaväliltä 3.1.-27.9.2022 ja toinen osa 28.9.-22.12.2022. Ilman tätä jakoa yksinkertaisen lineaarisen regressiosuoran avulla ei pystyttäisi havainnollistamaan näitä trendejä kunnolla. Nummenmaa (2021, 440) toteaa, että regressiosuorien osuvuutta voidaan arvioida silmämääräisesti, mutta parhaan suoran määrittämisessä pitäisi käyttää myös jotain kriteerejä. Tässä työssä tämän jaon tarkkuuteen kuitenkin tyydytään, koska näitä yksinkertaisen lineaarisen regressionmallin trendejä ei tulla työssä käyttämään mallien rakentamisessa. Historiallisen datan trendien lisäksi aineiston keskiarvoa on havainnollistettu kuvassa 5.



Kuva 5. Historiallinen data, trendi- ja keskiarvokuvaajat.

4.2 Simulaatiomallien rakentaminen

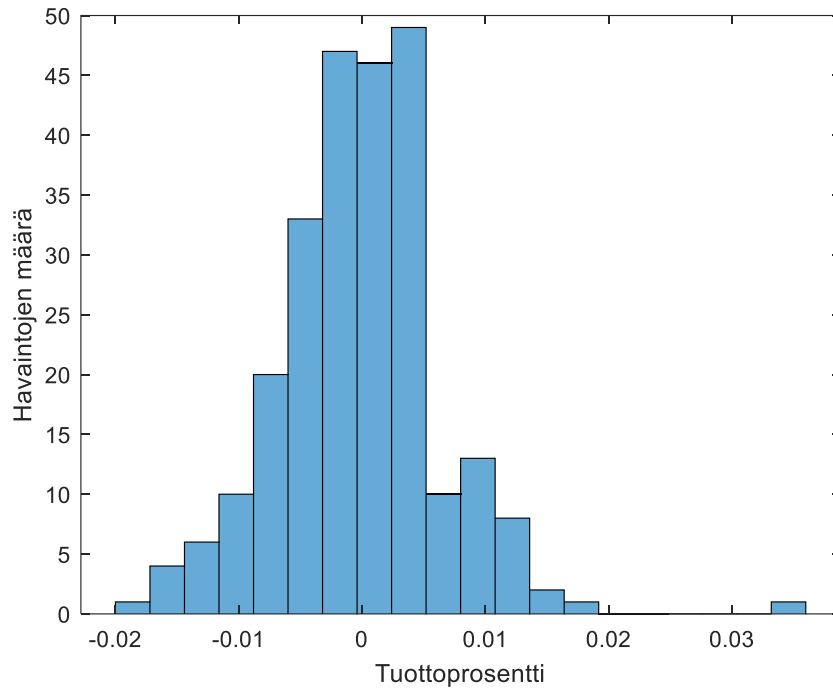
Dataan tutustumisen jälkeen vuorossa oli geometriseen Brownin liikkeeseen ja Hestonin malliin kuuluvien parametrien laskeminen ja arviointi datan pohjalta. Matlabin gbm-funktio vaatii geometriselle Brownin liikkeelle pakollisina parametreina trenditermin μ ja tuottojen volatiliteetin σ . Vastaavasti heston-funktio Hestonin mallin objektin luomiseen vaatii pakollisina parametreina trenditermin μ , pitkän aikavälin varianssin θ , varianssin volatiliteetin σ ja palautumisnopeuden pitkän aikavälin varianssiin K . Historiallisen aineiston avulla estimoitiin osa käytettävistä parametreista. Aineiston avulla estimoitiin μ , θ , geometrisen Brownin liikkeen σ ja Hestonin mallin σ . Huomioitavaa on siis, että geometrisessa Brownin liikkeessä volatiliteetin on tarkoitus kuvata tuottojen volatiliteettia ja Hestonin mallissa varianssin volatiliteettia (volatiliteetin volatiliteetti). Työn rajausten vuoksi sekä geometriselle Brownin liikkeelle, että Hestonin mallille käytetään datasta laskettua historiallista volatiliteettia. Lisäksi työn laajuus huomioiden Matlabin vaatimaksi parametriksi K päätettiin $1/252$ olettaen, että varianssin oletetaan keskimäärin kaupankäyntipäivittäin palaavaan pitkän aikavälin varianssin tasolle. Mallien parametrit on esitetty taulukossa 1. Taulukossa 1 esitetyt (Matlabissa käytetyt) parametrit ovat annualisoitu päivittäisestä valuuttakurssiaikasarjasta.

Taulukko 1. Matlabin funktioiden gbm ja heston avulla toteutetussa mallinnuksessa käytetyt parametrit.

	Trenditermi, μ	Tuottojen volatiliteetti, σ	Volatiliteetin volatiliteetti, σ	Pitkän aikavälin varienssi, θ	Palautumisno- peus pitkän ai- kavälin vari- anssiin, K
GBM	-.0841	.1032			
Hestonin malli	-.0841		.1032	.0106	.0028

GBM = geometrisen Brownin liikkeen malli

Datasta estimoidut parametrit pohjautuvat siis kaavojen (7) – (11) mukaisesti päivätuottoihin. Kuvassa 6 on esitetty päivätuottojen jakauma ja päivätuottoja kuvailevat tunnusluvut taulukossa 2.



Kuva 6. Historiallisesta datasta laskettujen päivätuottojen jakauma.

Taulukko 2. Historiallisesta datasta laskettujen päivätuottojen kuvailevat tunnusluvut. N on historiallisten päivätuottohavaintojen määrä.

N	max	min	keskiarvo	mediaani	vaihteluväli	keskihajonta	vinous	huipukkuus
251	.0356	-.0182	-.00024	-.00028	.0537	.0065	.5369	6.3003

Taulukossa 2 esitetyistä tunnusluvuista on havaittavissa, että päivätuotot ovat suurimmillaan olleet n. 3,56 % ja pienimmillään n. -1,82 %, keskiarvon ollessa n. -0,02 %. Vaihteluväliä tuotoissa on siten ollut 5,37 % -yksikköä ja keskihajonta 0,65 %-yksikköä. Päivätuottojen osalta Kolmogorov-Smirnovin testi hylkää nollahypoteesin oletuksen normaalijakautuneisuudesta p-arvolla .0000. Vinouskerroin .5369 ja huipukkuuskerroin 6.3003 yhdistettynä kuvan 6 histogrammiin tukevat testauksen tulosta siitä, että jakauma ei täytä normaalijakautuneisuuden ehtoja, vaan se on varsin vahvasti huipukas. Tutkimuksessa päädyttiin kuitenkin pitäytymään alkuperäisen tuoton laskennassa jakauman vinoudesta ja huipukkuudesta

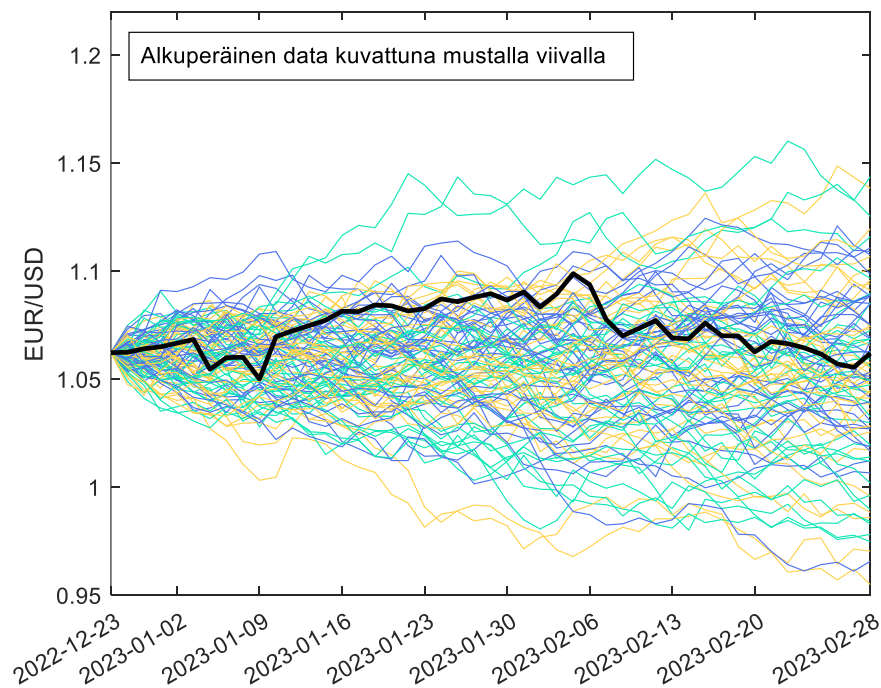
huolimatta. Esimerkiksi logaritmistien tuottojen laskennalla pyritään vähentämään havaintojen välistä volatilitteettia (Alhaguan 2022). Tuoton laskentamenetelmä voi siten vaikuttaa tutkimuksessa saatuihin tuloksiin.

Parametrien määrittämisen jälkeen itse simuloitien luominen tapahtui varsin suoraviivaisesti Matlabin `gbm`- ja `heston`-funktioiden avulla. Funktioihin syötettiin vaaditut parametrit ja niiden avulla saatiin Matlabin `simByEuler`-funktiota käyttäen ratkaistua simulaatioita (ennustearvot) halutulle ajanjaksolle. `simByEuler`-funktio soveltuu Matlabissa sekä geometriselle Brownin liikkeelle, että Hestonin mallille, joten kyseinen funktio valittiin sen vuoksi. Simulaatioita tuottavien funktioiden avulla voidaan tuottaa useampia simulaatioita kerralla.

Tässä tutkielmassa simulaatio toteutettiin siten, että molemmille malleille luotiin 100 simulaatiota, joita hyödynnettiin suoriutumisen arvioinnissa. Huomioitavaa on, että simulaatioiden määrä vaikuttaa merkittävästi tuloksiin ja toisaalta laskentanopeuteen. Tässä työssä ei kuitenkaan tulla tekemään vertailua erilaisten simulaatiomäärien suhteen, vaan tulokset esitetään perustuen 100 simuloituun ratkaisuun. Simulointeja käyttäen arvioitiin mallien suoriutumista ja tehtiin niiden keskinäistä vertailua, mikä on kuvattu tarkemmin seuraavaksi esitettävässä Ennusteiden tulokset -alaluvussa.

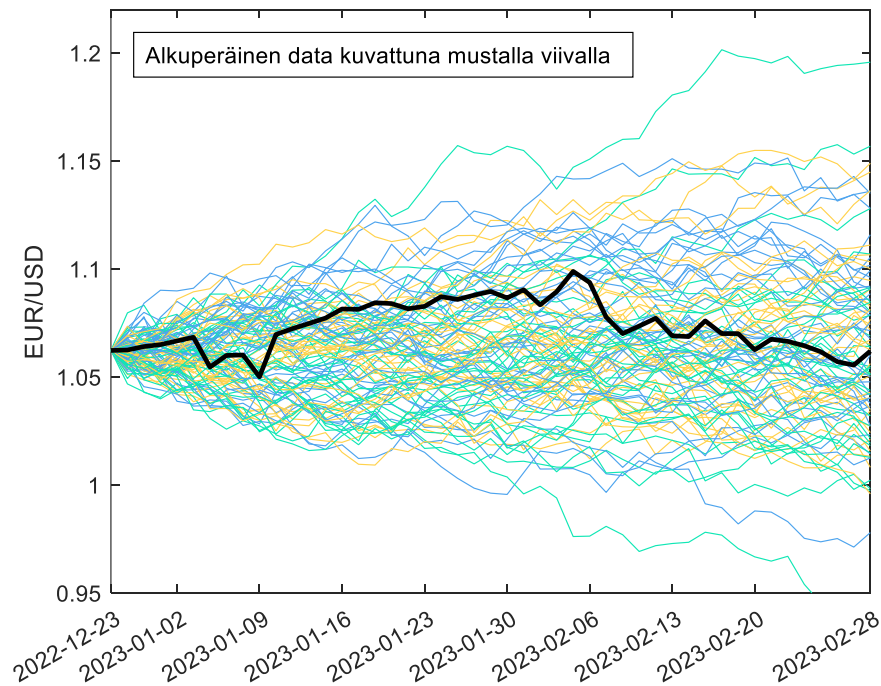
4.3 Simulaatioiden tulokset

Geometrisen Brownin liikkeen tuottamat 100 valuuttakurssisimulaatiota on havainnollistettu kuvassa 7. Kuvasta on havaittavissa simulointien paikantumista jonkun verran alkuperäisen valuuttakurssitason alle, mikä on seurausta siitä, että historiallisesta aineistosta laskettu trenditermi oli negatiivinen. Negatiivinen trendi on tulkittavassa myös kuvasta 5, jossa esitetään historiallisen aineiston kulkua ajassa. Kuvassa 5 valuuttakurssin trendi on pääosin vahvasti laskusuunnassa, eikä lähempänä ennusteen alkua näkynyt nouseva trendi pystynyt korjaamaan sitä kokonaan. Toisaalta tarkasteltaessa kuvaa 7. alkuperäisen valuuttakurssin kulku asettuu kuitenkin geometrisen Brownin liikkeen avulla simuloitujen ennusteiden sisälle, joten mallin voisi nähdä kuitenkin antaneen jonkunlaista suuntaa ennustehorisontin valuuttakurssien kulusta.



Kuva 7. Geometrisen Brownin liikkeen tuottamien simulointien vertailua alkuperäiseen valuuttakurssiin.

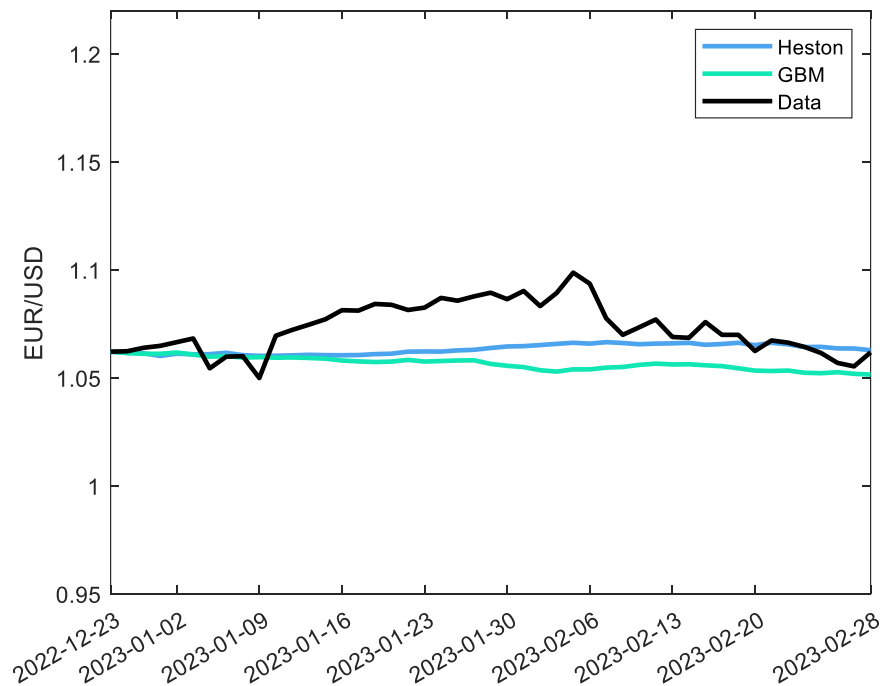
Hestonin mallin tuottamat 100 valuuttakurssisimulaatiota on puolestaan havainnollistettu kuvassa 8. Kuvasta on havaittavissa muutama selkeästi muita korkeampi ja matalampi simulaatio, jotka ovat myös korkeampia ja matalampia kuin yhdekään geometrisen Brownin liikkeen mallin tuottamat simulaatiot. Suuremmista poikkeamista huolimatta kuvassa simulaatiot vaikuttavat paikantuvan tasaisemmin alkuperäisen valuuttakurssin tasolle kuin geometrisen Brownin liikkeen mallin tuottamat simulaatiot. Hestonin mallin sisältämät useammat parametrit todennäköisesti onnistuvat siten tasapainottamana laskusuuntaista trenditermiä. Kuvasta on myös havaittavissa sama kuin geometrisen Brownin liikkeen osaltakin, että alkuperäisen valuuttakurssin kulku asettuu simulointien sisälle, joten yleisesti mallin voisi katsoa antaneen jonkunlaista suuntaa mahdollisesta valuuttakurssien kulusta.



Kuva 8. Hestonin mallin tuottamien simulointien vertailua alkuperäiseen valuuttakurssiin.

Kuvassa 9 on esitetty päiväkohtainen keskiarvo 100:sta mallien tuottamista simuloinneista. Niiden suoriutumista havainnollistamaan kuvassa on esitetty myös alkuperäisen valuuttakurssin kulku ennustehorisontissa. Kuvasta on nähtävissä, että simulaatioiden päivittäisiä keskiarvoja laskemalla kumpikaan malleista ei onnistunut simuloimaan alkuperäisen datan

vaihtelua. Lisäksi kuva osoittaa jo edellä mainittuja painotuksia sen suhteen, että geometrisen Brownin liikkeen mallin tuottamat ennusteet painottuvat keskimäärisesti alkuperäisen valuuttakurssin alapuolelle, kun taas Hestonin mallin simulaatiot painottuvat korkeammalle. Taulukossa 3. on esitetty geometrisen Brownin liikkeen ja Hestonin mallien simulointien päiväkohtaisista keskiarvoista lasketut kuvailevat tunnusluvut, sekä alkuperäisen ennustehorisontin datasta ja historiallisesta datasta lasketut kuvailevat tunnusluvut. Näistä on havaittavissa jo edellä kuvan kautta esitetty huomio siitä, että geometrisen Brownin liikkeen tuottama malli jää keskiarvoltaan alle Hestonin sekä ennustehorisontin alkuperäisen datan. Sekä toisaalta myös se, että geometrisen Brownin liikkeen malli simuloi keskiarvoltaan ja medianiltaan enemmän historiallista dataa lähentelevää dataa kuin ennustushorisontin alkuperäistä dataa.



Kuva 9. Geometrisen Brownin liikkeen ja Hestonin mallin simuloinneista laskettujen päiväkohtaisten keskiarvojen kuvaajat suhteessa alkuperäiseen valuuttakurssiin.

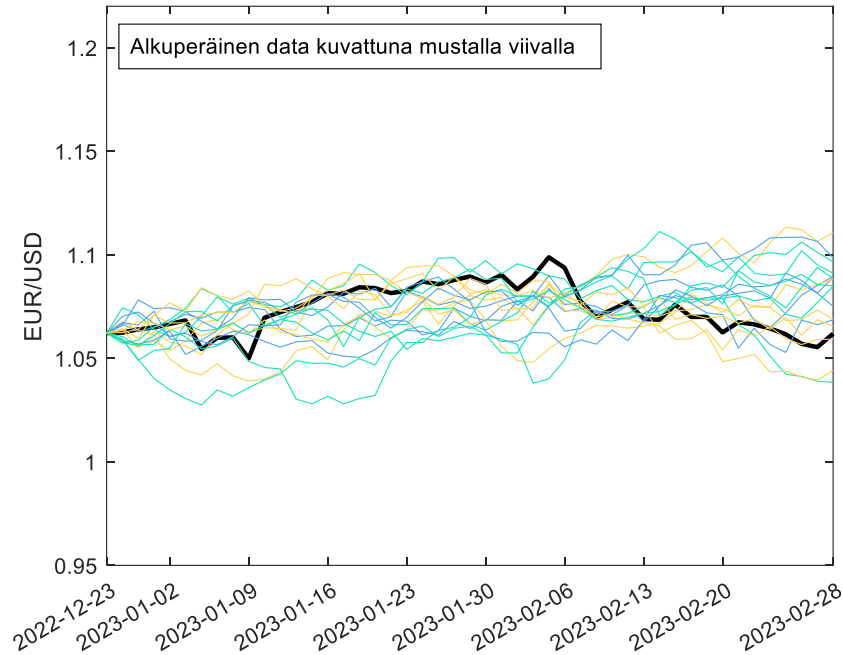
Taulukko 3. Kuvailevat tunnusluvut geometrisen Brownin liikkeen mallille ja Hestonin mallille simulointien päiväkohtaisista keskiarvoista laskettuna, sekä alkuperäisen ennustehorisontin datasta ja historiallisesta datasta lasketut kuvailevat tunnusluvut.

Data	N	max	min	keski- arvo	medi- aani	vaihte- luväli	keski- hajonta	vinous	huipuk- kuus
GBM	47	1,062	1,052	1,057	1,057	0,011	0,003	0,006	1,928
Hestonin malli	47	1,067	1,060	1,063	1,063	0,006	0,002	0,038	1,433
Alkuperäinen data	47	1,099	1,050	1,073	1,070	0,049	0,012	0,156	2,154
Historiallinen data	252	1,146	0,957	1,053	1,052	0,190	0,051	0,193	1,967

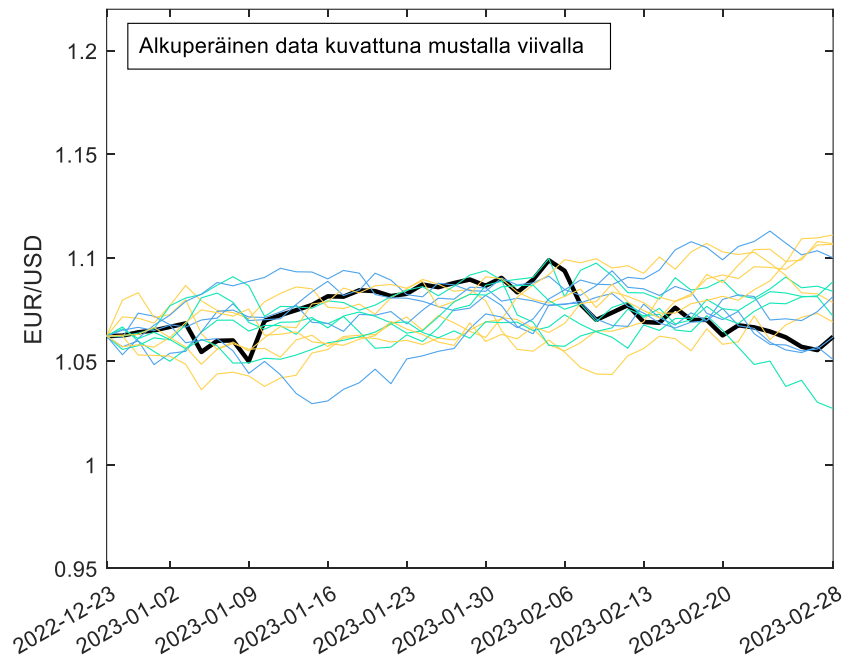
GBM = geometrisen Brownin liikkeen malli,

Alkuperäinen data = ennustehorisontin alkuperäinen data

Kuitenkin, jos tarkastellaan yksittäisten simulointien onnistumista jakaumien mediaanien samankaltaisuutta testaamalla Mann-Whitney-Wilcoxonin testillä, niin yksittäisistä simulaatioista testin nollihypoteesin jää geometrisella Brownin liikkeellä voimaan 17 simulaatiolla, kun taas Hestonin mallilla jakaumien samankaltaisuuden kyseisellä testillä saavuttaa 13 simulaatiota. Mikä voidaan nähdä siten, että geometrisen Brownin liikkeen mallin tuottamista simulaatioista useampi yksittäinen simulaatio suoriutuisi paremmin simuloinnissa jakaumien mediaaneja verrattaessa. Nämä nollihypoteesin täyttävät simulaatiot on havainnollistettu geometrisen Brownin liikkeen osalta kuvassa 10 ja Hestonin mallin osalta kuvassa 11.

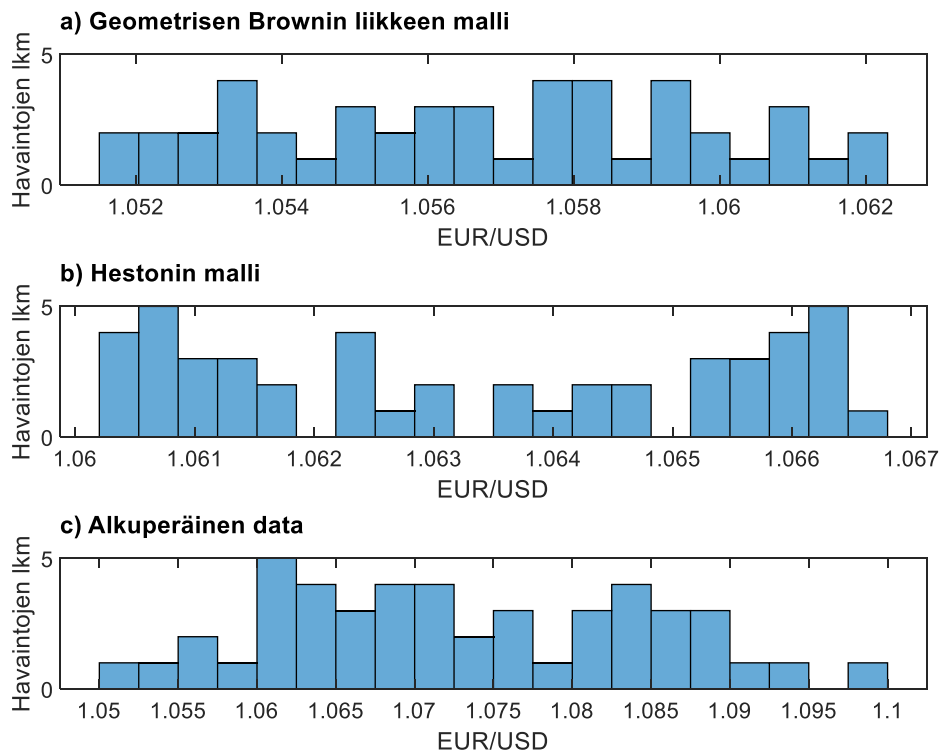


Kuva 10. Geometrisen Brownin liikkeen mallin tuottamista 100 simulaatiosta ne 17 simulaatiota, joiden nollahypoteesi jakaumien samankaltaisuudesta Mann-Whitney-Wilcoxonin testillä jää voimaan verrattuna alkuperäiseen dataan.



Kuva 11. Hestonin mallin tuottamista 100 simulaatiosta ne 13 simulaatiota, joiden nollahypoteesi jakaumien samankaltaisuudesta Mann-Whitney-Wilcoxonin testillä jää voimaan verrattuna alkuperäiseen dataan.

Kuvassa 12 esitetyt histogrammit osoittavat sen, että kumpikaan malleista ei pystynyt simuloimaan valuuttakursseille samaa jakaumaa kuin alkuperäisellä valuuttakurssilla on ollut ennustehorisontissa. Simuloinnit eivät myöskään ole normaalijakautuneita, Kolmogorov-Smirnovin testi hylkää nollahypoteesin normaalijakautuneisuudesta molempien mallien osalta. Teoreettisessa viitekehyksessä todetaan, että esimerkiksi Feinstonen (1987) mukaan geometrinen Brownin liike on huono kuvaus rahoitusvälineiden hintakäyttäytymisestä sen oletettaman tuottojen normaalijakaumien vuoksi. Tutkielmassa tehtyjen 100 simulaation avulla tätä normaalijakaumaoletusta ei kuitenkaan saavutettu. Mann-Whitney-Wilcoxonin testi hylkää molempien mallien osalta nollahypoteesin oletuksen jakaumien samankaltaisuudesta alkuperäisen datan kanssa p-arvoilla .000.



Kuva 12. Geometrisen Brownin liikkeen ja Hestonin mallin ennusteista laskettujen päiväkohtaisten keskiarvojen jakaumat verraten alkuperäiseen valuuttakurssien jakaumaan.

Mallien simulointien arvioinnissa RMSE arvot on laskettu kahdella tavoin kaavan (13) avulla; ensin siten, että jokaiselle 100 simulaatiosta lasketuille päiväkohtaisille aritmeettisille keskiarvoille on laskettu RMSE arvo ja toiseksi siten, että jokaiselle yksittäiselle 100 simulaatiolle on laskettu ensin oma RMSE arvo ja näistä on lopuksi laskettu aritmeettinen keskiarvo. MSE arvo on laskettu ainoastaan 100 simulaatiosta lasketuille päiväkohtaisille aritmeettisille keskiarvoille kaavalla (14). Ja MAPE arvot on laskettu kaavalla (12) siten, että jokaiselle yksittäiselle 100 simulaatiolle on laskettu ensin oma MAPE arvo ja näistä on lopuksi laskettu aritmeettinen keskiarvo. Taulukon 4 arvoista on todettavissa, että Hestonin malli on tuottanut simulaatioille keskimäärin pienemmät virheet kuin geometrisen Brownin liikkeen malli.

Taulukko 4. Malleille lasketut jäännösvirrehajonnat (RMSE), keskineliövirheet (MSE) ja keskiarvoiset prosenttivilheet (MAPE).

Malli	1. RMSE	2. RMSE	MSE	MAPE
GBM	.0205	.0304	.00042	2.4071 %
Hestonin malli	.0150	.0296	.00024	2.3131 %

GBM = geometrisen Brownin liikkeen malli.

1. RMSE on 100 simulaatiosta lasketuille päiväkohtaisille aritmeettisille keskiarvoille laskettu RMSE.

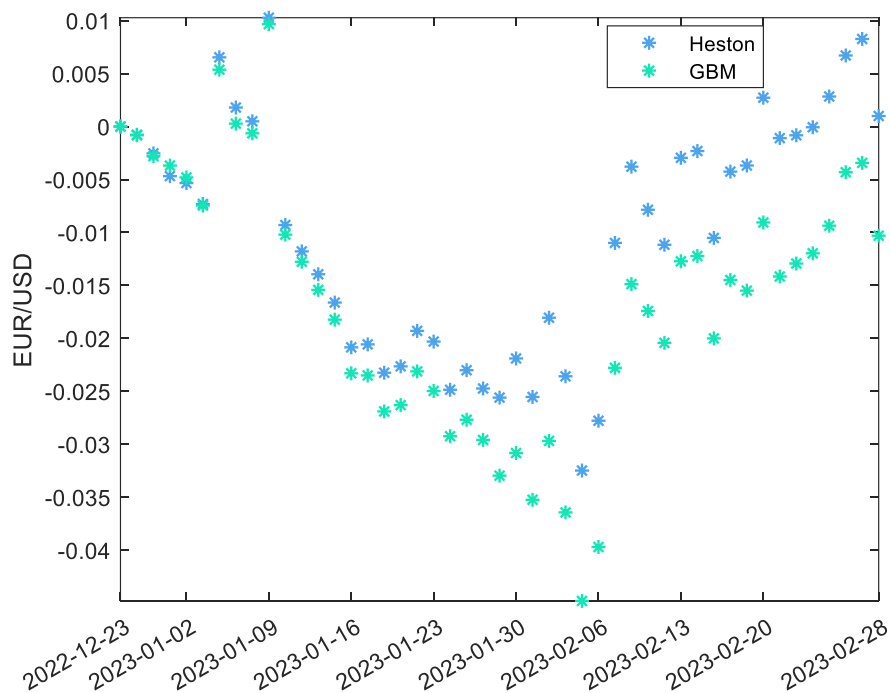
2. RMSE on laskettu siten, että jokaiselle yksittäiselle 100 simulaatiolle on laskettu ensin oma RMSE arvo ja näistä on lopuksi laskettu aritmeettinen keskiarvo.

MSE on 100 simulaatiosta lasketuille päiväkohtaisille aritmeettisille keskiarvoille laskettu MSE.

MAPE on laskettu siten, että jokaiselle yksittäiselle 100 simulaatiolle on laskettu ensin oma MAPE arvo ja näistä on lopuksi laskettu aritmeettinen keskiarvo.

Mallien välisen vertailun tulos on samansuuntainen kuin esimerkiksi Alhaguanin (2022) tutkimuksen tulos. Tutkimuksessa hän vertaili geometrisen Brownin liikkeen mallin, geometrisen murto-osa Brownin liikkeen mallin ja geometriseen murto-osan Brownin liikkeen mallin, johon oli lisätty stokastinen volatilitiitti (engl. geometric fractional Brownian motion perpetued by stochastic volatility) suoriutumista valuuttakurssien ennustamisessa. Tutkimuksessa oli tarkastelussa kolme euron valuuttaparia ja tutkimuksessa mallien vertailu toteutettiin MSE arvojen avulla. Stokastisen volatilitiitin malli suoriutui sen mukaan paremmin kaikkien valuuttakurssien ennustamisessa kuin geometrisen Brownin liikkeen malli.

Tuloksissa voidaan havaita selkeämpää eroa, kun lasketaan jokaiselle 100 simulaatiosta lasketuille päiväkohtaisille aritmeettisille keskiarvoille RMSE ja MAPE arvo: Hestonin malli saa arvon .0150 ja geometrisen Brownin liikkeen malli .0205. MAPE arvossa Hestonin mallin arvo 2,313 % on hieman parempi kuin geometrisen Brownin liikkeen mallin arvo 2,407 %. Päivittäisten ennusteiden keskiarvoille lasketut absoluuttiset virheet on havainnollistettu kuvassa 13.



Kuva 13. Hestonin ja geometrisen Brownin liikkeen mallien päivittäisten simuloitujen ennusteiden keskiarvoille lasketut absoluuttiset virheet.

Mallien välinen ero kuitenkin pienenee, kun lasketaan ensin jokaiselle yksittäiselle 100 simulaatiolle oma RMSE arvo ja näistä lasketaan aritmeettinen keskiarvo: Hestonin malli saa arvon .0296 ja geometrisen Brownin liikkeen malli .0304. Erojen välistä vähäisyyttä tukee myös jo aiemmin mainitut Mann-Whitney-Wilcoxonin testillä tehdyt arviot jakaumien samankaltaisuudesta kaikille simuloinneille erikseen. Testin mukaan samantyyppisen jakauman alkuperäisen datan kanssa saavutti hieman useampi geometrisen Brownin liikkeen mallin tuottama simulaatio kuin Hestonin mallin. Kaiken kaikkiaan voidaan todeta, että erojen arviointiin vaikuttaa siten tehtyjen simulaatioiden määrä. Jos simulaatioiden määrä olisi

ollut pienempi tai suurempi olisivat erot voineet muodostua merkittävämmäksi jompaankumpaan suuntaan. Liitteestä 1 on katsottavissa simuloitujen ennusteiden päivittäiset keskiarvot geometrisen Brownin liikkeen mallille sekä Hestonin mallille ja alkuperäiset valuuttakurssit ennustehorisontin ajanjaksolta.

4.4 Tulosten analyysi

Tutkimuksen empiriaosuus havainnollistaa, että geometrisen Brownin liikkeen ja Hestonin mallin avulla voidaan muodostaa toimivia ennustemalleja, mutta parametrien estimointiin tulisi kiinnittää huomiota ennustetarkkuuden parantamiseksi. Esimerkiksi päiväkohtaisten yksittäisten simulaatioiden tuottamat virheet ovat paikoin varsin suuria, kun huomioidaan niiden kerrannaisvaikutus valuuttojen määrissä esimerkiksi yritysten kaupankäynnissä.

Tutkimuksessa voidaan stokastisen volatiliteetin sisältävän Hestonin mallin todeta suoriutuneen ehkä hieman paremmin kuin geometrisen Brownin liikkeen EUR/USD-valuuttakurssien 23.12.2022-28.2.2023 ennustamisen simuloinnissa käytettäessä historiallisena aineistona 3.1.2022-22.12.2022 toteutuneita EUR/USD-valuuttakursseja simulaatioiden määrän ollessa 100. Aiemmissa tutkimuksissa stokastisen volatiliteetin SDY-mallien on yleisesti todettu suoriutuvan paremmin varojen hinnoitteluissa kuin yksinkertaisempien menetelmien (Moyaert & Petitjean 2011), minkä vuoksi tulokset olivat osaltaan odotettavissa. Toisaalta simulaatioiden määrän ollessa näin vähäinen voi tulos johtua myös mallien itsensä tuottamasta satunnaisuudesta. Lisäksi yksittäisten simulointien jakaumien samankaltaisuutta verrattaessa alkuperäiseen dataan saatiin sen suuntaista tulosta, että geometrisen Brownin liikkeen mallin avulla olisi onnistuttu hieman useammin tuottamaan samankaltaista jakaumaa kuin alkuperäisellä datalla testattaessa mediaanien jakauman samankaltaisuutta.

Tutkimuksen tuloksiin heijastuvat kuitenkin niin käytetty data, datasta valittu historiallinen aikasarja, ennustehorisontin pituus, ennusteiden simulointien määrä kuin parametrienkin estimointi, minkä vuoksi mallien vertailua tulisi tehdä myös erilaisin valinnoin, jotta suoriutumisen tuloksia voitaisiin mahdollisesti yleistää. Mallien vertailussa ei saatu täysin

yksiselitteisiä tuloksia. Niiden vertailussa kohdattiin teoreettisessa viitekehysessä esitetty Henriquézin ja Kristjanpollerin (2019) toteamus siitä, että valuuttakurssien kehityksen ennustamisen liittyvien mallien paremmuuden arviointi on haastavaa.

Tutkimuksen toteutuksessa parametrien muodostaminen SDY-malleille osoittautui työn laajuus huomioiden haastavaksi. Parametrit muodostettiin historiallisen aineiston avulla, sekä tehden niihin liittyviä oletuksia työn yksinkertaistamiseksi. Todennäköisesti niiden avulla ei pystytty tuomaan Hestonin malliin juurikaan lisäarvoa stokastisen volatilitietin osalta. Toisaalta parametrien määrittämiseen olisi voitu vaikuttaa myös valitsemalla historiallinen aikasarja eri tavoin, jolloin esimerkiksi trenditermi ja volatilitietti olisivat muodostuneet erilaisiksi. Tulee kuitenkin muistaa, ettei hintojen trendejä aina onnistuta ennustamaan ja ne voivat yllättäen vaihtua. Parametrien estimointiin liittyvät haasteet on todettu myös aiemmissa aihepiiriin liittyvissä tutkimuksissa. Esimerkiksi Neisy ja Peymany (2011) toteavat omassa SDY-malleja käsittelevässä rahoituksen mallintamiseen liittyvässä tutkimuksessaan stokastisen volatilitietin SDY-mallien käyttöönoton kohtaavan yhtenä haasteena parametrien määrittämisen. Neisy ja Peymany (2011) kuvailevat parametrien estimoinnin olevan kiistanalaista, esimerkiksi volatilitietin volatilitietin osalta.

Yleisesti ottaen SDY-mallien parametrien määrittämiseen liittyen myös Huang (2022) toteaa parametrien määrittämisen olevan SDY-malleihin vaikeaa, mikä liittyy SDY-mallien matemaattisen teorian monimutkaisuuteen. Tämä kohdattiin tutkielmaa tehdessä, kun SDY-mallien johtamista ja kuvaamista jouduttiin laajalti rajaamaan työn teoreettisessa viitekehysessä työn laajuus ja tarkoitus huomioiden. Lisäksi on huomioitava, että simuloinnin kohteena olivat valuuttakurssit. Esimerkiksi Gamaliy ym. (2018) toteavat fundamentaalisen ja teknisen analyysin näkökulmasta valuuttamarkkinoihin ennustamista käsittelevässä tutkimuksessaan, että valuuttamarkkinat perustuvat erittäin monimutkaisiin mekanismeihin, ja niiden ennustaminen ja analysointi on todella haastava. Tutkimuksessa todetaan, että valuuttakurssien ennustaminen ei ole mitenkään yksinkertainen tehtävä, eikä sitä pystytä toteuttamaan puhtaasti teknisen analyysin avulla.

Laajemmassa mittakuvassa valuuttakurssien ennustamista tarkastellessa SDY-mallit kuuluvat teknisen analyysin menetelmiin. Teknisen analyysin keinot ovat koko ajan kehittyneet ja voisi olettaa, että myös niiden ennustetarkkuus paranee. Tilanteet markkinoilla voivat kuitenkin merkittävästi muuttua ja silloin pelkkä historiallinen data ei välttämättä ole riittävä muodostamaan realistista kuvaa tulevasta valuuttakurssikehityksestä. Työssä parametrien määrittämisessä kohdattiin esimerkiksi mietintä, johtaako datasta laskettu keskituotto simuloiteja väärää suuntaan, kun tarkastelee datassa olevaa trendiä ennustettavalle ajanjaksolle, ja olisiko todellisessa tilanteessa aiheellista asettaa trenditermiksi esimerkiksi viitekorkojen avulla määritetty parametri. Tämän tyyppistä ajatusta teknisen analyysin riittävydestä on esitetty myös aiemmissa tutkimuksissa. Esimerkiksi Oberlechner (2001) esittää teknisen ja fundamentaalisen analyysin merkitystä tutkineessa valuuttamarkkinoiden ennustamiseen liittyvässä tutkimuksessaan, että valuuttakurssien ennustamisen parissa työskentelevät ovat todenneet hyödyntävänsä molempia valuuttakurssien ennustamiseen yhdistettyjä pääsuuntauksia, niin teknistä kuin fundamentaalista analyysia huomioiden menetelmien painotuksessa oman työnsä tavoitteet.

Lui ja Mole (1998) sekä Oberlechner (2001) esittävät, että teknistä analyysia hyödynnetään usein lyhyen aikavälin ennustamisessa, mutta ennustuksen aikavälin pidentyessä menetelmässä käännytään enemmän fundamentaalisen analyysin puoleen, ja analyysien teoissa voidaan hyödyntää myös menetelmien yhdistelmiä. Toisaalta esimerkiksi Gehrig ja Menkhoff (2006) tuovat omassa tutkimuksessaan esille, että valuuttakurssien ennustamisessa teknisen analyysin menetelmät ovat yleisesti muita suosituimpia menetelmiä. Menetelmien käytön voisi olettaa liittyvän hyödynnettävissä olevien resursseihin. Esimerkiksi SDY-malleja hyödyntäen voitaisiin tavoitella automatisoitujen prosessien kautta säästöjä. Toisaalta pitkälle viety automatisointi voi lisätä myös kustannuksia ja riskejä. Esimerkiksi Alfeus ja Collins (2023) kuvailevat, että hinnoittelumallien valinnassa joudutaan usein miettimään laskennan numeerisen tarkkuuden ja laskennan raskauden välillä, koska numeerisen tarkkuuden saavuttaminen aiheuttaa yleensä kustannuksia käyttöönotossa ja mallien kalibroinnissa. Toisaalta automatisointiin voidaan liittää myös riskienhallinta keinoja, joissa tiettyjen erojen tai rajojen ylittyessä tulisi ottaa käyttöön teknisen analyysin lisäksi myös muita analyysimenetelmiä ja ohjata päätöksen tekoa ihmiselle. Käytettävien hinnoittelumallien valinnan voidaan siten todeta vaativan arviointia niiden käyttöön liittyvästä kokonaiskuvasta.

5 Yhteenveto ja johtopäätökset

Tutkielman tavoitteena oli selvittää, mitä stokastiset differentiaaliyhtälömallit (SDY-mallit) yleisesti ovat sekä hahmottaa yleisimpiä SDY-malleja, joita käytetään valuuttakurssien ennustamisessa ja avata esille nousseiden mallien käyttöä. Sekä testata yleisimpiin SDY-malleihin kuuluvien geometrisen Brownin liikkeen ja Hestonin mallien suoriutumista valuuttakurssien simuloinnissa hyödyntäen historiallista valuuttakurssidataa.

5.1 Vastaukset tutkimuskysymyksiin

Tutkielman teoreettisen viitekehyksen avulla pyrittiin vastaamaan tutkimuskysymykseen 1. ”Mitä SDY-mallit ovat ja miten valuuttakurssien ennustamisessa hyödynnettävät yleiset SDY-mallit rakentuvat?”. Tutkielma osoittaa, että SDY-mallit ovat laajasti hyödynnettävissä eri tieteen aloilla, sisältäen myös matemaattisen rahoituksen. SDY-mallit ovatkin hyödynnettävissä myös valuuttakurssien ennustamisessa. Tutkielman teoreettisessa viitekehysessä todetaan, että yleisesti ottaen SDY-mallit ovat differentiaaliyhtälömalleja, joiden termeistä ainakin yksi sisältää satunnaisuutta (Chin ym. 2014, 113). SDY-malleja on laaja joukko, ja ne ovat olleet tutkijoiden kiinnostuksen kohteena vuosikymmeniä.

Tässä tutkielmassa esiteltiin tarkemmin valuuttakurssien ennustamisessa hyödynnettävät SDY-mallien joukkoon kuuluvat geometrisen Brownin liikkeen malli ja Hestonin malli. Hestonin malli kuvautuu matemaattisesti monimutkaisemmin kuin geometrisen Brownin liikkeen malli. Samankaltaisuutta löytyy kuitenkin sen osalta, että kuten useisiin muihinkin SDY-malleihin, niin myös näihin malleihin sisältyy Brownin liikkeen muutosta kuvaava termi. Brownin liikkeen avulla malleihin saadaan luotua stokastisuutta. Muutoin mallien rakenteet kuitenkin poikkeavat toisistaan esimerkiksi mallien sisältämien parametrien osalta sekä edellä mainitun matemaattisen monimutkaisuuden osalta. Yleisesti ottaen parametrien estimointi nousee merkittävään rooliin, jos SDY-mallien avulla haetaan tarkkoja valuuttakurssiennusteita. Yksinkertaisten ja monimutkaisten menetelmien osalta valinta ei kuitenkaan ole yksiselitteinen, koska niihin liittyy myös laskentaan liittyvien kustannusten

huomiointi. Monimutkaisempien mallien käyttöönotto ja kalibrointi voivat aiheuttaa enemmän kustannuksia kuin yksinkertaisempien mallien.

Tutkielman empiriaosuudessa pyrittiin vastaamaan tutkimuskysymykseen 2. ”*Miten yleisimpiin SDY-malleihin kuuluvat geometrisen Brownin liikkeen malli ja Hestonin malli suoriutuvat EUR/USD-valuuttakurssien 23.12.2022-28.2.2023 simuloinnissa käytettäessä historiallisena datana 3.1.2022-22.12.2022 toteutuneita EUR/USD-valuuttakursseja?*”. Kokonaisuutta arvioiden empiriaosuudessa Hestonin ja geometrisen Brownin liikkeen malleilla tehtyjen simulointien voisi kuvailla suoriutuneen kohtalaisesti huomioiden mallien parametrien määrittämisessä käytetyn historialliseen dataan pohjautuvan yksinkertaistetun parametrien määrittämisensä sekä muut parametrien määrittämiseen sovelletut yksinkertaistukset. Alkuperäinen valuuttakurssi asetettiin molemmilla malleilla tuotettujen simulointien sisäpuolelle antaen jonkunlaista suuntaa valuuttakurssien mahdollisesta kehityksestä.

Vertaillen mallien keskinäistä suoriutumista tutkielman empiriaosuuden tulokset viittaavat hienoisesti siihen, että stokastisen volatilitietin sisältämä Hestonin malli olisi suoriutunut ehkä hieman paremmin kuin geometrisen Brownin liikkeen malli EUR/USD-valuuttakurssien ennustamisen simuloinnissa. Tutkimuksessa tehdyt valinnat vaikuttavat tuloksiin kuitenkin merkittävästi, mikä on huomioitava tulosten merkittävyyttä arvioitaessa. Hestonin malli suoriutui geometrisen Brownin liikkeen mallia paremmin, kun suoriutumista arvioitiin jäännösvirrehajonnan, keskineliövirheen sekä keskiarvoisen prosenttivilheen avulla. Erot olivat kuitenkin hyvin vähäisiä. Yksittäisten simulointien jakaumien samankaltaisuutta verrattaessa alkuperäiseen dataan saatiin sen suuntaista tulosta, että geometrisen Brownin liikkeen mallin avulla olisi onnistuttu hieman useammin tuottamaan samankaltaista jakaumaa kuin alkuperäisellä datalla testattaessa mediaanien jakauman samankaltaisuutta. Toisaalta simulaatioiden määrän ollessa näin vähäinen voivat tutkielman empiriaosuudessa saadut tulokset johtua myös mallien itsensä tuottamasta satunnaisuudesta.

Tutkimuksen tuloksiin heijastuvat useat tutkimuksessa tehdyt valinnat, kuten tutkimuksessa käytetty data ja siitä valittu historiallinen aikasarja, minkä vuoksi tutkimuksesta saatuja mallien suoriutumisen tuloksia ei voida yleistää, vaan ne toimivat lähinnä kuvailevana

analyysinä koskettaen tässä tutkimuksessa tehtyjä valintoja. Vaikkakin aiemmissa tutkimuksissa on myös todettu monimutkaisempien stokastisten differentiaaliyhtälömallien tuottavan tarkempia tuloksia kuin yksinkertaisempien mallien.

5.2 Tutkimuksen luotettavuus ja jatkotutkimusehdotukset

Tutkimuksen teoreettisen taustan rakentamisessa on käytetty vertaisarvioituja kausijulkaisuja, sekä kirjallisuutta, joita myös muut tutkijat tai alalla akateemisesti työskentelevät ovat hyödyntäneet. Teoreettisen taustan voidaan siten katsoa rakentuneen luotettavuudeltaan hyvien lähteiden piiriin. Tutkielma keskittyi valuuttakurssien ennustamiseen stokastisten differentiaaliyhtälömallien avulla, joten tutkimusaiheen laajan kiinnostuksen vuoksi myös tehtyjen tieteellisten julkaisujen määrä on ollut huomattava. Minkä vuoksi niissä olevaa tietoa on tutkimuksen laajuus huomioiden pystytty hyödyntämään vain osittain.

Tutkimuksen empiriaosuuden aineisto on vapaasti saatavissa internetissä, joten tutkimus on myös muiden tutkijoiden toistettavissa. Tällä tavoin voidaan osoittaa tutkimuksen ja sen tulosten itsessään olevan luotettavia (Nummenmaa 2021, 40). Toisaalta kuten Nummenmaa (2021, 39) toteaa, myös huolellisesti toteutettuun tutkimukseen voi sisältyä virheitä, jotka heilauttavat tuloksia suuntaan tai toiseen. Tämä tutkimus voi siten sisältää virheitä esimerkiksi dataan kuuluvien havaintoyksiköiden osalta, tai Matlabissa käytetyn koodin osalta, jos työn tekijä ei ole itse näitä havainnut. Luotettavuutta olisi siten voinut parantaa vertaisarvioinnin avulla. Vertaisarvioinnin avulla pyritään korjaamaan esimerkiksi tutkimuksen virheitä siten, että muutkin toistavat saamaa tutkimusta, mikä auttaa lähentymään tutkittavaan aiheeseen liittyvää totuutta (Nummenmaa 2021, 39). Lisäksi alkuperäisen datan vapaasta saatavuudesta huolimatta tutkimuksen toistaminen mallien arviointien osalta ei kokonaisuudessaan ole täysin mahdollista, koska arvioinnissa testattiin myös yksittäisten simulointien suoriutumista ja tutkimukseen liitetyt mallien simulointien keskiarvot ovat pyöristetty 4 desimaalin tarkkuudelle, kun Matlabissa laskentatarkkuus on ollut 15 desimaalia. SDY-mallien käyttäytyminen huomioiden niiden ratkaisut eivät ole yksiselitteisiä, joten täysin vastaaviin simulointeihin ei todennäköisesti ole mahdollista päästä, vaikka käytössä olisi sama data. Empiriaosuuden tulosten luotettavuutta heikentää lisäksi se, että datan valinnassa on käytetty

harkinnanvaraista otantaan. Näin ollen satunnaisotannan vaatimukset eivät toteudu ja tulokset eivät ole yleistettävissä laajemmin (Nummenmaa 2021, 66). Empiriaosuuden tulosten luotettavuutta olisi ollut mahdollista lisätä testaamalla malleja useammalla eri aikajaksoilla sekä erilaisilla valuuttapareilla ja tutkia, onko mallien suoriutuminen johdonmukaista. Tällöin tutkimuksen suunnittelussa olisi ollut tarpeen määritellä tarkemmin populaatio, eli esimerkiksi minkälaisia valuuttapareja on olemassa, sekä tehdä tarkempi selvitys, minkä pituisia aikasarjoja aiemmissä tutkimuksissa on käytetty. Ja tämän tarkemman populaation määrittelyn jälkeen esimerkiksi satunnaisgeneraattorin avulla valita tutkimuksen otos.

Vaikka valuuttakurssien ennustamista tutkitaan paljon käyttäen monenlaisia analyysimenetelmiä, niin viimeisten vuosien tutkimukselle yhteistä vaikuttaa olevan se, että edelleenkään ei ole löytynyt sellaista mallia, joka toistuvasti suoriutuisi muita paremmin valuuttakurssien ennustamisessa. Valuuttakurssien ennustamista on kuitenkin alettu tutkia myös koneoppisen keinoin. Tulevaisuudessakin tullaan varmasti tekemään paljon tutkimusta valuuttakurssien ennustamisesta koneoppimista hyödyntäen. Nähtäväksi jääkin, pystytäänkö koneoppimista hyödyntämällä luomaan mallia, joka toistuvasti onnistuu muita malleja paremmin. Tähän tutkimusalueeseen kuitenkin liittyy vahvasti myös riskien hallintaan ja kustannuslaskentaa liittyvä tutkimus sen osalta, kuinka paljon automatisointia ja koneellista laskentaa voidaan hyödyntää pitäen myös riskit ja kustannukset halutulla tasolla.

Tulevaisuudessa olisi kiinnostavaa nähdä tuloksia laajemmasta vertailusta eri analyysimenetelmien suoriutumisesta ja niissä tehdyistä valinnoista parametrien estimoinnin suhteen. Mielenkiintoista olisi myös tutkia, miten yritykset ovat onnistuneet valuuttakurssien ennustamisessa, ja mitä analyysimenetelmiä ne ovat hyödyntäneet ennustuksen eri vaiheissa. Yritysten menetelmien käyttöön ja niiden onnistumiseen liittyvään tutkimukseen voisi kuitenkin olla haastava saada dataa, koska yritykset eivät välttämättä olisi valmiita jakamaan tietoaan, jos käytössä on hyvin suoriutuvia menetelmiä.

Lähteet

Ahmed, S., Hassan, S., Aljohani, NR. & Nawaz, R. (2020) FLF-LSTM: A novel prediction system using Forex Loss Function. *Applied Soft Computing* 97, 106780, [online].

Alhagyan, M. (2022) The effects of incorporating memory and stochastic volatility into GBM to forecast exchange rates of Euro. *Alexandria Engineering Journal*, 61(12), 9601–9608.

Alfeus, M. & Collins, J. (2023) A novel stochastic modeling framework for coal production and logistics through options pricing analysis. *Financial Innovation.*, 9(1), 54.

Alvarez, L. & Koskinen, L. (2007) Rahoituksen teoriaa ja sovelluksia aktuaareille. Vakuutusvalvontavirasto. ISBN: 978–952–5350–44–9.

Ayitey Junior, M., Appiahene, P., Appiah, O. & Bombie, C.N. (2023) Forex market forecasting using machine learning: Systematic Literature Review and meta-analysis. *Journal of Big Data*, 10(1), 9-40.

Beneki, C. & Yarmohammadi, M. (2014) Forecasting exchange rates: An optimal approach. *Journal of Systems Science and Complexity*, 27(1), 21–28.

Berk, J. & DeMarzo, P. (2017) Corporate Finance. Global edition, 4th edition. Harlow: Pearson Education.

Castellano, R. & D’Ecclesia, R. L. (2007) Long swings in exchange rates: a stochastic control approach. *International transactions in operational research*, 14(6), 475–489.

Chin, E., Nel, D. & Olafsson, S. (2014) Problems and Solutions in Mathematical Finance. Volume 1. Stochastic Calculus. Hoboken: Wiley.

Cui, Y., del Baño Rollin, S. & Germano, G. (2017) Full and fast calibration of the Heston stochastic volatility model. *European Journal of Operational Research*, 263(2), 625–638.

Dash, R. (2018) Performance analysis of a higher order neural network with an improved shuffled frog leaping algorithm for currency exchange rate prediction. *Applied Soft Computing*, 67, 215–231.

Euroopan keskuspankki. (2022a) Talouskatsaus 8/2022. ISSN: 2363–3565 [Verkojulkaisu]. [Viitattu 18.2.2023]. Saatavissa: https://www.suomenpankki.fi/globalassets/fi/media-ja-julkaisut/julkaisut/ekp_julkaisuja/talouskatsaus/documents/ekp-talouskatsaus-fi-08-2022.pdf.

Euroopan keskuspankki. (2022b) The international role of the euro June 2022. [Verkojulkaisu]. [Viitattu 17.2.2022]. Saatavissa: <https://www.ecb.europa.eu/pub/pdf/ire/ecb.ire202206~6f3ddeab26.en.pdf>.

Euroopan keskuspankki. (2023) Statistical Data Warehouse. Saatavilla: <https://sdw.ecb.europa.eu/>.

Feinstone, L. J. (1987) Minute by minute: Efficiency, normality, and randomness in intradaily asset prices. *Journal of Applied Econometrics*, 2(3), 193–214.

Gamaliy, V., Shalimova, N., Zhovnovach, R., Zahreba, M., & Levchenko, A. (2018) Exchange rates: the influence of political and economic events. a fundamental analysis approach. *Banks and Bank Systems*, 13(4), 131–142.

Gehrig, T. & Menkhoff, L. (2006) Extended evidence on the use of technical analysis in foreign exchange. *International Journal of Finance & Economics*, 11(4), 327–338.

Guo, J-H. & Hung, M-W. (2015) Implementation Problems and Solutions in Stochastic Volatility Models of the Heston Type. Teoksessa Lee, C. F. & Lee, J. C. (toim.) *Handbook of Financial Econometrics and Statistics*. (2303–2315). New York, NY: Springer New York.

Haataja, J., Heikonen, J., Leino, Y., Rahola, J., Ruokolainen, J. & Savolainen, V. (2002) Numeeriset menetelmät käytännössä. 2. uudistettu painos. Espoo: CSC-Tieteellinen laskenta.

Henríquez, J. & Kristjanpoller, W. (2019) A combined Independent Component Analysis–Neural Network model for forecasting exchange rate variation. *Applied soft computing*, 83, 105654, [online].

Heston, S. L. (1993) A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, 6(2), 327–343.

Hu, Z., Liu, W., Bian, J., Liu, X. & Liu, T-Y. (2018) Listening to Chaotic Whispers: A Deep Learning Framework for News-Oriented Stock Trend Prediction. WSDM 2018 -

Proceedings of the 11th ACM International Conference on Web Search and Data Mining 2018-February, 261–269.

Huang, D. (2022) Financial Time Series Forecasting Based on Stochastic Differential Equation Model. 2022 IEEE 5th International Conference on Information Systems and Computer Aided Education, ICISCAE 2022, 461-465.

Kim, K., Kim, N.-U., Ju, D.-C., & Ri, J.-H. (2020) Efficient hedging currency options in fractional Brownian motion model with jumps. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 539, 122868, [online].

Korol, T. (2014) A fuzzy logic model for forecasting exchange rates. *Knowledge-Based Systems*, 67, 49–60.

Lindsey, JK. (2004) *Statistical Analysis of Stochastic Processes in Time*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lui, Y-H. & Mole, D. (1998) The use of fundamental and technical analyses by foreign exchange dealers: Hong Kong evidence. *Journal of International Money and Finance*, 17(3), 535–545.

MathWorks. (2023) simByEuler: Euler simulation of stochastic differential equations (SDEs) for SDE, BM, GBM, CEV, CIR, HWV, Heston, SDEDDO, SDELD, or SDEM RD models. Help Center. [Viitattu 12.4.2023]. Saatavilla: https://se.mathworks.com/help/finance/sde.simbyeuler_sde.html .

Moyaert, T. & Petitjean, M. (2011) The performance of popular stochastic volatility option pricing models during the subprime crisis. *Applied Financial Economics*, 21(14), 1059–1068.

Neely, C., Weller, P. & Dittmar, R. (1997) Is Technical Analysis in the Foreign Exchange Market Profitable? A Genetic Programming Approach. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 32(4), 405–426.

Neftci, S. N. (2000) *An introduction to the mathematics of financial derivatives*. 2. painos. San Diego: Academic Press.

Neisy, A. & Peymany, M. (2011) Financial modeling by ordinary and stochastic differential equations. *World Applied Sciences Journal*, 13(11), 2288–2295.

Niskanen, J. & Niskanen, M. Yritysrähoitus. 7–9.painos. Helsinki: Edita Publishing Oy.

- Nummenmaa, L. (2021) Tilastotieteen käsikirja. Helsinki: Tammi.
- Oberlechner, T. (2001) Importance of technical and fundamental analysis in the European foreign exchange market. *International Journal of Finance & Economics*, 6(1), 81–93.
- Ozer-Imer, I. & Ozkan, I. (2014) An empirical analysis of currency volatilities during the recent global financial crisis. *Economic Modelling*, 43, 394–406.
- Özorhan, M.O., Toroslu, I.H. & Sehitoglu O.T. (2019) Short-term trend prediction in financial time series data. *Knowledge and Information Systems*, 61(1), 397-429.
- Pfahler, J. F. (2022) Exchange Rate Forecasting with Advanced Machine Learning Methods. *Journal of Risk and Financial Management*, 15(1), 2.
- Prabakaran, N., Palaniappan, R., Kannadasan, R., Dudi, SV. & Sasidhar, V. (2021) Forecasting the momentum using customised loss function for financial series. *International Journal of Intelligent Computing and Cybernetics*, 14(4), 702-713.
- Rime, D., Sarno, L. & Sojli, E. (2010) Exchange rate forecasting, order flow and macroeconomic information. *Journal of International Economics* 80(1), 72-88.
- Rout, M., Majhi, B., Majhi, R. & Panda, G. (2014) Forecasting of currency exchange rates using an adaptive ARMA model with differential evolution-based training. *Journal of King Saud University – Computer and Information Sciences*, 26(1), 7-18.
- Sauer, T. (2013) Computational solution of stochastic differential equations. *Wiley Interdisciplinary Reviews. Computational Statistics*, 5(5), 362–371.
- Shen, M.-L., Lee, C.-F., Liu, H.-H., Chang, P.-Y. & Yang, C.-H. (2021) An Effective Hybrid Approach for Forecasting Currency Exchange Rates. *Sustainability (Switzerland)*, 13(5), 2761, [online].
- Stojkoski, V., Sandev, T., Basnarkov, L., Kocarev, L., & Metzler, R. (2020) Generalised Geometric Brownian Motion: Theory and Applications to Option Pricing. *Entropy (Switzerland)*, 22(12), 1432, [online].
- Tampereen yliopisto. (2023) Hypoteesien testaus. Tietoarkisto. [Viitattu 18.4.2023]. Saatavilla. <https://www.fsd.tuni.fi/fi/palvelut/menetelmaopetus/kvanti/hypoteesi/testaus/> .

Yang, Y., Fabozzi, F. J., & Bianchi, M. L. (2015) Stochastic Alpha-Beta-Rho Hedging for Foreign Exchange Options: Is It Worth the Effort? *The Journal of Derivatives*, 23(2), 76–89.

Yang, M., Zheng, Z. & Mookerjee, V. (2019) Prescribing Response Strategies to Manage Customer Opinions: A Stochastic Differential Equation Approach. *Information Systems Research*, 30(2), 351–374.

Liite 1. Simuloitujen ennusteiden päivittäiset keskiarvot geometrisen Brownin liikkeen mallille sekä Hestonin mallille ja alkuperäiset valuuttakurssit

(GBM = geometrisen Brownin liikkeen malli)

Päivämäärä	Data	GBM	Hestonin malli
2022-12-23	1,0622	1,0622	1,0622
2022-12-27	1,0624	1,0616	1,0616
2022-12-28	1,0640	1,0612	1,0615
2022-12-29	1,0649	1,0612	1,0602
2022-12-30	1,0666	1,0618	1,0613
2023-01-02	1,0683	1,0608	1,0610
2023-01-03	1,0545	1,0599	1,0610
2023-01-04	1,0599	1,0602	1,0617
2023-01-05	1,0601	1,0595	1,0606
2023-01-06	1,0500	1,0597	1,0603
2023-01-09	1,0696	1,0594	1,0603
2023-01-10	1,0723	1,0595	1,0605
2023-01-11	1,0747	1,0593	1,0608
2023-01-12	1,0772	1,0590	1,0606
2023-01-13	1,0814	1,0581	1,0606
2023-01-16	1,0812	1,0577	1,0606
2023-01-17	1,0843	1,0574	1,0611
2023-01-18	1,0839	1,0576	1,0613
2023-01-19	1,0815	1,0584	1,0622
2023-01-20	1,0826	1,0576	1,0623
2023-01-23	1,0871	1,0579	1,0622
2023-01-24	1,0858	1,0581	1,0628
2023-01-25	1,0878	1,0582	1,0631
2023-01-26	1,0895	1,0565	1,0639
2023-01-27	1,0865	1,0557	1,0646
2023-01-30	1,0903	1,0551	1,0648
2023-01-31	1,0833	1,0536	1,0653
2023-02-01	1,0894	1,0530	1,0658
2023-02-02	1,0988	1,0540	1,0663
2023-02-03	1,0937	1,0540	1,0659
2023-02-06	1,0776	1,0548	1,0666
2023-02-07	1,0700	1,0551	1,0662
2023-02-08	1,0735	1,0561	1,0656
2023-02-09	1,0771	1,0567	1,0659
2023-02-10	1,0690	1,0563	1,0660
2023-02-13	1,0686	1,0564	1,0663
2023-02-14	1,0759	1,0559	1,0654
2023-02-15	1,0700	1,0555	1,0657
2023-02-16	1,0700	1,0545	1,0663
2023-02-17	1,0625	1,0534	1,0652
2023-02-20	1,0674	1,0532	1,0663
2023-02-21	1,0664	1,0535	1,0656
2023-02-22	1,0644	1,0524	1,0643
2023-02-23	1,0616	1,0522	1,0644
2023-02-24	1,0570	1,0527	1,0637
2023-02-27	1,0554	1,0520	1,0637
2023-02-28	1,0619	1,0516	1,0629