



RADON-MUUNNOKSEN OMINAISUUDET JA SOVELLUKSET TOMOGRAFIASSA

Lappeenrannan–Lahden teknillinen yliopisto LUT

Laskennallisen tekniikan koulutusohjelma, Kandidaatintyö

2024

Emma Tahvanainen

Tarkastaja: Lassi Roininen

Tiivistelmä

Lappeenrannan–Lahden teknillinen yliopisto LUT

LUTin insinööritieteiden tiedekunta

Laskennallisen tekniikan koulutusohjelma

Emma Tahvanainen

Radon-muunnoksen ominaisuudet ja sovellukset tomografiassa

Kandidaatintyö

2024

23 sivua, 10 kuvaa

Tarkastaja: Lassi Roininen

Avainsanat: Radon-muunnos, Fourier-muunnos, röntgentomografia, suodatettu takaisinprojektiio

Työn tavoitteena on perehtyä Radon-muunnoksen teoreettisiin perusteisiin sekä tutustua röntgentomografian inversio-ongelmaan ja erilaisiin röntgenkuvien rekonstruktio menetelmiin. Työssä numeerisin esimerkein havainnollistetaan erilaisia rekonstruktio menetelmiä sekä röntgenkuvien rekonstruktioon liittyviä ongelmia.

Työssä johdetaan röntgentomografian matemaattinen malli, Radon-muunnos. Seuraavaksi osoitetaan keskeisellä viipalelauseella Fourier-muunnoksen yhteys Radon-muunnokseen sekä esitellään takaisinprojektiio, jonka avulla johdetaan suodatettu takaisinprojektiio.

Työn numeerisissa esimerkeissä otetaan Shepp-Logan phantom-kuvasta Radon-muunnos ja rekonstruoidaan saatua sinogrammia eri menetelmin. Radon-muunnoksen ja rekonstruktioiden toteuttamiseen käytetään MATLAB-ohjelmistoa ja ASTRA Toolboxin algoritmeja. Phantom-kuvaa rekonstruoidaan myös rajaten θ :n laajuutta ja rajoittamalla projektioiden määrää.

Symboli- ja lyhenneluettelo

ART	Algebraic Reconstruction Technique
CGLS	Conjugate Gradient Least Squares
CT	Computed Tomography
FBP	Filtered Back Projection
MCMC	Markov chain Monte Carlo
PET	Positron Emission Tomography
SART	Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique
SIRT	Simultaneous Iterative Reconstruction Technique
SPECT	Single-Photon Emission Computed Tomography

Sisällysluettelo

Tiivistelmä

Symboli- ja lyhenneluettelo

1	Johdanto	5
1.1	Tausta	5
1.2	Työn tavoitteet	6
1.3	Työn rakenne	6
2	Radon-muunnos röntgentomografiassa	7
2.1	Röntgentomografia	7
2.2	Radon-muunnos	7
2.3	Yhteys Fourier-muunnokseen	8
2.4	Suodatettu takaisinprojektio (Filtered Back Projection)	10
3	Numeeriset esimerkit	13
4	Yhteenveto	20
	Lähdeluettelo	22

1 Johdanto

1.1 Tausta

Johann Radon esitteli Radon-muunnoksen vuonna 1917 keinona määrittää tuntematon funktio sen viivaintegraalien avulla (Andreas, 2016). Menetelmästä tuli laajalti hyödynnetty monilla tieteenaloilla. Lääketieteessä Radon-muunnos on löytänyt paikkansa röntgen- ja CT-kuvantamisen kulmakivenä. 1970-luvulla Radon-muunnosta soveltamalla keksittiin CT-kuvaus (Gharieb, 2022).

Röntgensäteet ovat sähkömagneettista säteilyä, jonka aallonpituudet (0,01–10 nm) ovat lyhyempiä kuin näkyvän valon (400–700 nm) (Suryanarayana & Norton, 1998). Röntgensäteet voivat läpäistä useimpia kohteita. Tiedetään röntgensäteiden läpäistessä esimerkiksi ihmisen, osan säteen energiasta absorboituvan riippuen kuvattavan kohteen tiheydestä ja koostumuksesta. Esimerkiksi ihmisen tiheät kudokset, kuten luut, absorboivat enemmän röntgensädettä ja näin ollen näkyvät valkoisina röntgenkuvassa. Vähemmän tiheät kudokset, kuten lihakset ja sisäelimet absorboivat vähemmän röntgensädettä ja siten näkyvät tummempana röntgenkuvassa.

Röntgenkuvausta käytetään lääketieteessä diagnosoinnin apuna visualisoiden ihmiskehon sisäisiä rakenteita. Perinteiset röntgenkuvat eivät aina tuota riittävästi yksityiskohtia etenkin kehon monimutkaisista anatomisista rakenteista tai päällekkäisistä kudoksista. CT-kuvaus on kuvantamismenetelmä, jossa Radon-muunnoksen avulla tuotetaan yksityiskohtaisia kuvia eri tasoista näin tuottaen kattavamman näkymän kuvattavasta kohteesta verrattuna perinteiseen röntgenkuvaukseen (Lin & Alavi, 2019).

CT-kuvauslaite lähettää sarjan röntgensäteitä eri kulmista kuvattavan kohteen ympäriltä. Tunnistin mittaa kuvattavan kohteen läpäisseiden röntgensäteiden voimakkuuden. Tietokone käsittelee useista eri kuvakulmista kerätyn datan ja muodostaa poikkileikkauskuvia kohteesta (Feeman, 2015).

Radon-muunnosta käytetään myös muissa lääketieteellisissä kuvantamismenetelmissä kuvien rekonstruointiin kuten yksifotoniemissiotomografiassa (SPECT) sekä positroniemissiotomografiassa (PET) (Wernick & Aarsvold, 2004). Näissä tekniikoissa havaitaan gamma-säteitä kehoon lisätystä säteilevästä merkkiaineesta. Radon-muunnosta hyödyntämällä havaittuihin gammasäteisiin voidaan rekonstruoida kuvia säteilevän merkkiaineen leviämisestä kehossa (Fokas & Kastis, 2014).

Radon-muunnokselle löytyy käyttökohteita myös lääketieteen ulkopuolella esimerkiksi teol-

lisuudessa, signaalinkäsittelyssä, hahmontunnistuksessa sekä konenäössä (Magli, Olmo & Presti, 1999; Carmignato, Dewulf & Leach, 2018). Teollisuudessa Radon-muunnos on käytössä esimerkiksi sahoilla tukkien röntgenkuvauksessa keinona havaita viallisia tukkeja (Senchukova et al., 2024). Tukeista otettuja röntgenkuvia voidaan rekonstruoida myös Bayesiläisen inversion avulla. (Suuronen, Emzir et al., 2020; Suuronen, Chada & Roininen, 2022).

1.2 Työn tavoitteet

Tämän kandidaatintyön tavoitteena on tutustua Radon-muunnokseen röntgentomografiasa. Työn tarkoituksena on tutkia Radon-muunnoksen teoreettisia perusteita sekä Fourier-muunnoksen yhteyttä Radon-muunnokseen. Työssä tarkastellaan erilaisia rekonstruktio menetelmiä, ja niistä tutustutaan tarkemmin suodatettuun takaisinprojektiioon. Tavoitteena on numeerisesti toteuttaa ja kokeilla useita rekonstruktio menetelmiä.

Kandidaatintyö rajataan käsittelemään Radon-muunnosta yleisellä tasolla röntgentomografiassa, ja erityisesti CT-kuvauksessa. Rekonstruktio menetelmien tarkastelu rajataan FBP-, SIRT-, SART-, ART- ja CGLS-menetelmiin.

1.3 Työn rakenne

Johdannon ja yhteenvedon lisäksi työ sisältää kaksi päälukua. Luvussa kaksi esitellään työn kannalta oleellinen teoriaosuus. Ensimmäisenä johdetaan Radon-muunnos. Seuraavaksi esitellään Fourier-muunnos sekä osoitetaan sen yhteys Radon-muunnokseen keskeisellä viipalelauseella. Viimeisenä esitellään ja johdetaan takaisinprojektiota hyödyntäen suodatettu takaisinprojektiio (FBP).

Luku kolme sisältää numeeriset esimerkit, joissa Shepp-Logan phantom-kuvia rekonstruoidaan erilaisilla rekonstruktio menetelmillä. Luvussa tutkitaan myös rajatun θ :n laajuuden ja projektioiden määrän vaikutusta Radon-muunnos sinogrammeihin ja rekonstruktion lopputulokseen.

Luku neljä sisältää yhteenvedon työn tuloksista ja sisällöstä. Luvussa pohditaan myös mahdollisia vaihtoehtoja työn jatkamiselle.

2 Radon-muunnos röntgentomografiassa

Lukujen 2.1-2.4 käsittelemät teoreettiset tiedot perustuvat pitkälti lähteisiin (Feeman, 2015) ja (Senchukova, 2020), eikä niitä tästä eteenpäin mainita erikseen lähteinä.

2.1 Röntgentomografia

Kuvattavan kohteen tiheyttä ja kohteen absorboimaa röntgensäteen energiaa kuvataan attenuaatiokertoimella. Attenuaatiokerroin $A(x)$ kertoo absorboituneiden fotonien määrän millimetriä kuvattavaa kohdetta kohden. Beerin lain mukaan attenuaatiokertoimen $A(x)$ ja etäisyydeltä x kohteen läpäisevän röntgensäteen intensiteetin $I(x)$ suhde kuvataan seuraavasti

$$\frac{dI(x)}{dx} = -A(x)I(x). \quad (1)$$

Jos $I(x_0) = I_0$ kuvaa röntgensäteen alkuintensiteettiä lähtöpisteessä x_0 ja $I(x_1) = I_1$ kuvaa säteen lopullista intensiteettiä pisteessä x_1 saadaan

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dI}{I} = - \int_{x_0}^{x_1} A(x) dx, \quad (2)$$

josta seuraa

$$\log \left(\frac{I_0}{I_1} \right) = \int_{x_0}^{x_1} A(x) dx. \quad (3)$$

Yhtälö (3) kuvaa funktion $A(x)$ viivaintegraalia pisteestä x_0 pisteeseen x_1 . CT-kuvauksen tuottamat poikkileikkauskuvat tietyssä tasossa kuvataan kahden muuttujan funktiolla $A(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Kaksiulotteinen Radon-muunnos kuvaa \mathbb{R}^2 kuuluvan funktion sen viivaintegraalien joukkona.

2.2 Radon-muunnos

Radon-muunnoksella muutetaan CT-kuvauslaitteen keräämä data viivaintegraaleiksi, jotka kuvaavat röntgensäteen voimakkuuta kuljettaessa kuvattavan kohteen läpi eri kulmista.

Suoran $\ell \in \mathbb{R}^2$ yhtälö voidaan kirjoittaa yleisessä muodossa

$$ax + by = c, \quad (4)$$

jossa $a, b, c \in \mathbb{R}$ ja $a^2 + b^2 \neq 0$. Näin ollen yhtälö (4) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}y = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (5)$$

Kaikilla reaaliluvuilla t ja θ suora $\ell_{t,\theta}$ kulkee pisteestä $(t \cos \theta, t \sin \theta)$ ja on kohtisuorassa yksikkövektoriin $\vec{n} = (\cos \theta, \sin \theta)$.

Kaikki suorat tasossa voidaan kuvata $\ell_{t,\theta}$, joillain arvoilla t ja θ . Jollain reaaliluvulla s suora $\ell_{t,\theta}$ voidaan parametrisoida muodossa $(x(s), y(s))$, jossa $x(s) = t \cos \theta - s \sin \theta$ ja $y(s) = t \sin \theta + s \cos \theta$ kun $-\infty < s < \infty$. Suora $\ell_{t,\theta}$ voidaan kuvata muodossa

$$\ell_{t,\theta} = \{(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) : -\infty < s < \infty\}. \quad (6)$$

Näin ollen tasossa määritetylle funktiolle $f(x, y)$ saadaan muodoksi

$$\int_{\ell_{t,\theta}} f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds. \quad (7)$$

Integraalin arvo kertoo röntgensäteiden intensiteetin, kun röntgensäde on kulkenut suoraa $\ell_{t,\theta}$ pitkin.

Funktion $f \in \mathbb{R}^2$ Radon-muunnos on

$$\mathcal{R}f(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x(s), y(s)) ds. \quad (8)$$

2.3 Yhteys Fourier-muunnokseen

Radon-muunnoksen käänteismuunnoksen kaava voidaan johtaa Fourier-muunnoksen avulla. Yksiulotteinen Fourier-muunnos $\mathcal{F}f$ kaikkialla integroituvasta funktiosta $f \in \mathbb{R}$ on määritelty kaikilla $\omega \in \mathbb{R}$ seuraavasti

$$\mathcal{F}f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx. \quad (9)$$

Yksiulotteisen Fourier-muunnoksen käänteismuunnoksen kaava on

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\omega)e^{i\omega x} d\omega. \quad (10)$$

Kaksiulotteinen Fourier-muunnos kaikille $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ on

$$\mathcal{F}_2f(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)e^{-i(ux+vy)} dx dy. \quad (11)$$

Kaksiulotteisen Fourier-muunnoksen käänteismuunnoksen kaava on

$$\mathcal{F}_2^{-1}f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_2f(u, v)e^{i(ux+vy)} dudv. \quad (12)$$

Seuraavalla teoreemalla todistetaan Radon- ja Fourier-muunnosten välinen yhteys.

Teoreema 2.1. *Keskeinen viipalelause (The Central Slice Theorem)*

Mille tahansa tasossa kuvatulle kaikkialla integroituvalla funktiolla f ja reaaliluvuille S ja θ pätee

$$\mathcal{F}_2f(S \cos \theta, S \sin \theta) = \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta). \quad (13)$$

Todistus. Funktion f kaksiulotteinen Fourier-muunnos on

$$\mathcal{F}_2f(S \cos \theta, S \sin \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)e^{-iS(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy. \quad (14)$$

Muuttujanvaihdoksella (t, s) yhtälön (14) oikea puoli saadaan muotoon

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) e^{-iSt} ds dt. \quad (15)$$

Yhtälön (15) integraali voidaan sieventää muotoon

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds \right) e^{-iSt} dt, \quad (16)$$

jolloin sisempi integraali vastaa funktion f Radon-muunnosta pisteessä (t, θ)

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{R}f(t, \theta)) e^{-iSt} dt. \quad (17)$$

Yhtälö (17) vastaa $\mathcal{R}f$:n Fourier-muunnosta parametrein (S, θ)

$$\mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta). \quad (18)$$

Teoreema 2.1 todistaa, että kaksiulotteinen Fourier-muunnos funktiosta f suoraa $\ell_{t, \theta}$ pitkin on Fourier-muunnos funktion f Radon-muunnoksesta

$$\mathcal{F}_2 f(S \cos \theta, S \sin \theta) = \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta). \quad (19)$$

□

2.4 Suodatettu takaisinprojektiio (Filtered Back Projection)

Radon-muunnos $\mathcal{R}f(S, \theta)$ antaa kappaleen f tiheyden annettua suoraa pitkin. Kappaleen tiheys määritetään mittaamalla kappaleen läpäisevän röntgensäteen intensiteetti ennen ja jälkeen kappaleen läpäisyn. Takaisinprojektiolla voidaan rekonstruoida kuvattu kappale käyttämällä tietoa röntgensäteiden absorboitumisesta.

Funktion h takaisinprojektiio polaarikoordinaatein (t, θ) pisteessä (x, y) on

$$\mathcal{B}h(x, y) := \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} h(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta. \quad (20)$$

Yhtälöä (20) soveltamalla attenuaatiofunktion Radon-muunnokseen, saadaan selville Radon-muunnoksen $\mathcal{R}f$ takaisinprojektiio pisteessä (x, y)

$$\mathcal{BR}f(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathcal{R}f(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta. \quad (21)$$

Takaisinprojektio tuottaa tulokseksi siloitellun version alkuperäisestä funktiosta. Suodatetulla takaisinprojektiolla voidaan korjata funktion siloitusta ja tuottaa parempi kuvaus alkuperäisestä funktiosta.

Teoreema 2.2. *Suodatettu takaisinprojektio*

Kaikkialla integroituvalla funktiolla $f \in \mathbb{R}^2$ pätee

$$f(x,y) = \frac{1}{2} \mathcal{B} [\mathcal{F}^{-1} [|S| \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta)]](x,y). \quad (22)$$

Todistus. Kun funktion f kaksiulotteiselle Fourier-muunnokselle tehdään kaksiulotteinen käänteismuunnos, saadaan tulokseksi funktio f

$$f(x,y) = \mathcal{F}_2^{-1} \mathcal{F}_2 f(x,y). \quad (23)$$

Kaksiulotteisen Fourier-muunnoksen käänteismuunnoksen määritelmän mukaan edellinen yhtälö saadaan muotoon

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_2 f(u,v) e^{i(xu+yv)} dudv. \quad (24)$$

Muuttujanvaihdoksella karteesisista koordinaatistosta (u,v) polaarikoordinaatistoon (S, θ) , jolloin $u = S \cos \theta$ ja $v = S \sin \theta$. Muuttujanvaihdon myötä $dudv = |S| dSd\theta$.

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_2 f(S \cos \theta, S \sin \theta) e^{iS(x \cos \theta + y \sin \theta)} |S| dSd\theta, \quad (25)$$

kun $S \in \mathbb{R}$ ja $\theta \in [0, \pi]$.

Teoreeman 2.1 avulla yhtälö (25) voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta) e^{iS(x \cos \theta + y \sin \theta)} |S| dSd\theta. \quad (26)$$

Yhtälön (26) sisempi integraali voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$2\pi \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\mathcal{R}f(S, \theta)) e^{iS(x \cos \theta + y \sin \theta)} |S| dS \right). \quad (27)$$

Näin yhtälö (26) saadaan muotoon

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{F}^{-1} [|S| \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta)](x \cos \theta + y \sin \theta, \theta). \quad (28)$$

Yllä oleva yhtälö saadaan yhtälön (21) avulla muotoon

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \mathcal{B} [\mathcal{F}^{-1} [|S| \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta)]](x, y), \quad (29)$$

joka on funktion f suodatettu takaisinprojektiio.

□

3 Numeeriset esimerkit

Numeeristen esimerkkien tarkoituksena on kokeilla rekonstruktion tuottamista rajatulla θ :n laajuudella sekä eri projektioiden määrillä. Esimerkeissä kokeillaan myös useampaa rekonstruktio menetelmää Shepp-Logan phantom-kuvan ja kohinaisen phantom-kuvan rekonstruoimiseen.

Numeeristen esimerkkien toteutuksessa käytettiin MATLAB-ohjelmistoa. Rekonstruoitavana kuvana käytettiin Shepp-Logan phantom-kuvaa, joka toimii mallina ihmisen pään poikkeileikkauskuvasta. Testikuvat toteutettiin MATLAB-funktiolla “phantom”.

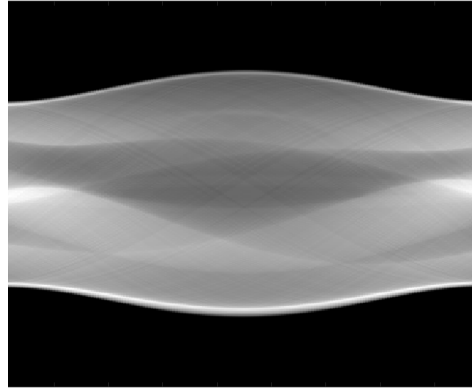
Kuvat 2-6 ja 9 toteutettiin MATLAB-funktioilla “radon” ja “iradon”, jotka ovat MATLAB-ohjelmiston toteutus Radon-muunnoksesta ja Radon-muunnoksen käänteismuunnoksesta. Kuvat 7 ja 10 toteutettiin ASTRA Toolboxin algoritmien avulla (Palenstijn, Batenburg & Sijbers, 2011; van Aarle et al., 2016).

Kuvassa 1 on testikuvana käytetty Shepp-Logan phantom-kuva ennen Radon-muunnosta ja rekonstruktiota.



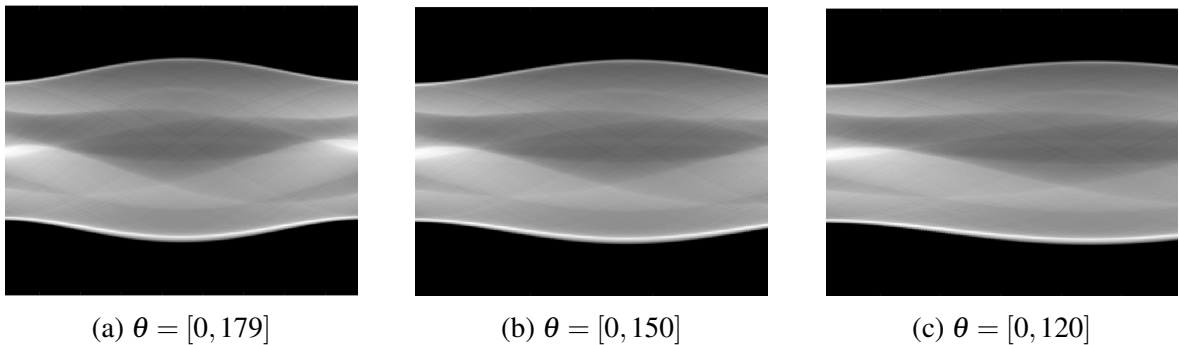
Kuva 1: Shepp-Logan phantom-kuva.

Kuvassa 2 on phantom-kuvasta luotu Radon-muunnos sinogrammi rajoittamatta θ :n laajuutta. Kuvakulma on laajimmillaan, kun $\theta = [0, 179]$.



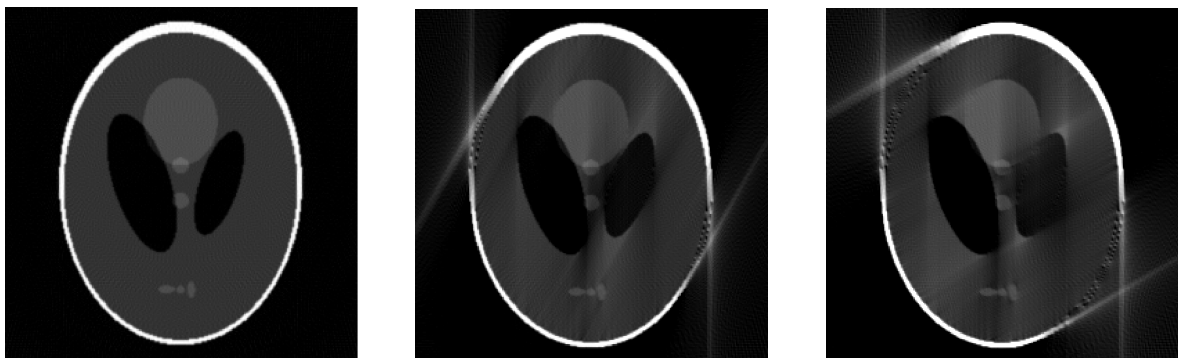
Kuva 2: Phantom-kuvan Radon-muunnos sinogrammi.

Kuvassa 3 nähdään phantom-kuvasta luodut sinogrammit kolmella θ :n laajuudella. Ensimmäinen sinogrammi on identtinen kuvan 2 sinogrammin kanssa. θ :n laajuutta pienennettäessä sinogrammi venyy ja sinogrammin oikeasta reunasta huomataan puuttuva data.

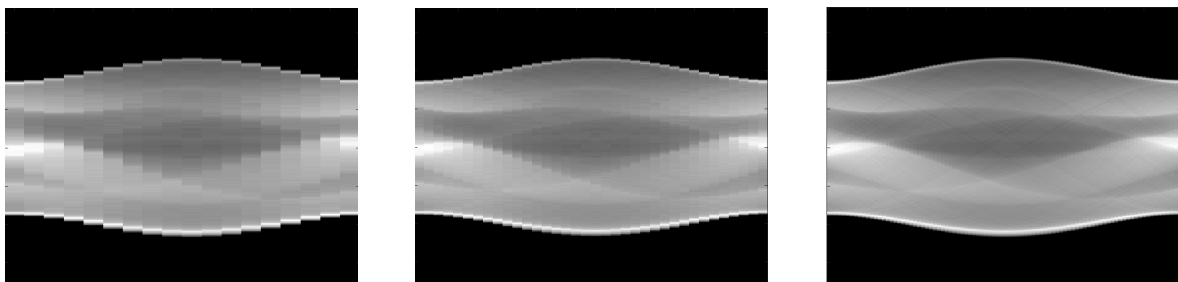


Kuva 3: Phantom-kuvan sinogrammit radon-funktiolla eri θ :n laajuuksilla.

Kuvassa 4 on phantom-kuva rekonstruoituna kolmella eri θ :n laajuudella. θ kuvastaa kuinka laajalta alueelta projektioita otetaan. Huomataan θ :n pienentyessä rekonstruoidun kuvan muuttuvan nopeasti epäselväksi ja yksityiskohtien katoavan. θ :n rajaamisen myötä projektioita otetaan suppeammalta alueelta, jolloin Radon-muunnos dataa jää puuttumaan tietyltä alueelta. Puuttuva data aiheuttaa puutteellisen ja epäselvän rekonstruktion.

(a) $\theta = [0, 179]$ (b) $\theta = [0, 150]$ (c) $\theta = [0, 120]$ Kuva 4: Phantom-kuva rekonstruoituna iradon-funktiolla eri θ :n laajuuksilla.

Kuvassa 5 on phantom-kuvasta luotu sinogrammit kolmella eri projektioiden määrällä. 18 sekä 36 projektiolla sinogrammeista nähdään selvästi projektioiden määrä karkeina rajoina sinogrammeissa. 90 projektiolla sinogrammi on lähes saumaton, eikä projektioiden määrää havaita.



(a) 18 projektiota

(b) 36 projektiota

(c) 90 projektiota

Kuva 5: Phantom-kuvan Radon-muunnos sinogrammit eri projektioiden määrillä.

Kuvassa 6 on phantom-kuva rekonstruoituna θ :n arvolla $[0, 179]$, mutta kolmella eri projektioiden määrällä. Kuvista nähdään rekonstruoinnin onnistuvan pienelläkin projektioiden määrällä. Yksityiskohdat kuitenkin erottuvat kunnolla vasta 90 projektiolla. 90 projektiosta rekonstruoitu kuva vastaa lähes alkuperäistä kuvaa. Koska θ :n laajuutta ei ole rajoitettu, projektioita otetaan laajalta alueelta harvemmin. Tällöin puuttuva data jää pienille alueille projektioiden välille eikä vain yhdelle alueelle ja rekonstruktioista saadaan selkeämpi.



(a) 18 projektiota

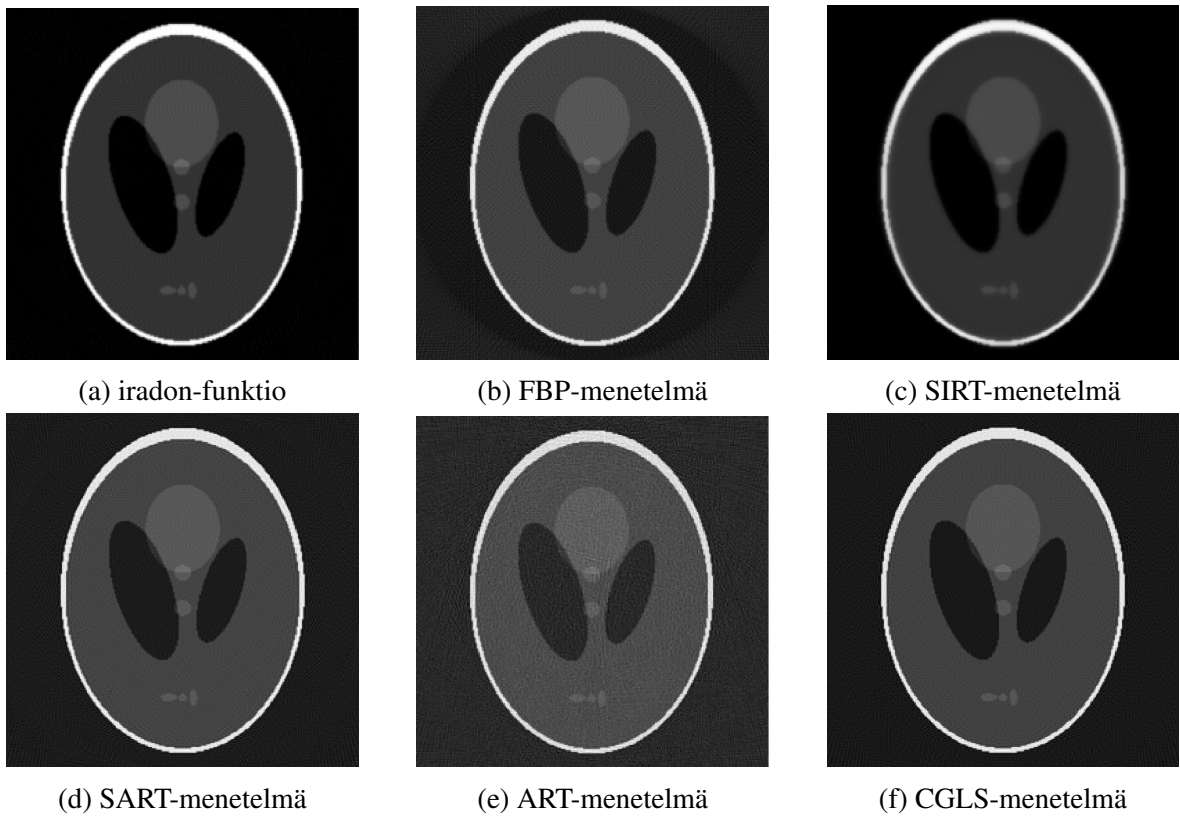
(b) 36 projektiota

(c) 90 projektiota

Kuva 6: Phantom-kuva rekonstruoituna iradon-funktiolla 18, 36 ja 90 projektiolla, kun $\theta = [0, 179]$

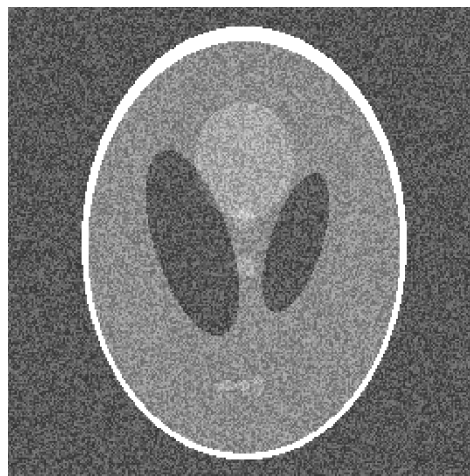
Kuvassa 7 on phantom-kuva rekonstruoituna kuudella eri rekonstruktio menetelmällä. Rekonstruktio menetelminä käytettiin MATLAB-funktiota “iradon” ja ASTRA Toolboxin algoritmeja Filtered Backprojection (FBP), Simultaneous Iterative Reconstruction Technique (SIRT), Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique (SART), Algebraic Reconstruction Technique (ART) ja Conjugate Gradient Least Squares (CGLS).

Kuvasta 7 huomataan, että rekonstruktio menetelmien välillä ei ole suuria eroavaisuuksia. Huomataan kuitenkin pienempiä eroavaisuuksia rekonstruoitujen kuvien välillä, erityisesti SIRT- ja ART-menetelmillä rekonstruoidut kuvat eroavat muista rekonstruktioista. SIRT-menetelmä tuotti sumeamman rekonstruktion ja ART-menetelmä rakeisemman rekonstruktion verrattuna muihin rekonstruktioihin.



Kuva 7: Phantom-kuva rekonstruoituna iradon-, FBP-, SIRT-, SART-, ART- ja CGLS-menetelmillä.

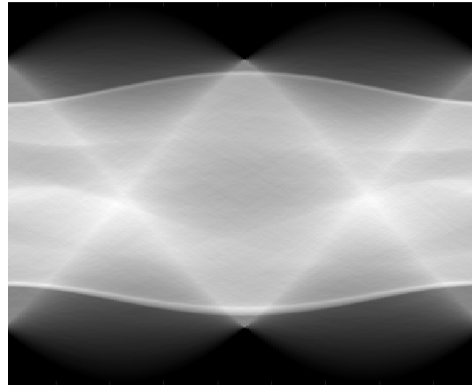
Kuvassa 8 on phantom-kuva, johon on lisätty kohinaa MATLAB-funktiolla "rand". Kohinainen kuva vaikeuttaa selkeän ja yksityiskohtaisen rekonstruktion tuottamista.



Kuva 8: Shepp-Logan phantom-kuva lisättyä kohinalla.

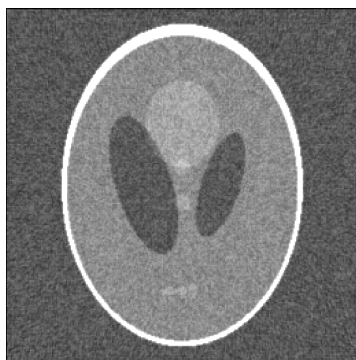
Kuvassa 9 on kohinaisesta phantom-kuvasta luotu Radon-muunnos sinogrammi. Kuvasta

nähdään selvästi kohinan aiheuttavan heijastumia ja sumean sinogrammin.

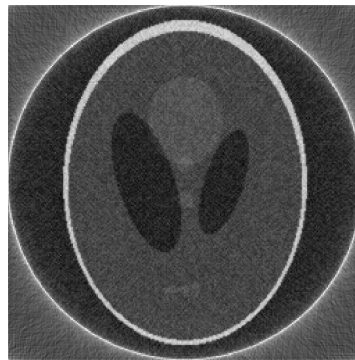


Kuva 9: Radon-muunnos sinogrammi kohinaisesta phantom-kuvasta.

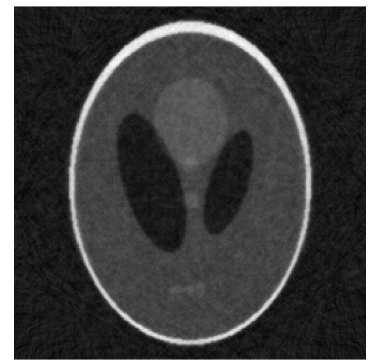
Kuvassa 10 on kohinainen phantom-kuva rekonstruoituna käyttäen samoja kuutta rekonstruktio menetelmiä, joita käytettiin kuvassa 7. Kuvasta nähdään, että rekonstruktio onnistui kaikilla menetelmillä kohinasta huolimatta. FBP-menetelmällä kohina kuitenkin aiheutti rekonstruktion ympärille renkaan. Kuvasta 7 voidaan myös nähdä FBP-menetelmän rekonstruktiossa tummempi alue. MATLAB-funktiolla "iradon" saatiin rekonstruoitua lähtötilanteen mukainen kuva, mutta rekonstruktio jäi kohinaiseksi. SART- ja CGLS-menetelmillä saatiin eniten häivyttettyä kohinaa rekonstruoidusta kuvasta. SIRT-menetelmällä kohinaa saatiin myös häivyttettyä, mutta rekonstruktio on muuten jäänyt sumeaksi kuten kuvassa 7. Kohinan takia yksityiskohdat eivät erotu rekonstruktioissa hyvin.



(a) iradon-funktio



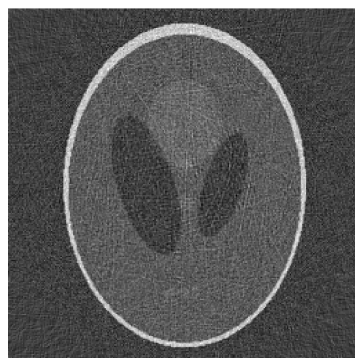
(b) FBP-menetelmä



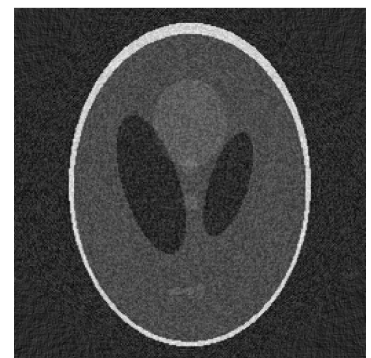
(c) SIRT-menetelmä



(d) SART-menetelmä



(e) ART-menetelmä



(f) CGLS-menetelmä

Kuva 10: Kohinainen phantom-kuva rekonstruoituna iradon-, FBP-, SIRT-, SART-, ART- ja CGLS-menetelmillä.

4 Yhteenveto

Kandidaatintyössä tutustuttiin Radon-muunnoksen ominaisuuksiin ja sovelluksiin röntgentomografiassa. Työssä käsiteltiin röntgentomografian ja Radon-muunnoksen perusteita, yhteyttä Radon- ja Fourier-muunnoksien välillä sekä aiheeseen liittyvää inversio-ongelmaa, eli Radon-muunnos sinogrammista röntgenkuvan rekonstruoimista.

Luku kaksi sisälsi Radon-muunnoksen ja suodatetun takaisinprojektion teoreettisiin perusteisiin tutustumista. Luvussa johdettiin röntgentomografian matemaattinen malli, Radon-muunnos sekä takaisinprojektion avulla suodatettu takaisinprojektio rekonstruktio menetelmä. Luvussa osoitettiin myös kaksiulotteisen Fourier-muunnoksen ja keskeisen viipaleeseen avulla Fourier-muunnoksen yhteys Radon-muunnokseen.

Luvussa kolme esiteltiin numeerisia esimerkkejä MATLAB-ohjelmistolla Shepp-Logan phantom-kuvan rekonstruktioista erilaisin rekonstruktio menetelmin. Phantom-kuvista luotiin Radon-muunnos sinogrammit ja rekonstruoiittiin sinogrammit takaisin phantom-kuviksi. Luvussa rekonstruoiittiin phantom-kuvia myös rajatulla θ :n laajuudella, eri projektioiden määrällä sekä phantom-kuvaan lisätyllä kohinalla. Rekonstruktio menetelminä käytettiin MATLAB-ohjelmiston iradon-funktiota sekä ASTRA Toolboxin FBP-, SIRT-, SART-, ART- ja CGLS-algoritmeja.

Phantom-kuvista luoduista Radon-muunnos sinogrammeista huomattiin θ :n laajuuden rajaamisen aiheuttavan sinogrammien venymistä ja puuttuvan datan häviävän sinogrammien oikeasta reunasta. Projektioiden määrää vähennettäessä sinogrammeista saatiin karkeampia ja huomattavasti epäselvempiä. Phantom-kuvaan lisätty kohina aiheutti luotuun sinogrammiin heijastumia sekä itsessään sumean sinogrammin.

Rekonstruoiduista phantom-kuvista huomattiin θ :n laajuuden rajaamisen sekä projektioiden vähentämisen vaikuttavan phantom-kuvien rekonstruktioon merkittävästi. θ :n laajuuden rajaaminen aiheutti vääristymiä phantom-kuvien rekonstruktioihin, koska pois rajatulta alueelta ei ollut Radon-muunnos mittausdataa käytettävissä. Projektioita vähentämällä puuttuva data jakautui pienempiin osiin tasaisesti koko rekonstruoidun phantom-kuvan alueelle, jolloin rekonstruktioista saatiin selkeämpiä. Projektioiden määrän vähentäminen johti kuitenkin yksityiskohtien häviämiseen rekonstruoiduista phantom-kuvista.

Työ rajattiin käsittelemään Radon-muunnosta röntgentomografiassa ja CT-kuvantamisessa. Työtä voitaisiin laajentaa käsittelemällä Radon-muunnoksen muutakin käyttöä lääketieteellisessä kuvantamisessa sekä tutkimalla Radon-muunnoksen sovelluksia ja käyttökohteita muillakin tieteenaloilla. Rekonstruktio menetelmiä voitaisiin perusteellisemmin vertailla

keskenään eri ominaisuuksiltaan. Rekonstruoitavaan kuvaan lisätyn kohinan ja puuttuvan Radon-muunnos mittausdatan vaikutuksia kuvien rekonstruktioihin voitaisiin käsitellä ja tutkia tarkemmin.

Työtä voitaisiin jatkaa tutustumalla Bayesiläisen inversion käyttökohteisiin kuvien rekonstruomisessa. Erityisesti voitaisiin tutkia niin sanottuja raskashäntäisiä prioreja, joilla todennäköisyysjakauman massaa on paljon muuallakin kuin odotusarvon ympärillä. Tällöin voitaisiin mallintaa paremmin vaikeampia kohteita kuten tapauksia, joissa on suuria kontrastieroja attenuaatiokertoimissa (Suuronen, Chada & Roininen, 2022; Senchukova et al., 2024). Tällaisten jakaumien käyttö kuitenkin tuottaa teknisiä vaikeuksia, sillä se edellyttäisi menetelmäkehitystä esim. MCMC-tekniikoissa. Kun teknisesti pystyttäisiin näitä malleja käyttämään, pystyttäisiin tuottamaan aiempaa tarkempia kuvantamistekniikoita.

Lähdeluettelo

- Andreas, O. (2016). Johann Radon. *Radiologe* 56, s. 817–818. DOI: <https://doi-org.ezproxy.cc.lut.fi/10.1007/s00117-016-0099-5>.
- Carmignato, S., Dewulf, W. & Leach, R. (2018). *Industrial X-Ray Computed Tomography*. Springer Charm. ISBN: 978-3-319-59571-9. DOI: <https://doi-org.ezproxy.cc.lut.fi/10.1007/978-3-319-59573-3>.
- Feeman, T. G. (2015). *The Mathematics of Medical Imaging. A Beginner's Guide*. Springer Cham. ISBN: 978-3-319-22665-1.
- Fokas, A. S. & Kastis, G. A. (2014). Mathematical Methods in PET and SPECT Imaging. Teoksessa: *Handbook of Mathematical Methods in Imaging*. Toim. O. Scherzer. New York: Springer. DOI: https://doi-org.ezproxy.cc.lut.fi/10.1007/978-3-642-27795-5_45-3.
- Gharieb, R. R. (2022). *Computed-Tomography (CT) Scan*. IntechOpen. ISBN: 978-1-80355-118-0.
- Lin, E. C. & Alavi, A. (2019). *PET and PET/CT. A Clinical Guide*. 3. painos. Thieme Medical Publishers, Incorporated. ISBN: 978-1-626-23134-4.
- Magli, E., Olmo, G. & Presti, L. (1999). Pattern recognition by means of the Radon transform and the continuous wavelet transform. *Signal Processing* 73(3), s. 277–289. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0165-1684\(98\)00198-4](https://doi.org/10.1016/S0165-1684(98)00198-4).
- Palenstijn, W. J., Batenburg, K. J. & Sijbers, J. (2011). Performance improvements for iterative electron tomography reconstruction using graphics processing units (GPUs). *Journal of Structural Biology* 176, s. 250–253. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsb.2011.07.017>.
- Senchukova, A. (2020). Learned image reconstruction in X-ray computed tomography. LUT-University. URL: <https://urn.fi/URN:NBN:fi-fe2020062445578>.
- Senchukova, A., Suuronen, J., Heikkinen, J. & Roininen, L. (2024). Geometry Parameter Estimation for Sparse X-Ray Log Imaging. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 66, s. 154–166. DOI: <https://doi-org.ezproxy.cc.lut.fi/10.1007/s10851-023-01167-6>.
- Suryanarayana, C. & Norton, M. G. (1998). *X-Ray Diffraction: A Practical Approach*. Springer. URL: <https://ebookcentral.proquest.com/lib/lut/detail.action?docID=3086226>.
- Suuronen, J., Chada, N. K. & Roininen, L. (2022). Cauchy Markov random field priors for Bayesian inversion. *Statistics and Computing* 32. DOI: <https://doi-org.ezproxy.cc.lut.fi/10.1007/s11222-022-10089-z>.
- Suuronen, J., Emzir, M., Lasanen, S., Särkkä, S. & Roininen, L. (2020). Enhancing industrial X-ray tomography by data-centric statistical methods. *Data-Centric Engineering* 1. DOI: [doi:10.1017/dce.2020.10](https://doi.org/10.1017/dce.2020.10).
- van Aarle, W., Palenstijn, W. J., Cant, J., Janssens, E., Bleichrodt, F., Dabrovolski, A., Beenhouwer, J. D., Batenburg, K. J. & Sijbers, J. (2016). Fast and Flexible X-ray Tomo-

graphy Using the ASTRA Toolbox. *Optics Express* 24(22), s. 25129–25147. DOI: <http://dx.doi.org/10.1364/OE.24.025129>.

Wernick, M. N. & Aarsvold, J. N. (2004). *Emission Tomography. The Fundamentals of PET and SPECT*. Elsevier Science & Technology. ISBN: 978-0-127-44482-6.