RELATIVISTISET VAIKUTUKSET GPS-SIGNAALIN TARKKUUTEEN: ANALYYSI- JA KORJAUSMENETELMÄT

Lappeenrannan–Lahden teknillinen yliopisto LUT

Laskennallisen tekniikan koulutusohjelma, Kandidaatintyö

2024

Jere Arokivi

Tarkastaja: Tutkijaopettaja Erik Vartiainen

Tiivistelmä

Lappeenrannan–Lahden teknillinen yliopisto LUT

LUTin insinööritieteiden tiedekunta

Laskennallisen tekniikan koulutusohjelma

Jere Arokivi

Relativistiset vaikutukset GPS-signaalin tarkkuuteen: analyysi- ja korjausmenetelmät

Kandidaatintyö

2024

27 sivua ja 3 kuvaa

Tarkastaja: Tutkijaopettaja Erik Vartiainen

Avainsanat: GPS, satelliittipaikannus, suhteellisuusteoria, signaalin tarkkuus, signaalin korjaus

Relativistiset ilmiöt vaikuttavat suuresti GPS-signaalien tarkkuuteen, mikä tekee näiden ilmiöiden tutkimisesta mielenkiintoisen haasteen. Tämä opinnäytetyö keskittyy analysoimaan suhteellisuusteorian ilmiöiden aiheuttamia virheitä GPS-järjestelmissä.

Työn tavoitteena on tarjota kattava kirjallisuuskatsaus, jossa tunnistetaan merkittävimmät virhelähteet, arvioidaan niiden suuruudet ja arvioidaan erilaisia korjausmenetelmiä.

Keskeisiä virhelähteitä ovat aikadilaatio, gravitaation aiheuttamat taajuussiirtymät ja Sagnacin ilmiö. Nämä ilmiöt muuttavat GPS-signaalien ajan kulkua. Aikadilaatio johtuu satelliittien suuresta nopeudesta suhteessa Maahan, kun taas gravitaatiotaajuusmuutokset johtuvat satelliittien ja vastaanottimien kokeman gravitaatiokentän eroista. Nämä ilmiöt aiheuttavat huomattavia paikannusvirheitä. Sagnacin ilmiö, joka johtuu Maan pyörimisestä, aiheuttaa signaalien kulkuaikojen eroja signaalin kulkusuunnan mukaan.

Tutkimus osoittaa, että nykyiset GPS-järjestelmät kykenevät tehokkaasti korjaamaan suhteellisuusteorian virheitä, mutta kehityskohteita on edelleen olemassa suurempaa tarkkuutta vaadittaessa.

Johtopäätöksenä on, että suhteellisuusteorian ilmiöiden huomioon ottaminen on välttämätöntä korkean tarkkuuden saavuttamiseksi GPS-järjestelmissä.

Abstract

Lappeenranta–Lahti University of Technology LUT

LUT School of Engineering Science

Degree Programme in Computational Engineering

Jere Arokivi

Relativistic effects on GPS signal accuracy: analysis and correction methods

Bachelor's thesis

2024

27 pages and 3 figures

Examiner: Tutkijaopettaja Erik Vartiainen

Keywords: GPS, satellite positioning, theory of relativity, signal accuracy, signal correction

The accuracy of GPS signals is impacted by relativistic phenomena, making the prediction and correction of these effects a compelling academic challenge. This thesis focuses on identifying and correcting errors caused by relativistic phenomena within GPS systems.

The objective of the thesis is to provide a comprehensive literature review and an analysis of scientific articles, identifying the primary and most impactful sources of errors, estimating their magnitudes, and evaluating different correction methods.

Key sources of errors include time dilation, gravitational frequency shifts, and the Sagnac effect. These phenomena alter the timing of GPS signals. Time dilation results from the high velocity of satellites relative to Earth, while gravitational frequency shifts occur due to differences in gravitational fields experienced by the satellites and receivers. Without accounting for these effects, positioning errors could accumulate significantly. The Sagnac effect, caused by Earth's rotation, leads to discrepancies in signal travel times depending on the signal's direction.

The research shows that while current GPS systems can effectively correct for relativistic errors, there is still potential for improvement with more advanced techniques.

In conclusion, addressing the effects of relativity is essential for achieving high accuracy in GPS systems.

Symboli- ja lyhenneluettelo

Latinalaiset aakkoset

A	pinta-ala	m^2
c	valonnopeus	$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
f	taajuus	$\mathrm{s}^{-1}, \mathrm{Hz}$
G	gravitaatiovakio	$\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
$G_{\mu\nu}$	einsteinin tensori	
L	pituus	m
M	massa	kg
R	säde	m
$\mathbf{r}$	paikkavektori	
A	aika	s
$T_{\mu\nu}$	energia-impulssitensori	
v	nopeus	$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
$\mathbf{v}$	nopeusvektori	$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
x	x-koordinaatti	m
y	y-koordinaatti	m
z	z-koordinaatti	m

Kreikkalaiset aakkoset

Δ	muutos/erotus
γ	lorentzo-tekijä
ω	kulmanopeus

Alaindeksit

d	muutos/ero
e	maapallo
gps	GPS-järjestelmä
gr	yleinen suhteellisuusteoria
k	korjattu signaali
l	lähetetty signaali
m	myötäpäivään kulkeva signaali
r	GPS-vastaanotin
sr	suppea suhteellisuusteoria

s	GPS-Satelliitti
tot	kokonais
v	vastapäivään kulkeva signaali
x	x-koordinaatti
y	y-koordinaatti
z	z-koordinaatti

Lyhenteet

ECEF	Maan keskipisteeseen kiinnittynyt koordinaattijärjestelmä eli Earth-Centered Earth-Fixed
ECI	Maapallon keskipisteeseen suhteessa inertiaalinen koordinaattijärjestelmä eli Earth-Centered Inertial
GEO	Geostationaarinen
GPS	Global Positioning System
ISS	kansainvälinen avaruusasema eli international space station
MCS	Pääohjausasema eli Master Control Station
SA	Valikoiva saatavuus eli Selective Availability

Sisällysluettelo

Tiivistelmä

Abstract

Symboli- ja lyhenneluettelo

Sisällysluettelo 6

Kuvaluettelot 7

1 Johdanto 8

1.1 Taustaa 8

1.2 Tavoitteet ja rajaus 8

1.3 Työn rakenne 9

2 GPS-järjestelmät 10

2.1 Historia ja kehitys 10

2.2 Perusteet ja toimintaperiaate 10

2.3 GPS-järjestelmän eri segmentit 11

3 Relativistiset ilmiöt 13

3.1 Suppea suhteellisuusteoria 13

3.2 Yleinen suhteellisuusteoria 14

4 Suhteelliset vaikutukset teknologiaan 16

4.1 Aikadilaatio 16

4.2 Gravitaatio taajuussiirtymät 19

4.3 Sagnac efekti 20

5 Yhteenveto 24

6 Johtopäätökset 25

Lähdeluettelo 27

Kuvaluettelo

1 Satelliittien muodostamien pallojen havainnostus.(El-Rabbany, 2002)

2 Aikadilaatio vuorokauden aikana radan etäisyyden funktiona maanpinnasta, missä on havainnollistettu kansainvälisen avaruusaseman eli international space station (ISS), GPS-sateliitin ja Geostationaarisen (GEO) sateliitin kiertoratoja.

3 Vasemmalla puolella on esitetty satelliitti Sw (a), joka lähettää signaalin Maan pyörimisen suuntaisesti. Oikealla puolella on esitetty satelliitti Se (b), joka lähettää signaalin vastakkaiseen suuntaan suhteessa Maan pyörimiseen.(Ruyong Wang, 2000)

1 Johdanto

1.1 Taustaa

Global Positioning System (GPS) on vallankumouksellinen saavutus, joka on mullistanut ihmisten kykyä navigoida ja paikantaa sijaintiaan maapallolla. Sen juuret ulottuvat kylmän sodan aikakauden avaruuskilpailuun, ja alun perin se kehitettiin ja otettiin käyttöön Yhdysvaltain puolustusvoimien toimesta tarkkojen paikannustietojen saamiseksi. Nykyään GPS on laajentunut sotilaskäytöstä siviilikäyttöön ja on tullut korvaamattomaksi työkaluksi monilla eri toimialoilla, kuten liikenteessä, logistiikassa, henkilökohtaisessa navigoinnissa ja useassa muussa paikkatietoihin perustuvassa teknologiassa.(Taubes & Kleppner, 1996)

GPS:n toimintaperiaate on yksinkertainen, mutta sen toteutus on erittäin monimutkainen. Järjestelmä perustuu signaaleihin, jotka lähetetään Maata kiertäviltä satelliiteilta ja vastaanotetaan laitteilla maan pinnalla. Näiden signaalien ajoitus ja tarkkuus ovat ratkaisevassa asemassa GPS:n tarjoaman paikkatiedon luotettavuuden kannalta. Tässä yhteydessä suhteellisuusteorian käsitteet, erityisesti aikadilataatio ja gravitaation aiheuttamat taajuussiirtymät tulevat keskeisiksi, sillä ne vaikuttavat suoraan satelliittien kellonopeuteen ja siten niiden lähettämien signaalien taajuuteen ja ajoitukseen.(El-Rabbany, 2002; Taubes & Kleppner, 1996)

Tämän opinnäytetyön taustalla on tarve ymmärtää perusteellisesti, kuinka suhteellisuusteorian ilmiöt vaikuttavat GPS:n tarkkuuteen. Käsitys näistä vaikutuksista on tärkeä paitsi olemassa olevan järjestelmän ylläpidossa, myös uusien tarkempien paikannusteknologioiden kehittämisessä. Tämä työ tarkastelee suhteellisuusteorian ja GPS-teknologian keskeisimpiä kohtia tarjoten ymmärrystä niistä fysiikan periaatteista, jotka vaikuttavat ja rajoittavat järjestelmän suorituskykyä.

1.2 Tavoitteet ja rajaus

Tämän opinnäytetyön tavoite on suorittaa perusteellinen kirjallisuuskatsaus, jossa analysoidaan aiemmissa tutkimuksissa esiin tuotua materiaalia, kuten tieteellisiä artikkeleita ja kirjoja liittyen GPS-järjestelmien tarkkuuteen vaikuttaviin virhelähteisiin. Tutkimuksen tarkoituksena on tunnistaa näiden virhelähteiden pääasialliset syyt ja niiden aiheuttamien virheiden suuruusluokat sekä arvioida olemassa olevia ja potentiaalisia korjausmenetelmiä, jotka voivat parantaa GPS-signaalin tarkkuutta.

Työn tarkoituksena on vastata seuraaviin kysymyksiin:

- Millä tavoin erilaiset ilmiöt vaikuttavat GPS-järjestelmän toimintaan ja sen tarkkuuteen?
- Miten GPS-järjestelmän tarkkuus vaikuttaa sen käytettävyyteen eri sovellutuksissa?
- Mitä menetelmiä voidaan käyttää GPS-järjestelmän tarkkuuden parantamiseen ja virheiden korjaamiseen?

Työn rajauksessa keskitytään erityisesti suhteellisuusteorian aiheuttamiin virheisiin GPS-järjestelmässä, mutta otetaan huomioon myös laajemmin yleisiä virhelähteitä ja niiden korjausmenetelmiä.

1.3 Työn rakenne

Toisessa luvussa käsitellään GPS-järjestelmien historiaa ja kehitystä, perusteita ja toimintaperiaatetta sekä järjestelmän eri osa-alueita. Tämä luo pohjan ymmärtää GPS-järjestelmän monimutkaisuutta ja sen nykytilaa.

Kolmannessa luvussa syvennytään relativistisiin ilmiöihin, selitetään erityisen ja yleisen suhteellisuusteorian keskeiset periaatteet ja niiden merkitys GPS-teknologian kannalta.

Neljäs luku keskittyy virheanalyysiin. Siinä luokitellaan GPS-järjestelmän virhelähteet ja käsitellään yksityiskohtaisesti keskeisiä virhelähteitä ja niiden korjausmenetelmiä, kuten aikadilataatiota, gravitaation aiheuttamia taajuussiirtymiä ja Sagnacin efektiä.

Viides ja kuudes luku sisältävät yhteenvedon ja johtopäätökset. Yhteenvetoluvussa kerrataan tutkimuksen keskeiset löydökset ja johtopäätös luvussa pohditaan tutkimuksen merkitystä ja mahdollisia jatkotutkimuksen suuntia.

2 GPS-järjestelmät

2.1 Historia ja kehitys

GPS on satelliittipohjainen navigointijärjestelmä, jonka Yhdysvaltojen puolustusministeriö kehitti 1970-luvun alussa. Alkuperäinen kehitystyö oli suunnattu sotilaskäyttöön, mutta myöhemmin GPS-järjestelmän käyttö laajeni siviilikäyttöön, ja se palvelee nykyään sekä sotilaita ja siviileitä. GPS tarjoaa jatkuvan paikannuksen ja synkronoidun ajan missä tahansa maailmalla ja kaikissa sääolosuhteissa. (El-Rabbany, 2002; Taubes & Kleppner, 1996)

GPS:n satelliittikonstellaation rakentaminen alkoi sarjalla, joka sisälsi 11 satelliittia ja tunnetaan nimellä Block I -satelliitit. Nämä satelliitit laukaistiin vuosien 1978 ja 1985 välillä. (El-Rabbany, 2002; Parkinson & Spilker, 1996)

Seuraavan sukupolven Block II/A -satelliitteja lähetettiin kiertoradalle vuosien 1989 ja 1997 välillä. Näihin satelliitteihin lisättiin turvaominaisuuksia, kuten valikoiva saatavuus eli Selective Availability (SA), joka poistettiin käytöstä vuonna 2000. Tämän ominaisuuden tarkoitus oli, että siviilikäyttöön tarjotaan järjestelmä, joka ei olisi yhtä tarkka kuin aiemmin sotilaskäytössä ollut järjestelmä. Toisena merkittävänä ominaisuutena oli väärentämisen estäminen, jonka tavoitteena oli ehkäistä muiden laitteiden kykyä esittää GPS-järjestelmää ja lähettää väärennettyä signaalia. (El-Rabbany, 2002; Parkinson & Spilker, 1996)

Uusi GPS-satelliittisukupolvi, Block IIR, on parhaillaan käynnissä ja tarjoaa suurempaa tarkkuutta ja toimii itsenäisesti vähintään 180 päivää ilman maasta tulevia korjauksia. Näiden satelliittien itsenäinen navigointikyky saavutetaan osittain satelliittien välisen etäisyyden mittauskyvyn avulla. Lisäksi Maan ohjaussegmentti lataa ennustetut efemeridi- ja kellotiedot 210 päiväksi, tukemaan itsenäistä navigointia. (El-Rabbany, 2002; Parkinson & Spilker, 1996)

2.2 Perusteet ja toimintaperiaate

GPS perustuu siihen, että Maan pinnalla sijaitsevan pisteen etäisyydet useaan GPS-satelliittiin ovat tiedossa, samoin kuin satelliittien sijainnit, voidaan pisteen sijainti laskea ratkaisemalla neljän satelliitin yhtälöryhmä. Kukin yhtälö i-indeksillä satelliitille määritetään seuraavasti:

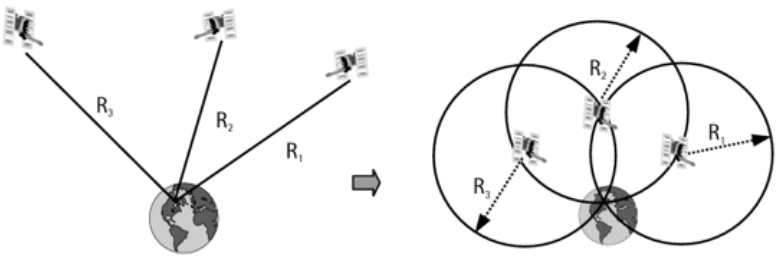
$$c(t_r - t_i + t_d) = \sqrt{(x_r - x_i)^2 + (y_r - y_i)^2 + (z_r - z_i)^2}, \tag{1}$$

missä c on valonnopeus, t_r on vastaanottimen ajanhetki, t_i on i:satelliitin ajanhetki, t_d on kellon ero, x_r ,y_r ,z_r ovat GPS-vastaanottimen koordinaatit ja x_i ,y_i ,z_i ovat i:satelliitin koor-

dinaatit. Vähintään neljän satelliitin yhtälöt muodostavat yhtälöryhmän, josta voidaan ratkaista kellon ero t_d sekä GPS-vastaanottimen sijainti x_r, y_r, z_r . Yhtälöryhmän ratkaisemalla saadaan GPS-vastaanottimen sijainti sekä kellon mahdollinen virhe.(El-Rabbany, 2002)

Käytännössä tämä tapahtuu siten, että jokainen GPS-satelliitti lähettää jatkuvasti signaalia, joka koostuu kahdesta kantoaallosta, kahdesta digitaalisesta koodista ja navigointiviestistä. Kun GPS-vastaanotin kytketään päälle, se vastaanottaa GPS-signaalin antennin kautta ja prosessoi sen sisäänrakennetulla ohjelmistollaan. Tämän signaalinkäsittelyn tuloksena on etäisyydet GPS-satelliitteihin digitaalisten koodien kautta, sekä satelliittien koordinaatit navigointiviestin kautta.(El-Rabbany, 2002; Parkinson & Spilker, 1996)

Teoriassa riittäisi vain kolmen satelliitin samanaikaisesti seurattujen etäisyyksien tunteminen, käytännössä tarvitaan neljäs satelliitti ottamaan huomioon vastaanottimen kellon virhe. Tämä neljäs satelliitti mahdollistaa tarkemman sijainnin määrittämisen, sillä vastaanotin sijaitsee kolmen pallon leikkauspisteessä, joille on muodostettu yhtälöt kaavasta (1). Jokaisella pallolla on säde, joka vastaa yhtä vastaanottimen ja satelliitin etäisyyttä, ja jokainen pallo on keskitetty kyseiselle satelliitille, jota on havainnollistettu kuvassa (1). Mikäli kellon virhettä ei oteta huomioon aiheuttaisi tämä virhettä jokaisen satelliitin pallon reunalle ja huonontaisi huomattavasti tarkkuutta.(El-Rabbany, 2002; Parkinson & Spilker, 1996)



Kuva 1: Satelliittien muodostamien pallojen havainnostus.(El-Rabbany, 2002)

Paikannusjärjestelmän muut sovellutuksen kohteet sisältää myös käyttäjän nopeuden määrityksen, joka voidaan laskea vastaanotetun signaalin Doppler-taajuuden mittauksella, joka tapahtuu suhteellisen satelliitti-vastaanotinliikkeen seurauksena. Muita sovellutuksia, mihin järjestelmää voidaan käyttää ovat merenalaisten alusten ja ilma-alusten asennon määrittämiseen, joka kuvaa kappaleen suuntaa tai orientaatiota. (El-Rabbany, 2002; Parkinson & Spilker, 1996)

2.3 GPS-järjestelmän eri segmentit

GPS koostuu kolmesta segmentistä: avaruussegmentistä, ohjaussegmentistä ja käyttäjäsegmentistä. Avaruussegmentti sisältää edellä mainitun satelliitti konstellaation. Jokainen GPS-

satelliitti lähettää signaalin, joka koostuu useista osista: kahdesta sinimuotoisesta kantoaallosta, kahdesta digitaalisesta koodista ja navigointiviestistä. Kantoaaltoja ja koodeja käytetään etäisyyden määrittämiseksi käyttäjän vastaanottimesta GPS-satelliitteihin.(Parkinson & Spilker, 1996)

Ohjaussegmentti koostuu maailmanlaajuisesta seuranta-asemaverkostosta ja pääohjausasemasta eli Master Control Station (MCS). Ohjaussegmentin tehtävänä on seurata GPS-satelliitteja, jotta voidaan määrittää ja ennustaa mm. satelliittien sijainteja, järjestelmän eheyttä, satelliittien atomikellojen käyttäytymistä, ilmakehätietoja, satelliittien almanakkaa ja muita järjestelmälle olennaisia tietoja ja toimintoja.(Parkinson & Spilker, 1996)

Käyttäjäsegmenttiin kuuluvat kaikki sotilas- ja siviilikäyttäjät. GPS-vastaanottimella, joka on yhdistetty GPS-antenniin, käyttäjä voi vastaanottaa GPS-signaaleja, joita voidaan käyttää sijainnin määrittämiseen missä tahansa maailmalla. Järjestelmä on tällä hetkellä saatavilla kaikille käyttäjille ympäri maailmaa ilman suoria käyttökustannuksia. (El-Rabbany, 2002; Parkinson & Spilker, 1996)

3 Relativistiset ilmiöt

3.1 Suppea suhteellisuusteoria

Suppea suhteellisuusteoria on fysiikan perusteorioita, jonka Albert Einstein julkaisi vuonna 1905. Tämä teoria käsittelee ajan ja avaruuden suhteita, kun gravitaatiota ei oteta huomioon, ja se on erityisen merkittävä korkeilla nopeuksilla liikuttaessa. Suppea suhteellisuusteoria korvasi Newtonin absoluuttisen ajan käsitteen ja esitteli ajan ja avaruuden suhteellisuuden.(Enqvist, 2011; Maalampi & Perko, 2006)

Teorian keskeiset periaatteet ovat seuraavat:

- Fysiikan lait ovat samat kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa. Tämä tarkoittaa, että ei ole olemassa absoluuttista koordinaatistoa, vaan kaikki koordinaatistot ovat yhtä päteviä fysiikan lakien kannalta.
- Valon nopeus tyhjiössä on sama kaikissa koordinaatistoissa, riippumatta valonlähteen tai havainnoijan liiketilasta.(Enqvist, 2011; Maalampi & Perko, 2006)

Yksi suppean suhteellisuusteorian keskeisistä havainnoista on ajan suhteellisuus, joka ilmenee aikadilataationa. Tämän ilmiön mukaan liikkuvassa viitekehyksessä kulkeva aika näyttää kuluvan hitaammin verrattuna paikallaan olevaan viitekehykseen. Aikadilataatio on kuvattavissa Lorentzo-muunnoksilla, jotka ovat yhtälöitä, jotka muuntavat aika- ja paikkakoordinaatteja yhdestä viitekehyksestä toiseen. Esimerkiksi, jos tarkastelemme tapahtumia kahdessa eri viitekehyksessä, jotka liikkuvat suhteessa toisiinsa vakionopeudella v, niin ajan dilataatiolle pätee seuraava kaava

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \tag{2}$$

jossa t' on aika liikkuvassa viitekehyksessä, t on aika paikallaan olevassa viitekehyksessä, v on viitekehysten välinen suhteellinen nopeus, x on tapahtuman sijainti paikallaan olevassa viitekehyksessä, c on valonnopeus, γ on Lorentzin tekijä, joka on määritelty seuraavasti

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{3}$$

(Enqvist, 2011; Maalampi & Perko, 2006)

Toinen olennainen seuraus on pituuden supistuminen, joka tarkoittaa, että liikkuvassa viite-

kehyksessä mitattuna kappaleen pituus ja matka lyhenee liikesuunnassa ja pituuden supistumisen muutokselle pätee seuraava kaava

$$L = \gamma L', \tag{4}$$

jossa L' on kappaleen pituus liikkuvassa viitekehyksessä ja L on pituus paikallaan olevassa viitekehyksessä.(Enqvist, 2011; Maalampi & Perko, 2006)

GPS:n toiminnan kannalta nämä relativistiset ilmiöt ovat tärkeitä, sillä satelliittien nopeus ja maan gravitaatiokenttä aiheuttavat aikadilataatiota ja pituuden supistumista, jotka on otettava huomioon tarkkuuden säilyttämiseksi. GPS:n kellot on synkronoitava huomioimaan nämä suhteellisuusteorian ennustamat ilmiöt, jotta ne voivat tuottaa tarkan ajan mittauksen, joka on tärkeää sijaintitietojen tarkkuudelle. Ilman näiden relativististen vaikutusten korjaamista GPS:n antamat sijaintitiedot olisivat nopeasti huomattavan virheellisiä.(El-Rabbany, 2002; Ashby, 1994)

3.2 Yleinen suhteellisuusteoria

Albert Einstein julkaisi Yleisen suhteellisuusteorian vuonna 1915, ja se on nykyisen gravitaatioteorian perusta. Sen mukaan avaruus ja aika eivät ole absoluuttisia, vaan ne muodostavat yhtenäisen neljän ulottuvuuden jatkumon, joka tunnetaan nimellä aika-avaruus. Aika-avaruus käsite on keskeinen yleisessä suhteellisuusteoriassa, joka kuvaa gravitaation aika-avaruuden geometrian kaareutumisena massan läsnäollessa.(Enqvist, 2011; Maalampi & Perko, 2006)

Yleisen suhteellisuusteorian kuvaus perustuu Einsteinin kenttäyhtälöihin, jotka on esitetty kaavassa (5) ja ovat sarja kymmenestä toisiinsa kytkeytyvästä differentiaaliyhtälöstä. Yhtälöt määrittelevät, miten massa ja energia kaareuttavat aika-avaruutta, joka määrittää massan liikkeen kaareutuneessa aika-avaruudessa.

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{5}$$

missä $G_{\mu\nu}$ on Einsteinin tensori, $T_{\mu\nu}$ on energia-impulssitensori ja G on gravitaatiovakio.(Maalampi & Perko, 2006)

Yleisen suhteellisuusteorian perusteellinen ymmärtäminen ja tutkiminen vaatii syvällistä tietämystä mm. differentiaaligeometriasta ja differentiaaliyhtälöistä, jonka takia työssä keskitytään yleisen suhteellisuusteorian ilmiöiden tarkasteluun empiiristen havaintojen tutkimuk-

sen kautta. Tämä lähestymistapa mahdollistaa teorian keskeisten vaikutusten ja ennusteiden ymmärtämisen ilman, että syvennytään sen matemaattisen mallin yksityiskohtiin.(Enqvist, 2011; Maalampi & Perko, 2006)

Kenttäyhtälöiden mukaan massiiviset kappaleet, kuten Maa, kaareuttavat aika-avaruutta, mikä vaikuttaa niiden läheisyydessä olevien kappaleiden kulkuun ja ajan kulkuun. GPS-järjestelmän kannalta tämä on tärkeä, koska Maan massan aiheuttama gravitaatiokenttä vaikuttaa satelliittien aikaan ja kulkuun avaruudessa.(Enqvist, 2011; Maalampi & Perko, 2006)

Yksi yleisen suhteellisuusteorian ennustamista ilmiöistä on gravitaatioaikadilataatio, joka tarkoittaa, että voimakkaassa gravitaatiokentässä aika kulkee hitaammin kuin heikommassa, jota voidaan arvoida einsteinin kenttäyhtälöistä johdetusta Schwarzschildin ratkaisusta saadulla yhtälöllä:

$$t' = t\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}}, \tag{6}$$

missä t' on kulunut aika lähellä suurta taivaankappaletta, t on havainnoitsijan kulunut aika kauempana kappaleesta, M on taivaankappaleen massa ja R on havainnotsijan etäisyys taivaankappaleen massakeskipisteestä.(Enqvist, 2011; Maalampi & Perko, 2006)

GPS-satelliitit ovat Maan pinnasta kauempana, missä gravitaation vaikutus on heikompi, joten niiden kellot kulkevat nopeammin kuin Maan pinnalla. Tämä ero on korjattava, jotta GPS-signaaleja voidaan käyttää navigointiin.(El-Rabbany, 2002)

4 Suhteelliset vaikutukset teknologiaan

4.1 Aikadilaatio

GPS-järjestelmän toiminta perustuu tarkkaan ajanmittaukseen, sillä satelliittien lähettämien signaalien ajoitus on tärkeä tekijä vastaanottimen sijainnin laskennassa. Maan pinnalla olevat vastaanottimet määrittävät etäisyytensä useisiin GPS-satelliitteihin mittaamalla signaalien kulkuaikojen eroja. Näitä tietoja käytetään laskennassa vastaanottimen tarkan sijainnin määrittämiseksi. Satelliittien kellot on synkronoitava maanpäällisten kellojen kanssa äärimmäisen tarkasti järjestelmän toiminnan varmistamiseksi.(Ashby, 1994; Ruyong Wang, 2000)

Tarkkuuden saavuttaminen on monimutkainen prosessi, koska edellämainitut suhteellisuusteorian ilmiöt vaikuttavat ajan kulkuun. Sekä suppea että yleinen suhteellisuusteoria ennustavat, että aika ei ole absoluuttinen suure, vaan riippuu havaitsijan liiketilasta ja gravitaatiokentästä. Tämä tarkoittaa, että GPS-satelliittien aika poikkeaa maanpäällisten kellojen ajasta.

Suppean suhteellisuusteorian mukaan liikkuvassa viitekehyksessä olevan kellon aika hidastuu verrattuna paikallaan olevaan kelloon. Tätä ilmiötä kutsutaan aikadilataatioksi, ja sen suuruus riippuu liikkeen nopeudesta. GPS-satelliitit kiertävät maapalloa suurella nopeudella, joka voidaan laskea radan korkeuden ja gravitaatiokiihtyvyyden avulla seuraavasti:

$$v_s = \sqrt{\frac{GM_e}{R_{gps}}} = 3.8726\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}, \tag{7}$$

missä v_s on GPS-satelliitin ratanopeus, M_e on Maan massa ja R_{gps} on GPS-satelliitin radan säde. Tällainen nopeus aiheuttaa havaittavan aikadilataation, joka satelliitille voidaan laskea kaavaa (2) käyttämällä:

$$\Delta t_{sr} = t\left(1 - \sqrt{1 - \frac{v_s^2}{c^2}}\right) = 8.3432 \times 10^{-11}\mathrm{s} = 7.2085 \times 10^{-6}\ \mathrm{s \cdot d^{-1}} \tag{8}$$

missä Δt_{sr} kuvaa suppeasta suhteellisuusteoriasta eli nopeudesta johtuvaa aikadilataatiota ajan t kuluessa, mikä vastaa noin 7 mikrosekuntia hitaammin vuorokaudessa.

Yleinen suhteellisuusteoria tarkentaa edelleen ajan kulun virheitä ottamalla huomioon gravitaation vaikutuksen. Gravitaation aiheuttama aikadilataatio saadaan laskemalla satelliittien ja vastaanottimien väliset erot. Aikadilataatio voidaan laskea kaavaa (6) hyödyntäen vastaanottimelle:

$$\Delta t_r = t\left(1-\sqrt{1-\frac{2GM_e}{R_e c^2}}\right) = 6.9534\times 10^{-10}\ \mathrm{s} = 60.078\times 10^{-6}\ \mathrm{s}\cdot\mathrm{d}^{-1}, \tag{9}$$

missä Δt_r kuvaa gravitaation vaikutuksesta johtuvaa aikadilataatiota maanpäälliselle vastaanottimelle ja R_e on Maan säde.

Tämä tarkoittaa, että maanpäälliset vastaanottimet kulkevat noin 60 mikrosekuntia hitaammin. Vastaavasti satelliittien aikadilataatio voidaan laskea:

$$\Delta t_s = t\left(1-\sqrt{1-\frac{2GM_e}{R_{gps} c^2}}\right) = 16.686\times 10^{-10}\ \mathrm{s} = 14.417\times 10^{-6}\ \mathrm{s}\cdot\mathrm{d}^{-1}, \tag{10}$$

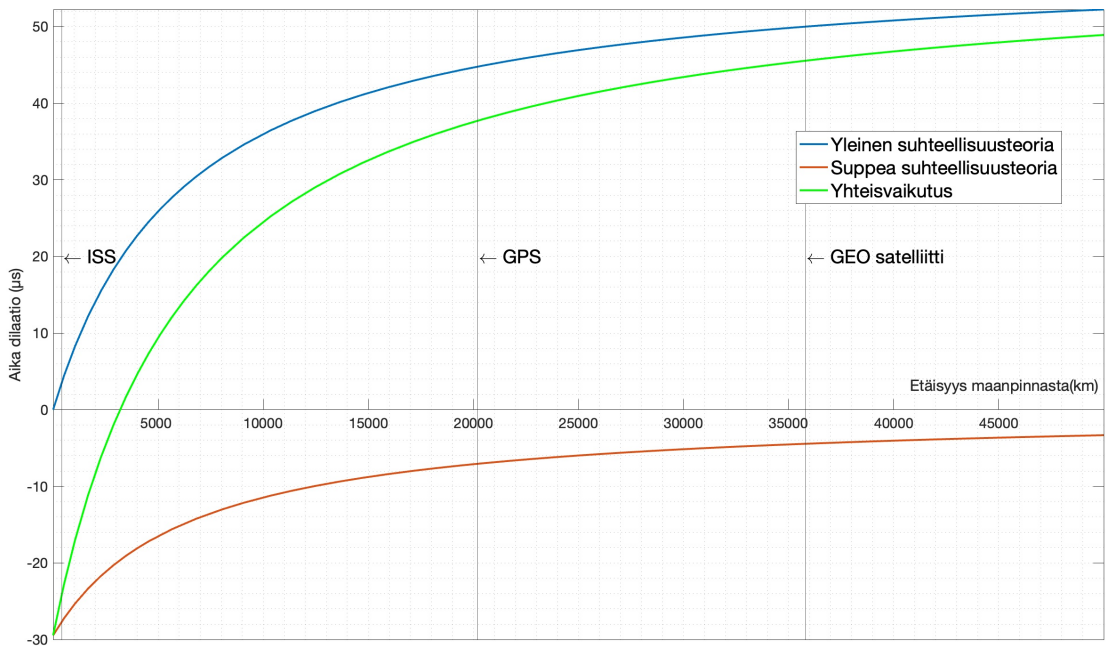
missä Δt_s kuvaa satelliitin gravitaation vaikutuksesta johtuvaa aikadilataatiota. Satelliitit kulkevat siis noin 14 mikrosekuntia hitaammin.

Vastaanottimen ja satelliitin välinen aikadilataatio voidaan laskea seuraavasti:

$$\Delta t_{gr} = \Delta t_r - \Delta t_s = 45.661\times 10^{-6}\ \mathrm{s}\cdot\mathrm{d}^{-1}, \tag{11}$$

missä Δt_{gr} kuvaa gravitaation aiheuttamaa eroa ajan kulussa satelliittien ja vastaanottimien välillä.

Tästä huomataan, että gravitaation saa ajan kulumaan hitaammin voimakkaamman painovoiman alueilla ja koska GPS-satelliitit kiertävät suurella etäisyydellä, ne kokevat pienemmän gravitaation ja siksi niiden kellot käyvät noin 46 mikrosekuntia päivässä nopeammin kuin maanpäälliset kellot. Tämä on esitetty kuvassa (2).



Kuva 2: Aikadilaatio vuorokauden aikana radan etäisyyden funktiona maanpinnasta, missä on havainnollistettu kansainvälisen avaruusaseman eli international space station (ISS), GPS-sateliitin ja Geostationaarisen (GEO) sateliitin kiertoratoja.

Näiden kahden relativistisen ilmiön yhteisvaikutus voidaan laskea seuraavasti:

$$\Delta t_{tot} = \Delta t_{gr} + \Delta t_{sr} = 38.452 \times 10^{-6}\ \mathrm{s} \cdot \mathrm{d}^{-1}, \tag{12}$$

missä Δt_{tot} kuvaa GPS-satelliittien kellojen ja maanpäällisten kellojen välisen kokonaiseroa ajassa. GPS-satelliittien kellot käyvät siis noin 38 mikrosekuntia päivässä nopeammin kuin maanpäälliset kellot, kuten kuvassa (2) on havainnollistettu. Vaikka tämä ero on pieni, sen huomioimatta jättäminen aiheuttaisi merkittävän, noin 12 kilometrin navigointivirheen päivässä, mikä tekisi GPS-järjestelmästä käyttökelvottoman.

Tämä virhe korjataan asettamalla GPS-satelliittien kellot käymään hitaammin, joka saadaan laskettua suhteellisen virheen avulla joka on:

$$\frac{\Delta t_{tot}}{t} = \frac{\Delta t_{gr} + \Delta t_{sr}}{t} = 4.4505 \times 10^{-10}. \tag{13}$$

Asettamalla satelliittien kellot tämän verran hitaammiksi ennen laukaisua, korjaa sekä suppean että yleisen suhteellisuusteorian aiheuttaman aikadilataation ja korjatulle signaalille saadaan tällöin:

$$t_k = (1 - \frac{\Delta t_{tot}}{t})t = t - \Delta t_{tot} \tag{14}$$

missä t_k kuvaa korjattua kellon kulkua ajan t kuluessa. Kun tähän lisätään relativistisista

vaikutuksista johtuva aikadilaatio, lopullinen kellonaika satelliitille on:

$$t_s = t_k + \Delta t_{tot} = t \tag{15}$$

Tämä ennakkokompensaatio varmistaa, että satelliittien kellot pysyvät synkronoituina maanpäällisten kellojen kanssa niiden ollessa kiertoradalla. (Ashby, 1994)

4.2 Gravitaatio taajuussiirtymät

Gravitaation vaikutus ulottuu aikadilaation lisäksi, myös sähkömagneettisen säteilyn, kuten GPS-signaalien taajuuteen. Tämä ilmiö on nimeltään gravitaatiopunasiirtymä. Mitä voimakkaampi gravitaatiokenttä, sitä pienempi on signaalin taajuus havaitsijalle, joka sijaitsee heikommassa gravitaatiokentässä. Tämä johtuu siitä, että gravitaatiokenttä vaikuttaa aikaavaruuden geometriaan, mikä vaikuttaa signaalin etenemiseen ja sen aallonpituuteen. Aallonpituuden kasvaessa taajuus pienenee, ja tämä kasvu aiheuttaa sähkömagneettisen säteilyn punasiirtymän. (Ashby, 2003)

GPS-järjestelmässä gravitaatiopunasiirtymä tulee esiin, koska satelliitit sijaitsevat heikommassa gravitaatiokentässä kuin maan pinnalla olevat vastaanottimet. Tämän seurauksena satelliittien lähettämien signaalien taajuus on pienempi kuin se olisi ilman gravitaatiokentän vaikutusta. Jos tätä eroa ei otettaisi huomioon, se aiheuttaisi virheitä GPS-signaalien saapumisajan mittauksessa ja sitä kautta vaikuttaisi paikannuksen tarkkuuteen. Ilman korjausta nämä virheet johtavat useiden metrien epätarkkuuksiin sijainnin määrittämisessä, mikä tekisi GPS:stä hyödyttömän monissa sovelluksissa, jotka vaativat korkeaa tarkkuutta. (Ashby, 2003)

Taajuuden muutos saadaan kaavojen (2) ja (6) avulla seuraavasti

$$f_h = f_l g_h, \tag{16}$$

josta jakamalla f_l saadaan havainnoitsijan suhteellinen taajuus:

$$\frac{f_h}{f_l} = g_h, \tag{17}$$

missä f_h on havaitun signaalin taajuus, f_l on lähetetyn signaalin taajuus, ja g_h on gravitaatiopotentiaali eron ja nopeuden aiheuttama aikadilaatio:

$$g_h = \sqrt{1 - \frac{2GM_e}{R_e c^2}} - \sqrt{1 - \frac{2GM_e}{R_{gps} c^2}} - \sqrt{1 - \frac{v_s^2}{c^2}}. \tag{18}$$

Gravitaation aiheuttaman punasiirtymän vaikutukset voidaan kompensoida määrittelemällä satelliittien signaalien taajuudet ennen niiden laukaisua suhteellisesti korkeammiksi kaavaa (17) hyödyntäen seuraavasti:

$$f_k = f_l \left(\frac{f_h}{f_l}\right)^{-1} = \frac{f_l}{g_h} \tag{19}$$

missä f_k on lähetettävä signaali, joka sisältää korjauksen. Tämän jälkeen kaavan (16) avulla saamme:

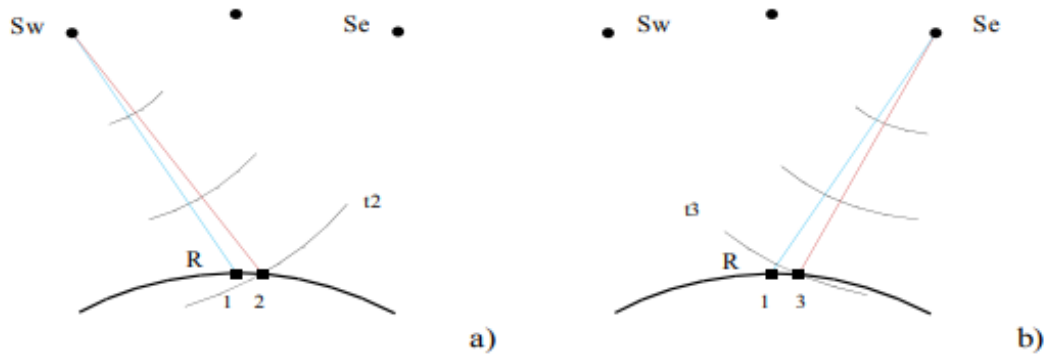
$$f_h = f_k g_h = f_l. \tag{20}$$

Tämä korjaus varmistaa, että kun signaalit saavuttavat Maan pinnan, niiden taajuus on sama ja synkronoitu Maan päällä olevien kellojen taajuuden kanssa.

4.3 Sagnac efekti

Sagnac-efekti ilmenee, kun valonsäde kulkee pyörivän järjestelmän sisällä, mikä johtaa aikavälin eroon valonsäteen kulkiessa myötä- ja vastapäivään pyörimissuuntaan nähden. GPS-järjestelmissä Sagnac-efekti tulee esiin, koska Maapallo pyörii akselinsa ympäri. Tämä pyöriminen aiheuttaa sen, että GPS-signaalin reitti satelliitista vastaanottimeen ei ole inertiaalinen, vaan pyörivä, koska vastaanottimet käsittelevät sijaintitietoa Maan keskipisteeseen kiinnittyneessä eli Earth-Centered Earth-Fixed (ECEF) koordinaattijärjestelmässä. Tämä järjestelmä on käytännönläheisempi havainnoijalle Maan pinnalla, jonka seurauksesa signaalin kulkuaika muuttuisi riippuen siitä, kulkeeko signaali myötä- vai vastapäivään Maapallon pyörimisen suhteen. Mikäli vastaanotin laskisi sijainnin maapallon keskipisteeseen suhteen inertiaalisessa eli Earth-Centered Inertial (ECI) koordinaattijärjestelmässä, olisi sagnac efekti jo huomioitu. (Ashby & Nelson, 2009)

Kuvassa (3) satelliitit Se ja Sw lähettävät signaaleja, ja ne ovat yhtä kaukana vastaanottimesta. Kun signaali on matkalla vastaanottimeen, Maa pyörii hieman, mikä aiheuttaa sen, että vastaanotin siirtyy alkuperäisestä sijainnistaan hieman itään. Tämä tarkoittaa, että vastaanotin päätyy hieman eri kohtaan riippuen siitä, onko se yhteydessä satelliittiin Sw (siirtyy sijaintiin 2) vai satelliittiin Se (siirtyy sijaintiin 3), joka johtaa siihen että t_2 on suurempi kuin t_3 vaikka todellinen etäisyys on sama molemmilla sateliiteilla. (Ruyong Wang, 2000)



Kuva 3: Vasemmalla puolella on esitetty satelliitti Sw (a), joka lähettää signaalin Maan pyörimisen suuntaisesti. Oikealla puolella on esitetty satelliitti Se (b), joka lähettää signaalin vastakkaiseen suuntaan suhteessa Maan pyörimiseen.(Ruyong Wang, 2000)

GPS-järjestelmä määrittää aluksi karkean sijainnin maapallolla, ja tämän tiedon avulla saadaan selville vastaanottimen likimääräinen maantieteellinen leveysaste. Tämän avulla voidaan arvioida, kuinka paljon Maa ehtii pyöriä signaalin kulkuaikana.

Kun vastaanottimen leveysaste on tiedossa, Sagnac-koetta hyödyntämällä voidaan laskea vaadittu korjaustermi signaalin kulkuajalle.

Sagnac-kokeessa valonsäde jaetaan kahdeksi säteeksi, jotka kulkevat vastakkaisiin suuntiin samaa reittiä pitkin pyörivässä rengasinterferometrissä. Kun säteet palaavat lähtöpisteeseensä, niiden välisestä vaihe-erosta voidaan laskea signaalien reittien pituusero. Koska interferometrin kulmanopeus tunnetaan, vaihe-erosta voidaan määrittää aikaero, joka tarvitaan kummankin signaalin kulkemiseen interferometrin ympäri.(Ruyong Wang, 2000)

Signaalin kulkua paikasta A ajan hetkellä t_0 paikkaan B ajan hetkellä t_1 voidaan kuvata hyödyntäen kaavaa (1) polaarikoordinaatistossa seuraavasti:

$$c(t_1 - t_0) = |\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|, \tag{21}$$

missä $\mathbf{r}_A$ ja $\mathbf{r}_B$ ovat paikkojen A ja B paikkavektorit. Muuttamalla tämä yhtälö differentiaalimuotoon, saadaan

$$c\int_{t_0}^{t_1} dt = \int_S |d\mathbf{r}|, \tag{22}$$

missä integraali oikealla puolella esittää signaalin kulkeman matkan avaruudessa.

Kun tarkastellaan signaalin kulkua pyörivässä viitekehyksessä, kuten Maan pinnalla, myötä-

päivään kulkevan signaalin polku S_m voidaan ilmaista seuraavasti:

$$S_m = 2\pi + \omega \int_{t_0}^{t_1} dt, \tag{23}$$

ja vastapäivään kulkevan signaalin polku S_v seuraavasti:

$$S_v = 2\pi - \omega \int_{t_0}^{t_1} dt, \tag{24}$$

missä ω on Maan pyörimisnopeus.

Seuraavaksi, kun integroimme yhtälön (22) myötäpäivään kulkevalle signaalille S_m käyttäen, saamme

$$c\Delta t_m = 2\pi R + \omega \Delta t_m R,$$

ja vastapäivään kulkevalle signaalille S_v käyttäen saamme

$$c\Delta t_v = 2\pi R - \omega \Delta t_v R,$$

missä R on etäisyys Maan pyörimisakselilta vastaanottimen sijaintiin vastaanottimen leveysasteella.

Näistä voidaan johtaa signaalin kulkuaika myötäpäivään kulkevalle signaalille:

$$\Delta t_m = \frac{2\pi R}{c - \omega R}, \tag{25}$$

ja vastapäivään kulkevalle signaalille:

$$\Delta t_v = \frac{2\pi R}{c + \omega R}. \tag{26}$$

Sagnac-efektin aiheuttama aikapoikkeama saadaan näiden aikojen erotuksena:

$$\Delta t_s = \Delta t_m - \Delta t_v = \frac{2\pi R}{c - \omega R} - \frac{2\pi R}{c + \omega R} \approx \frac{4\pi R^2 \omega}{c^2} = \frac{4A\omega}{c^2}, \tag{27}$$

missä A on signaalin reitin muodostama alue. Jakamalla aikapoikkeama kahteen osaan, voidaan erotella myötä- ja vastapäivään kulkevien signaalien positiivinen ja negatiivinen aikavirhe:

$$\Delta t = \pm \frac{1}{2} \Delta t_s = \pm \frac{2A\omega}{c^2} \tag{28}$$

Kun Sagnac-efektistä johtuva aikapoikkeama on laskettu, sitä voidaan käyttää GPS-järjestelmän

tarkkuuden korjaamiseksi. Tämä korjaustermi lisätään tai vähennetään signaalin mitattuun kulkuaikaan riippuen siitä, kulkeeko signaali myötä- vai vastapäivään Maan pyörimisen suhteen. Näin GPS-järjestelmä pystyy ottamaan huomioon Maan pyörimisen vaikutuksen algoritmeissaan ja laskemaan vastaanottimen tarkan sijainnin suhteessa satelliitteihin.

5 Yhteenveto

Tämä opinnäytetyö keskittyi GPS-järjestelmien tarkkuuteen vaikuttaviin virhelähteisiin, erityisesti suhteellisuusteorian aiheuttamiin ennakoitaviin virheisiin. Tutkimus perustui tieteellisten artikkelien ja kirjallisuuden analyysiin, jonka tarkoituksena oli tunnistaa merkittävimmät virhelähteet, arvioida niiden suuruusluokka sekä tarkastella niihin soveltuvia korjausmenetelmiä.

GPS-järjestelmän tarkkuuteen vaikuttavista virhelähteistä keskeisimpiä ovat relativistiset ilmiöt, kuten aikadilaatio, gravitaatiotaajuuden siirtymät sekä Sagnacin efekti. Aikaisempi tutkimus tarjosi vahvan perustan näiden ilmiöiden ymmärtämiselle ja niiden vaikutusten analysoimiselle. Aikadilataatio ja gravitaatiotaajuuden siirtymät vaikuttavat satelliittien kellonaikoihin ja ilman näiden ilmiöiden huomioimista paikannusvirheet kasvaisivat merkittävästi. Sagnacin efekti aiheuttaa puolestaan eroja signaalien kulkuajoissa Maan pyörimisliikkeen vuoksi.

Tutkimuksen tavoitteet saavutettiin kattavasti. Keskeiset havainnot vahvistavat, että suhteellisuusteorian mukaiset ilmiöt ovat merkittäviä virhelähteitä GPS-järjestelmässä, mutta näitä virheitä voidaan hallita asianmukaisilla korjausmenetelmillä. Erityisesti aikadilataation ja gravitaatiotaajuussiirtymän aiheuttamien virheiden korjaaminen on olennaista GPS-järjestelmän tarkkuuden varmistamiseksi.

Sagnac-efektin huomioiminen on tärkeää signaalien kulkuaikojen erojen pienentämiseksi erityisesti silloin, kun vaaditaan erittäin tarkkaa paikannusta. Tulokset osoittavat, että nykyiset GPS-järjestelmät pystyvät käsittelemään relativistisiä ilmiöitä tehokkaasti, mutta tarkkuutta voidaan edelleen parantaa uusilla ja kehittyvillä korjausmenetelmillä.

Tutkimuksen rajoituksina voidaan mainita kirjallisuuskatsauksen luonne, joka rajaa uusien empiiristen havaintojen tekemistä. Tästä huolimatta esitetyt teoreettiset pohdinnat ja analyysit tarjoavat hyvän perustan jatkotutkimuksille.

6 Johtopäätökset

Tämä opinnäytetyö käsitteli suhteellisuusteorian vaikutuksia GPS-järjestelmien toimintaan, erityisesti silloin, kun pyritään korkeaan paikannustarkkuuteen. Työn päätavoitteena oli osoittaa, kuinka tärkeää on huomioida suhteellisuusteorian ilmiöt, kuten aikadilaatio ja gravitaatiotaajuussiirtymä, GPS-järjestelmien tarkkuuden ja luotettavuuden varmistamiseksi. Tämä tavoite saavutettiin analysoimalla näiden ilmiöiden vaikutuksia sekä niiden korjaamista GPS-järjestelmässä.

Havaittiin, että suppean suhteellisuusteorian mukainen aikadilaatio, joka johtuu satelliittien suuresta nopeudesta suhteessa Maahan, on yksi keskeinen tekijä GPS-järjestelmien tarkkuuden ylläpitämisessä. Ilman tätä korjausta satelliittien ja Maan pintakellojen välinen aikapoikkeama kasvaisi nopeasti, mikä johtaisi merkittäviin paikannusvirheisiin. Samoin yleisen suhteellisuusteorian mukainen gravitaatiotaajuussiirtymä ja aikadilaatio, joka johtuu Maan ja satelliittien eri gravitaatiokentistä, on välttämätön korjaus GPS-järjestelmän tarkkuuden säilyttämiseksi. Näiden ilmiöiden korjaamatta jättäminen johtaa kymmenien kilometrien päivittäisiin paikannusvirheisiin.

Työssä käsiteltiin myös Sagnac-efektiä, joka johtuu Maan pyörimisliikkeestä. Tämä efekti vaikuttaa GPS-signaalien kulkuaikoihin riippuen siitä, kulkeeko signaali myötä- vai vastapäivään Maapallon pintaan nähden, ja sen huomioiminen on erityisen tärkeää, kun vaaditaan korkeaa paikannustarkkuutta. Järjestelmän tarkkuutta voidaan parantaa edelleen kehittyneemmillä algoritmeilla, jotka pystyvät ottamaan tarkemmin huomioon tämän ilmiön vaikutukset.

Jatkotutkimuksen mahdollisuuksia ovat erityisesti muiden taivaankappaleiden, kuten Kuun ja Auringon, gravitaation vaikutusten huomioiminen GPS-järjestelmissä. Tämä tulee olemaan erityisen tärkeää, kun GPS-järjestelmää käytetään Maan ulkopuolella, kuten avaruusluotaimissa tai satelliiteissa. Näiden taivaankappaleiden gravitaatio voi aiheuttaa häiriöitä Maan gravitaatiokentässä ja siten hienovaraisia, mutta merkittäviä virheitä GPS-signaalien käsittelyssä. Lisäksi taivaankappaleiden hieman eksentrisistä radoista johtuvat jaksolliset virheet, kuten gravitaatiokentän vaihtelut ja satelliittien todellinen rataetäisyys ja ratanopeus, voivat vaikuttaa GPS-järjestelmän tarkkuuteen, joka tulisi ottaa huomioon.

Johtopäätöksenä voidaan todeta, että GPS-järjestelmien nykyinen tarkkuus on tiiviisti sidoksissa suhteellisuusteorian ilmiöiden tarkkaan huomioimiseen. Järjestelmää voidaan edelleen parantaa ottamalla mukaan tarkempia fysikaalisia vaikutuksia, kuten muiden taivaankappaleiden gravitaation ja niiden ratojen vaikutukset. Tulevaisuuden GPS-järjestelmissä nämä lisätekijät voidaan sisällyttää algoritmeihin ja järjestelmän suunnitteluun, mikä parantaa enti-

sestään järjestelmän suorituskykyä erityisesti tarkkuutta vaativissa sovelluksissa, kuten avaruustutkimuksessa ja kehittyneissä Maan ulkopuolisissa paikannussovelluksissa.

Lähdeluettelo

Ashby, N. (elokuu 1994). Relativity in the future of engineering. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* 43(4), s. 505–514. ISSN: 00189456. DOI: 10.1109/19.310159. URL: http://ieeexplore.ieee.org/document/310159/.

Ashby, N. (joulukuu 2003). Relativity in the Global Positioning System. *Living Reviews in Relativity* 6(1), s. 1. ISSN: 2367-3613, 1433-8351. DOI: 10.12942/lrr-2003-1. URL: http://link.springer.com/10.12942/lrr-2003-1.

Ashby, N. & Nelson, R. A. (huhtikuu 2009). The global positioning system, relativity, and extraterrestrial navigation. *Proceedings of the International Astronomical Union* 5 (S261), s. 22–30. ISSN: 1743-9213, 1743-9221. DOI: 10.1017/S174392130999010X. URL: https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S174392130999010X/type/journal_article.

Enqvist, K. (2011). *Johdatus suhteellisuusteoriaan*. 2. painos. Tähtitieteellinen Yhdistys URSA Ry. ISBN: 9789525329971.

Maalampi, J. & Perko, T. (2006). *Lyhyt modernin fysiikan johdatus*. 4. korj. p. OCLC: 76868361. Helsinki: Limes. ISBN: 978-951-745-213-7.

Parkinson, B. W. & Spilker, J. J. (1996). *The global positioning system: theory and applications*. OCLC: 603991592. Washington, DC: American Institute of Aeronautics ja Astronautics. ISBN: 978-1-62870-532-4.

El-Rabbany, A. (2002). *Introduction to GPS: the Global Positioning System*. Artech House mobile communications series. Boston, MA: Artech House. 176 s. ISBN: 978-1-58053-183-2.

Ruyong Wang (2000). Re-examine the two principles of special relativity and the Sagnac effect using GPS' range measurement equation. Teoksessa: *IEEE 2000. Position Location and Navigation Symposium (Cat. No.00CH37062)*. IEEE 2000. Position Locations and Navigation Symposium. San Diego, CA, USA: IEEE, s. 162–169. ISBN: 978-0-7803-5872-0. DOI: 10.1109/PLANS.2000.838298. URL: http://ieeexplore.ieee.org/document/838298/.

Taubes, G. & Kleppner, D. (1996). *The global positioning system*. OCLC: 614454928. Washington, D.C.: National Academy of Sciences.