

LAPPEENRANNAN TEKNILLINEN YLIOPISTO

Konetekniikan osasto

Konstruktiotekniikan laitos

Mekatroniikan ja virtuaalisuunnittelu laboratorio

RAKENTEELLISEN JOUSTON KUVAUS REAALIAIKASIMULOINNISSA

Diplomityön aihe on hyväksytty konetekniikan osaston osastoneuvostossa
29.11.2006.

Työn tarkastajina ovat toimineet professori Aki Mikkola ja dosentti Asko Rouvi-
nen.

Lappeenrannassa 12.2.2007

Tuomas Rantalainen

Peurankatu 10

53850 Lappeenranta

Puh. +358 50 5742981

TIIVISTELMÄ

Tekijä: Tuomas Rantalainen
Nimi: **Rakenteellisen jouston kuvaus reaaliaikasisimuloinnissa**
Osasto: Konetekniikan osasto
Paikka: Lappeenranta
Vuosi: 2007

Diplomityö, Lappeenrannan teknillinen yliopisto

52 sivua, 13 kuvaa, 2 taulukkoa, 2 liitettä

Tarkastajina professori Aki Mikkola ja dosentti Asko Rouvinen

Hakusanat: rakenteellinen jousto, monikappaledynamiikka, kelluvan koordinaatiston menetelmä, osarakennetekniikka, reaaliaikasisimulointi

Työn tavoitteena oli tuottaa rakenteellisen jouston huomioiva monikappaledynamiikan simulointiohjelma Matlab-ympäristöön. Rakenteellinen jousto huomioitiin kelluvan koordinaatiston menetelmällä ja joustavuutta kuvaavat muodot ratkaistiin elementtimenetelmällä.

Tehdyn ohjelman avulla voidaan koostaa joustavista kappaleista koostuvia avaruusmekanismeja ja tutkia niiden dynaamista käyttäytymistä. Simulointitulosta verrattiin kaupallisen ohjelmiston tuottamaan tulokseen.

Työssä havaittiin, että kelluvan koordinaatiston menetelmä on käyttökelpoinen reaaliaikaiseen simulointiin. Työssä toteutetun ohjelman tulokset vastasivat kaupallisen simulointiohjelman tuloksia.

ABSTRACT

Author: Tuomas Rantalainen
Title: **Description of the structural flexibility in real time simulation**
Department: Mechanical Engineering
Place: Lappeenranta
Year: 2007

Master's thesis. Lappeenranta University of Technology

52 sheets, 13 figures, 2 tables, 2 appendices

Supervisors professor Aki Mikkola and adjunct professor Asko Rouvinen

Keywords: structural flexibility, multibody dynamics, floating frame of reference formulation, substructuring method, real time simulation

The objective of this work is to produce a simulation using a general purpose mathematical software for multibody systems with structural flexibility. The structural flexibility is introduced using the floating frame of reference method. Finite element method is used to calculate the deformation modes used in the floating frame of reference formulation.

The simulation tool created in this work is able to describe 3-dimensional mechanisms that include one or more flexible bodies. Moreover, the simulation tool is able to perform dynamic simulations to these mechanisms. Results obtained using the simulation tool are compared with results produced by a commercial multibody simulation software.

As a result, it can be concluded that the floating frame of reference formulation can be used in real time simulations. Results obtained using the created simulation tool are practically identical with results of a commercial code.

ALKUASANAT

Haluan kiittää työn tarkastajia professori Aki Mikkolaa ja dosentti Asko Rouvista saamastani avusta ja tuesta sekä heidän osoittamastaan kiinnostuksesta työtäni kohtaan.

Haluan myös kiittää dipl.ins Marko Matikaista hänen avustaan, mielenkiinnosta työtäni kohtaan ja kiinnostavista keskustelutuokioista. Osansa kiitoksesta ansaitsee myös dipl.ins Pasi Korkealaakso työn loppuvaiheen avusta ja virheenkorjauksesta. Ilman häntä etsisin työssä tekemästäni ohjelmasta virhettä vieläkin.

Hyvien opiskelutoverien merkityksen tiedostaen haluan vielä kiittää nimeltä mainiten opiskeluseurasta ja yhteisistä tentteihin valmistautumisista. Tekn.yo Antti Näppi ja tekn.yo Antti Halonen, ilman heitä olisi monen kurssin terävin anti jäänyt ymmärtämättä.

Lopuksi haluan vielä lausua kiitokset myös kotiin viisaalle ja ymmärtävälle Hanna-vaimolle ja rakkaille lapsillemme Iidasofialle ja Aino-Ilonalle.

KÄYTETYT MERKINNÄT

Latinalaiset aakkoset

a	Suuntavektori
A	Kiertomatriisi
B	Jäykän kappaleen rotaation ja translaation kytkentämatriisi
C	Rajoite
C	Rajoitevektori
d	Differentiaalinen
d	Pisteitä yhdistävä vektori
E	Nopeusmuunnosmatriisi
f	Nivelkoordinaatiston 1. akseli
F	Solmuvapausasteisiin vaikuttava voimavektori
g	Nivelkoordinaatiston 2. akseli
G	Nopeusmuunnosmatriisi
h	Nivelkoordinaatiston 3. akseli
i	Kappale <i>i</i>
I	Yksikkömatriisi
I¹ ... I⁹	Massainvariantit
K	Jäykkyysmatriisi
L	Lyhennysmerkintä partikkelin nopeudesta
M	Massamatriisi
m	Massa
n_c	Järjestelmän rajoiteyhtälöiden lukumäärä
n_F	Kappaleen pistevoimien lukumäärä
n_n	Kappaleen solmujen lukumäärä
n_p	Kappaleen muotojen lukumäärä
n_q	Järjestelmän yleistettyjen koordinaattien lukumäärä
n_T	Kappaleen pistemomenttien lukumäärä
O	Lokaalin koordinaatiston origo
p	Modaalikoordinaatti
p	Modaalikoordinaattivektori

P	Partikkeli P
q	Yleistetty koordinaatti
\mathbf{q}	Yleistettyjen koordinaattien vektori (sis. modaalikoordinaatit)
\mathbf{Q}	Yleistettyihin koordinaatteihin vaikuttava voimavektori
\mathbf{r}	Partikkelin globaali asemavektori
\mathbf{R}	Lokaalin koordinaatiston origon globaali asemavektori
\mathbf{S}	Muotofunktio­matriisi
t	Aika
T	Kineettinen energia
\mathbf{T}	Solmuvapausasteisiin vaikuttava momentti
u	Vektorin \mathbf{u} komponentti
\mathbf{u}	Partikkelin siirtymävektori
$v_1 \dots v_3$	Rodriguezin vektorin komponentit
\mathbf{v}	Rodriguezin yksikkövektori
V	Tilavuus
W	Työ
x	Karteesisen koordinaatiston 1. komponentti
\mathbf{X}	Globaalin koordinaatiston 1. akseli
y	Karteesisen koordinaatiston 2. komponentti
\mathbf{y}	Yleistetyt koordinaatit ja niiden nopeudet sisältävä vektori
\mathbf{Y}	Globaalin koordinaatiston 2. akseli
z	Karteesisen koordinaatiston 3. komponentti
\mathbf{Z}	Globaalin koordinaatiston 3. akseli

Kreikkalaiset aakkoset

δ	Virtuaalinen (Esimerkiksi δW on virtuaalinen työ)
δ	Fyysinen siirtymävektori
φ	Yhden muodon vaikutus yhteen solmuun
ϕ	Ominaismuoto
Φ	Ominaismuotomatriisi
λ	Lagrangen kerroin

λ	Vektori Lagrangen kertoimista
ρ	Tiheys
θ	Mielivaltainen kulma
$\theta_1 \dots \theta_2$	Eulerin parametrit
$\boldsymbol{\theta}$	Eulerin parametrivektori
$\boldsymbol{\omega}$	Kappaleen globaali kulmanopeus
ω^2	Ominaisarvo

Alaindeksit

0	Alkutila
c	Rajoitteeseen liittyvä
d	Diagonaalinen matriisi
e	Ulkoisiin voimiin liittyvä
f	Elastisiin koordinaatteihin liittyvä, joustavuudesta aiheutuva
F	Voimaan liittyvä
i	Indeksi summassa
j	Indeksi summassa
k	Indeksi summassa
λ	Ominaisarvoihin liittyvä
n	Solmuun n liittyvä
n_P	Kappaleen muotojen lukumäärä
p	Modaalikoordinaatteihin liittyvä
P	Partikkeliin P liittyvä d
q	Yleistettyihin koordinaatteihin liittyvä
$q_1 \dots q_n$	Osittaisderivaatta yleistetyn koordinaatin suhteen
\mathbf{q}	Osittaisderivaatta yleistettyjen koordinaattien suhteen
r	Referenssikoordinaatiston liikkeeseen liittyvä
R	Translaatiokoordinaatteihin liittyvä
s	Elastisiin voimiin liittyvä
θ	Rotaatiokoordinaatteihin liittyvä

t	Aikaderivaatta
T	Momenttiin liittyvä
v	Nopeuteen liittyvä

Yläindeksit

*	Ortogonaalinen
B	Ulkoisiin vapausasteisiin liittyvä
C	Korjausmuotoon liittyvä
$d1$	Kohtisuora
$d2$	Kohtisuora
i	Kappaleeseen i liittyvä
I	Sisäisiin vapausasteisiin liittyvä
j	Kappaleeseen j liittyvä
N	Reunaehtomuotoon liittyvä
$p1$	Yhdensuuntainen
$p2$	Yhdensuuntainen
s	Pisteiden yhtenevyys
T	Matriisin tai vektorin transpoosi
V	Reunaehto- ja korjausmuotoon liittyvä

Muut

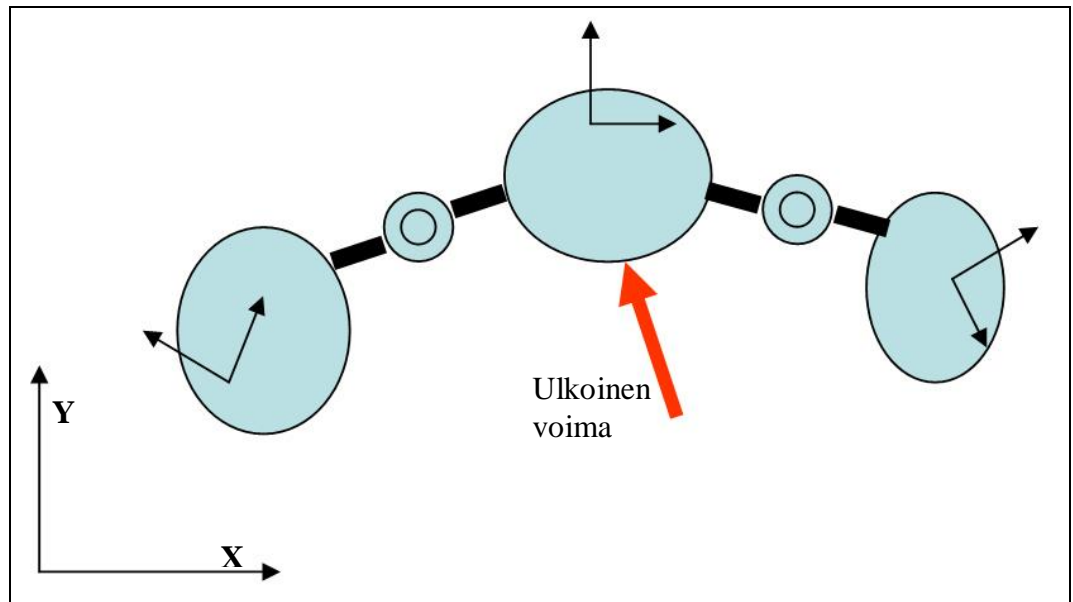
\hat{u}	Ensimmäinen aikaderivaatta siirtymävektorista
\hat{u}	Toinen aikaderivaatta siirtymävektorista
\bar{u}	Lokaali siirtymävektori
\tilde{u}	Vinosymmetrinen muoto siirtymävektorista
\hat{M}	Normeerattu massamatriisi

SISÄLLYSLUETTELO

1	JOHDANTO.....	2
1.1	Reaaliaikainen simulointi	4
1.2	Työn tavoitteet	5
1.3	Työn rajaus	6
2	JOUSTAVUUDEN KUVAUSMENETELMIÄ.....	7
3	KELLUVAN KOORDINAATISTON MENETELMÄ	10
3.1	Partikkelin aseman kuvaus joustavassa kappaleessa.....	11
3.2	Kappaleen nopeus ja kiihtyvyys	16
3.3	Muotomatriisin muodostaminen	19
3.6	Joustavan kappaleen inertia	23
3.6.1	Inertiavoimien tekemä työ	24
3.6.2	Massamatriisi ja massainvariantit.....	26
3.7	Yleistetyt voimat	29
3.8	Nivelrajoitteiden huomioiminen	33
3.9	Liiketyhtälöiden muodostaminen.....	38
4	OHJELMAN ESITTELY	41
5	NUMEERINEN ESIMERKKI.....	44
5.1	Heiluri.....	44
5.1.1	Heilurin lähtötiedot.....	45
5.1.2	Simuloinnin tulokset.....	47
6	JOHTOPÄÄTÖKSET	49
	LÄHTEET	51
	LIITTEET	

1 JOHDANTO

Monesta kappaleesta koostuvaa järjestelmää voidaan kutsua monikappalejärjestelmäksi. Monikappalejärjestelmän kappaleet ovat vuorovaikutuksessa toisiinsa nivelten välityksellä. Lisäksi monikappalejärjestelmässä voivat vaikuttaa ulkoiset voimat. Myös törmäysten huomioiminen on mahdollista. Tällaista järjestelmää voidaan analysoida monikappaledynamiikalla, joka on yleinen laskentamenetelmä, eikä tee oletuksia kappaleiden kiertymien suuruuksista. Suurten kiertymien vuoksi ovat järjestelmän dynamiikkaa kuvaavat liikeyhtälöt epälineaarisia ja ne ratkaistaan numeerisesti. Kuvassa 1 on esimerkki monikappalejärjestelmästä, johon kuuluu ulkoinen voima, kolme kappaletta ja kappaleiden väliset kiertonivelet.



Kuva 1. Esimerkki monikappalejärjestelmästä.

Reaaliaikaisessa monikappaledynamiikassa kappaleet on yleensä oletettu ideaalisen jäykiksi. Matemaattisessa mielessä rakenteet ovat kuitenkin aina joustavia. Jäykkien kappaleiden oletus yksinkertaistaa ja nopeuttaa simulointia tulosten tarkkuuden kustannuksella. Rakenteellisen jouston huomioiminen mahdollistaa rakenteeseen kohdistuvien venymien ja jännitysten analysoinnin. Tämä ei ole mahdollista jäykillä kappaleilla, sillä niihin ei synny muodonmuutoksia, eikä venymien tai jännitysten laskenta ole siten mahdollista. Jouston huomioiminen voi olla myös edellytys tarkan ohjaus- ja säätöjärjestelmän suunnittelulle. Olettamalla

kappaleet jäykiksi tehdään sitä enemmän virhettä, mitä suuremmat ovat todellisen rakenteen muodonmuutokset ja mitä lähempänä toimitaan rakenteen ominaisuuksia. Mitään nyrkkisääntöä siihen, milloin rakenteellinen joustavuus tulee ottaa huomioon, ei ole, vaan harkinta on tehtävä tapauskohtaisesti.

Simulointi helpottaa suunnittelua ja tuotekehitystä antamalla tarkasteltavasta kohteesta sellaisia tietoja, jotka eivät välttämättä pelkkien piirustusten perusteella tulisi ilmi. Erilaisten aikariippuvien ilmiöiden tarkasteluun simulointi on tehokas työkalu. Tämä vielä korostuu, mikäli simulointi voidaan suorittaa reaaliajassa ja osana muuta konejärjestelmää.

Reaaliaikasilmoointia voidaan hyödyntää useilla tavoilla koneiden suunnittelussa ja tuotekehitysprosessissa. Kytkeä reaali maailman ja simuloinnin välillä voidaan tehdä anturitietojen tai visuaalisten havaintojen perusteella. Kun käyttäjä ohjaa simulointimallia, puhutaan ”man-in-the-loop”-simuloinnista. Tuotekehityksen kannalta on suuri etu saada käyttäjän tuottama vaste reaaliaikaisen simulointimalliin ennen varsinaisen prototyypin rakentamista. Käyttäjän avulla saadaan työkierrosta ja sen koneelle aiheutuvista rasituksista miltei todellisia käyttöolosuhteita vastaavaa tietoa. Reaaliaikaisen simulointimallin ollessa osana kokonaista konejärjestelmää, saadaan suunnittelua varten tietoa simulointimallin ja muun järjestelmän vuorovaikutuksesta ja dynamiikasta. Tällöin on mahdollista selvittää vaihtoehtoisten ratkaisujen vaikutusta koko järjestelmään ilman, että fyysistä järjestelmää tarvitsee muuttaa. (Mikkola 2005)

Rakenteellista joustoa voidaan kuvata useilla eri menetelmillä, mutta reaaliaikaisuusvaatimus asettaa tiukat rajat menetelmän laskentatehon käytöstä. Eräs mahdollisuus kuvata rakenteellista joustoa on käyttää kelluvan koordinaatiston menetelmää. Kelluvan koordinaatiston menetelmän perusajatuksena on erottaa referenssikoordinaatiston liike ja kappaleen muodonmuutos toisistaan. Muodonmuutos kuvataan yleensä rakenteen moodeilla. Moodit voivat olla oletettuja deformaatiomuotoja, mutta useimmiten moodeina käytetään rakenteen värähtelyjen ominaismuotoja. Yleensä tarvittavat ominaismuodot voidaan ratkaista rakenteesta tehdystä elementtimallista. (Mikkola, Kerkkänen 2004 s. 7) Menetelmä on las-

kennallisesti tehokas ja mahdollistaa rakenteellisen jouston huomioimisen reaaliajassa. Menetelmässä oletetaan yleensä siirtymä-venymäsuhteen olevan lineaarinen, mikä pienillä muodonmuutoksilla pitääkin varsin tarkasti paikkansa. Reaaliaikaisuuden kannalta menetelmän erinomaisena ominaisuutena on mahdollisuus vaikuttaa järjestelmän taajuussisältöön sopivia muotoja valitsemalla. Lopputuloksena voidaan simuloida reaaliaikaisesti järjestelmiä, joissa on suuria siirtymiä ja samanaikaisesti pieniä lineaarisia muodonmuutoksia.

1.1 Reaaliaikainen simulointi

Simulointi on reaaliaikainen, kun simulointimalli reagoi ulkoisiin satunnaisiin herätteisiin määrättyssä ajassa ennakoitavalla tavalla. Reaaliaikaisen järjestelmän täytyy kaikissa kuormitusolosuhteissa täyttää seuraavat ehdot:

- aikaehto: simuloinnin tulee suorittaa tietyt toimenpiteet asetetussa ajassa
- rinnakkaisuusehto: usean tapahtuman sattuessa samanaikaisesti, tulee kaikkien aikarajoitteiden toteutua
- ennustettavuusehto: järjestelmän tulee reagoida kaikkiin mahdollisiin herätteisiin ennustettavasti

Herätteen ja mallin vasteen välinen aika vaikuttaa simulointituloksiin ja tästä johtuen mallia on pystyttävä laskemaan asetetun aikarajan sisällä. (Real-Time Encyclopedia)

Reaaliaikaisuus voidaan jakaa kahteen päätyyppiin, pehmeään ja kovaan. Pehmeässä reaaliaikaisuudessa simuloinnin aikarajat saavutetaan useimmiten, mutta aikarajan ylittäminen ei johda koko simuloinnin epäonnistumiseen. Kovassa reaaliajassa reaaliaikaiset prosessit suoritetaan varmuudella tietyssä ajassa ja kaikki muut vähemmän kriittiset prosessit saavat odottaa. Esimerkiksi koneiden ohjausjärjestelmien on toimittava varmasti kaikissa tilanteissa. Simulointimallin suoritus voi epäonnistua tai tarkkuus kärsiä, mikäli laskentaa ei voida suorittaa jokaisella aika-askeleella. Nyrkkisääntönä voidaan pitää sitä, että tulokset heikkenevät, jos

reaaliaikaisuus ei täysin toteudu, mutta tulokset eivät itsestäänselvästi parane, vaikka reaaliaikaisuusvaatimuksia kiristetään.

Välttämätön edellytys kovalle reaaliaikaisuudelle on riittävän pieni ja ennustettavissa oleva vaste satunnaisille herätteille. Mekatronisen koneen simulointimallin vaatimukset reaaliaikaisuuden toteutuksesta riippuvat itse mallista, varsinkin käytetyistä numeerisista menetelmistä ja sovelluksesta. Reaaliaikaisuusvaatimus on siis harkittava tapauskohtaisesti ja usein joudutaan tekemään kompromissi reaaliaikaisuuden kovuuden ja laskentatarkkuuden välillä. Mikäli käytössä on vakio määrä laskentatehoa tarkoittaa tiukka reaaliaikaisuusvaatimus sitä, että simulointimallia on yksinkertaistettava.

1.2 Työn tavoitteet

Diplomityö tehdään osana MARTSI-projektin osaprojektia *Joustavien kappaleiden mallinnus*. Osaprojektin tärkeimpänä tavoitteena on liittää joustavuuden kuvaus LTY:n reaaliaikasimulointiympäristöön. Reaaliaikasimulointiympäristö koostuu kahdesta erillisestä ohjelmasta, numeerisesta ratkaisijasta ja visualisoinnista, ja niiden välisestä tietoliikenteestä. Numeerinen ratkaisija laskee mallin dynaamisen käyttäytymisen ja visualisointi tuottaa käyttäjän näkyville kuvaa simuloinnista. Kuvassa 2 on esimerkki visualisoinnista. Kuva on visualisoidusta reaaliaikaisesta satamanosturista.



Kuva 2. Visualisoitu satamanosturi.

Kuvan 2 satamanosturisimulaattorissa ei ole huomioitu rakenteellista joustoa.

Tämän työn keskeisimpänä tavoitteena on kirjoittaa rakenteellisen jouston huomioiva monikappaledynamiikan simulointiohjelma. Tähän työhön asetetaan lisäksi seuraavat reunaehdot: rakenteellinen jousto tulee kuvata käyttäen kelluvan koordinaatiston menetelmää ja ohjelma tulee kirjoittaa Matlab-ympäristöön. Valmis Matlab-ohjelma voidaan siirtää C-kielelle ja siten saada aikaan reaaliaikaiseen simulointiin soveltuva koodi.

1.3 Työn rajaus

Tämän työn kirjallisessa osassa tarkastellaan rakenteellisen jouston kuvaamista kelluvan koordinaatiston menetelmällä. Tutkimusosassa esitellään kelluvan koordinaatiston menetelmää esimerkin avulla. Työssä rajoitutaan joustavuuden kuvauksen teoreettiseen esittelyyn ja soveltamiseen Matlab-ympäristössä. Joustavuuden kuvauksen lisääminen reaaliaikaiseen C-kieliseen kehitysympäristöön rajataan työn ulkopuolelle.

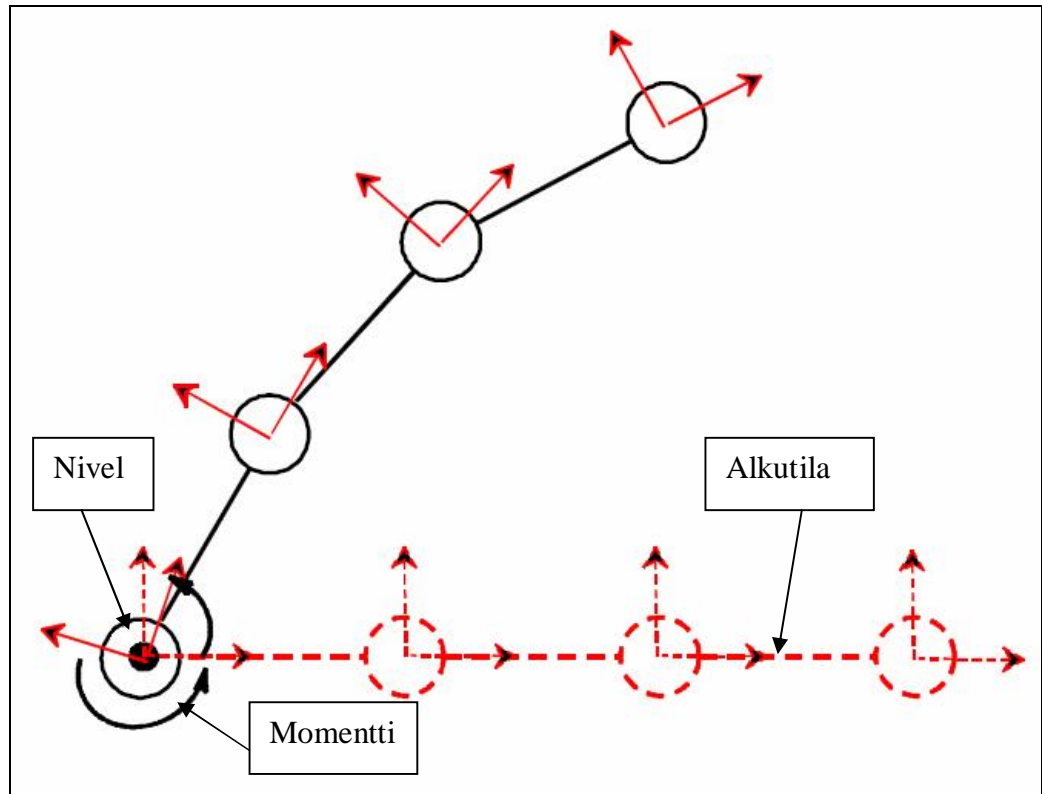
2 JOUSTAVUUDEN KUVAUSMENETELMIÄ

Rakenteellisella joustavuudella tarkoitetaan kuormituksen aiheuttamaa kappaleen muodonmuutosta. Rakenteellisen jouston kuvaukseen on kehitelty useita erilaisia menetelmiä. Kaikissa kuvaustavoissa rakenne diskretisoidaan numeerisen laskennan mahdollistamiseksi. Joustavuutta voidaan kuvata esimerkiksi seuraavilla menetelmillä:

- Perinteinen elementtimenetelmä (Bayo, Garcia de Jalon 1993 s. 389 - 392)
- Keskittyneiden massojen periaate (Shabana 1998 s. 161)
- Kelluvan koordinaatiston menetelmä (Shabana 1996)
- Absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmä (Shabana 1997a).

Alun perin staattisiin rakenneanalyysiin kehitetty elementtimenetelmä soveltuu myös käsittelemään kappaleiden epälineaarista dynamiikkaa. Dynamiikasta tulevat suuret kiertymät ja siirtymät voidaan huomioida käyttämällä epälineaarista kinematiikan kuvausta. Elementtimenetelmä pohjautuu lineaariseen kinematiikan kuvaukseen, tällöin suuret kiertymät ja siirtymät voidaan kuvata inkrementaalisesti. Inkrementaalinen dynaaminen analyysi vaatii paljon laskenta-aikaa ja voi aiheuttaa virhettä järjestelmän energiataseessa. (Shabana, Mikkola 2003) Epälineaarilla elementtimenetelmällä voidaan kuvata geometrisesti epälineaarinen jousto ja suuret kiertymät. (Baoy, Garcia de Jalon 1993 s. 389 - 392)

Keskittyneiden massojen periaatetta käytettäessä rakenne pilkotaan pistemassoiksi ja niitä yhdistäviksi jousiksi. Jokaiselle massapisteele muodostetaan jäykän kappaleen liikeyhtälöt. Avaruustapauksessa kahden massapisteen välille tarvitaan kuusi joustoa, joista kolmella kuvataan massojen välistä translaatiojäykkyyttä ja kolmella rotaatiojäykkyyttä. Kuvassa 3 on esitetty keskittyneiden massojen periaate.



Kuva 3. Keskittyneiden massojen periaate. (Mikkola 1997 s. 14)

Kelluvan koordinaatiston menetelmässä kappaleen tilaa kuvataan referenssiliikkeen ja muodoilla kuvatun joustavuuden summana. Referenssiliike kuvataan kappaleen suhteen kelluvan referenssikoordinaatiston liikkeen avulla. Muotoina voidaan käyttää oletettuja deformaatiomuotoja, mutta yleensä muotoina käytetään kappaleen ominaismuotoja, jotka ovat toisistaan riippumattomia. Riippumattomien muotojen käytön eräs etu on siinä, että osa inertian kuvauksesta pysyy ajan suhteen vakiona. (Shabana 1998 s. 191) Referenssiliikkeen ja muodonmuutoksen välinen vuorovaikutus huomioidaan kappaleen inertian kuvauksessa. Joustavuuden kuvauksessa käytettävät muodot voidaan ratkaista elementtimenetelmän avulla. (Mikkola, Kerckänen 2004 s. 7)

Absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmässä joustavan kappaleen partikkelin asema kuvataan muotofunktioiden ja solmukoordinaattien avulla suoraan globaalissa koordinaatistossa. Muotofunktiot muodostetaan globaalien vapausasteiden perusteella ja niillä voidaan kuvata jäykän kappaleen liike. (Shabana 1997b s. 198 - 199) Absoluuttisten solmukoordinaattien menetelmässä laskenta voidaan

suorittaa ei-inkrementaalisesti ja näin energiatase toteutuu laskentatarkkuuden rajoissa. Lisäetuna menetelmässä on vakio massamatriisi. (Shabana, Mikkola 2003 s. 488) Menetelmänä se kuitenkin on laskennallisesti raskaampi kuin esimerkiksi kelluvan koordinaatiston menetelmä.

Mainituista menetelmistä kelluvan koordinaatiston menetelmä soveltuu reaaliaikaiseen laskentaan parhaiten laskennallisen tehokkuutensa takia. Kelluvan koordinaatiston tehokkuus perustuu muotojen superponointitekniikan käyttöön, josta seuraa kaksi merkittävää etua. Muotojen superponointitekniikassa voidaan vähentää ratkaistavien muuttujien määrää, käyttämällä vain joustavuuden kuvauksen kannalta merkittäviä muotoja. On tärkeä huomata, että laskennan tarkkuuden kannalta vähiten merkityksellisiä muotoja ovat usein korkeisiin taajuuksiin liittyvät muodot. Niiden poistaminen vähentää järjestelmän korkeataajuisien ilmiöiden mallinnustarvetta ja mahdollistaa näin pidemmän aika-askeleen käytön.

3 KELLUVAN KOORDINAATISTON MENETELMÄ

Tässä työssä esitellään rakenteellisen joustavuuden kuvaus kelluvan koordinaatiston menetelmällä ja liikeyhtälöiden muodostaminen järjestelmälle, jossa on joustavia kappaleita. Kuvaus tehdään käyttäen Lagrangen menetelmää siten, että globaali koordinaatisto on karteesinen.

Lagrangen menettelytavassa järjestelmä kuvataan yleistetyillä koordinaateilla ja siinä voimat jaetaan ulkoisiin voimiin ja rajoitevoimiin. Menetelmä kuuluu energiamenetelmiin ja siinä järjestelmää käsitellään kokonaisuutena skalaariarvoisilla funktioilla, kuten liike-energia- ja potentiaalienergiafunktioilla. Lagrangen menetelmän johtamisen perustana on D'Alembertin periaate, jonka mukaan kappaleen inertiaivoimia voidaan käsitellä kuten ulkoisia voimia. Lagrangen mekaniikassa systeemiä ei tarvitse pilkkoa osiin rajoitevoimien ratkaisemiseksi kuten Newtonin menetelmässä. (Salmi 1997 s. 249)

Jäykän kappaleen kuvaamiseen riittää karteesisessa koordinaatistossa kuusi vapausastetta. Kappaleen jousto voidaan esittää yksittäisten solmujen asematietojen avulla. Yksittäisten solmujen asematietojen käsittely on kuitenkin laskennallisesti raskasta. Kelluvan koordinaatiston menetelmässä oletetaan joustavuus usein lineaariseksi ja se kuvataan rakenteen oletetuilla deformaatiomuodoilla. Mikäli siirtymä-venymäsuhdetta ei oleteta lineaariseksi, ei muotojen superponointitekniikan käyttö ole mahdollista. Muotojen superponointitekniikan avulla voidaan rakenteen joustavuuden kuvaukseen käytettävien vapausasteiden määrää vähentää mahdollisesti jopa sadoista tuhansista vapausasteista muutamaan kymmeneen.

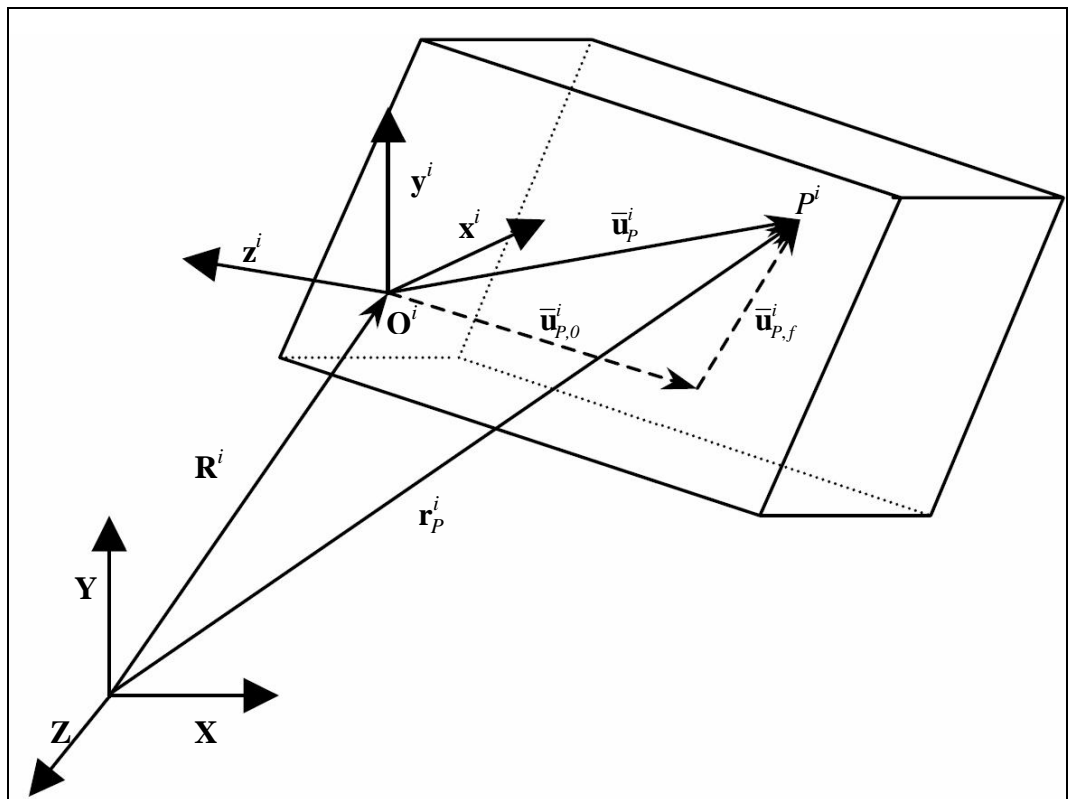
Kelluvan koordinaatiston menetelmän perustana on erottaa kappaleen deformaatio referenssikoordinaatiston liikkeestä. Referenssikoordinaatiston liike ei tarkoita samaa kuin jäykän kappaleen liike, vaikka liikkeet voivat olla lähellä toisiaan. Referenssiliikkeen kuvaukseen käytettävä koordinaatisto voi liikkua kappaleen lokaalin koordinaatiston suhteen, riippuen kappaleeseen mallinnuksen aikana liitetystä reunaehdoista. Referenssikoordinaateilla kuvataan kappaleen asema ja orientaatio valitussa koordinaatistossa. Kappaleen dynamiikan oletetaan syntyvän

referenssiliikkeestä, johon superponoituu kappaleen deformaatio. Deformaatio kuvataan muodoilla kappaleen referenssikoordinaatiston suhteen. Kappaleen dynaaminen käyttäytyminen saadaan suoraviivaisesti summaamalla referenssikoordinaatiston liikkeeseen muotojen kuvaama deformaatio. Referenssikoordinaatiston liikkeen ja deformaation välinen vuorovaikutus huomioidaan massamatriisin ja neliöllisen nopeusvektorin avulla. (Shabana 1998 s. 191 - 194)

3.1 Partikkelin aseman kuvaus joustavassa kappaleessa

Kappaleiden voidaan ajatella koostuvan partikkeleista. Kun kappaleen partikkelien asema ei muutu toistensa, eikä kappaleen lokaalin koordinaatiston suhteen sanotaan kappaletta jäykäksi. (Shabana 1998 s. 28)

Kuvassa 4 on esitetty partikkelin P^i aseman kuvaus deformoituneessa kappaleessa i . Kappaleen referenssikoordinaatiston asema kuvataan globaalilla asemavektorilla \mathbf{R}^i .



Kuva 4. Partikkelin P^i kuvaus globaalissa koordinaatistossa.

Kappaleen i partikkelin P^i aseman kuvaus globaalissa koordinaatistossa muuttuu kappaleen liikkuesssa. Partikkelin asema globaalissa koordinaatistossa voidaan määrittää, kun tiedetään referenssikoordinaatiston asema ja orientaatio, sekä partikkelin asema referenssikoordinaatiston suhteen, joka joustavassa kappaleessa on funktio ajasta. (Shabana 1998 s. 193 – 194)

Joustavan kappaleen i partikkelin P^i paikka voidaan globaalissa koordinaatistossa kuvata vektorilla \mathbf{r}_p^i , joka huomioi partikkelin P^i liikkeen suhteessa referenssikoordinaatistoon. Joustavan kappaleen aseman kuvaus voidaan esittää seuraavasti:

$$\mathbf{r}_p^i = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}_p^i = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i (\bar{\mathbf{u}}_{P,0}^i + \bar{\mathbf{u}}_{P,f}^i) \quad (3.1)$$

missä \mathbf{R}^i on lokaalin koordinaatiston asemavektori

\mathbf{A}^i on kiertomatriisi

$\bar{\mathbf{u}}_p^i$ on partikkelin P^i asemavektori lokaalissa koordinaatistossa

$\bar{\mathbf{u}}_{P,0}^i$ on partikkelin asemavektori alkutilassa

$\bar{\mathbf{u}}_{P,f}^i$ on partikkelin P^i aseman deformaatiovektori lokaalissa koordinaatistossa.

Vektorit \mathbf{r}^i ja \mathbf{R}^i on kuvattu globaalissa koordinaatistossa ja siksi on tärkeää pystyä kuvaamaan myös lokaalissa koordinaatistossa tunnetun pisteen P^i komponentit globaalin koordinaatiston suhteen. Transformaatiomatriisilla \mathbf{A}^i voidaan kappaleen lokaalissa koordinaatistossa kuvattu vektori muuntaa globaaliin koordinaatistoon ja päinvastoin. (Shabana 199. s. 11 - 12)

Kappaleen lokaalin koordinaatiston kierto voi tapahtua kolmen eri globaalin koordinaattiakselin ympäri. Eräs kolmen parametrin rotaatiokuvaus on Eulerin kulmien käyttö. Kuvauksessa kierretään lokaalia koordinaatistoa kolme kertaa siten, että toinen ja kolmas kierto tapahtuvat jo kierretyn koordinaatiston akselin ympäri. Kuvaus on fysikaalisessa mielessä selkeä, mutta ongelmana Eulerin kul-

mien käytössä on singulaarisuus. Tämä on ongelmana aina, kun kulmaesityksessä käytetään vain kolmea muuttujaa. Eulerin kulmien rotaatiokuvauksessa kierrot eivät ole aina riippumattomia. Eulerin kulmia käytettäessä on mahdollista valita kiertokulmat siten, että kaksi kiertoa tapahtuu saman akselin ympäri ja tällöin kiertoja ei voida erottaa toisistaan. Ongelma ei poistu kiertojärjestystä muuttamalla. Ottamalla käyttöön neljä parametria ja yksi rajoiteyhtälö saadaan kolmen riippumattoman parametrin rotaatiokuvaus. Eräs vaihtoehtoinen ja yleisesti monikappaledynamiikan simulointiohjelmistoissa käytössä oleva rotaatiomatriisin esitystapa on Eulerin parametriesitys. Eulerin parametriesitys saadaan, kun yhteys

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \quad (3.2)$$

sijoitetaan Rodriguezin yhtälöön (esitetty lähteessä Shabana 1998 s. 30 - 31):

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{I} + 2\tilde{\mathbf{v}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\mathbf{I} \cos \frac{\theta}{2} + 2\tilde{\mathbf{v}} \sin \frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (3.3)$$

missä $\tilde{\mathbf{v}}$ on vinosymmetrinen muoto yksikkövektorista \mathbf{v} .

Rodriguezin yhtälön johtamista varten kiinnitetään kappaleeseen mielivaltainen yksikkövektori \mathbf{v} , jonka ympäri kappaletta kierretään kulman θ verran. Verrattaessa kappaleen asemavektoria ennen ja jälkeen kierron, saadaan kierron kuvaukseksi \mathbf{A} yhtälöstä (3.3). (Shabana 1998 s. 30)

Sijoittamalla yhtälöön (3.3) seuraavat merkinnät:

$$\theta_0 = \sin \frac{\theta}{2}, \quad \theta_1 = v_1 \cos \frac{\theta}{2}, \quad \theta_2 = v_2 \cos \frac{\theta}{2}, \quad \theta_3 = v_3 \cos \frac{\theta}{2} \quad (3.4)$$

Saadaan kiertomatriisiksi \mathbf{A} seuraavanlainen esitys:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - 2(\theta_2) - 2(\theta_3) & 2(\theta_1\theta_2 - \theta_0\theta_3) & 2(\theta_1\theta_3 + \theta_0\theta_2) \\ 2(\theta_1\theta_2 + \theta_0\theta_3) & 1 - 2(\theta_1)^2 - 2(\theta_3)^2 & 2(\theta_2\theta_3 - \theta_0\theta_1) \\ 2(\theta_1\theta_3 - \theta_0\theta_2) & 2(\theta_2\theta_3 + \theta_0\theta_1) & 1 - 2(\theta_1)^2 - 2(\theta_2)^2 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Kappaleen rotaatio kuvataan siis vektorilla

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta_0 \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T \quad (3.6)$$

missä komponentit θ_0 , θ_1 , θ_2 ja θ_3 ovat Eulerin parametreja.

Eulerin parametreja käyttämällä saadaan rotaatioesitys, joka ei muutu singulaariseksi millään kulmayhdistelmällä. Eulerin parametrien neljä parametria sidotaan kolmeksi riippumattomaksi parametriksi seuraavalla rajoiteyhtälöllä (Shabana 1998, s. 30 - 34):

$$\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\theta} = \theta_0^2 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = 1 \quad (3.7)$$

Eulerin parametrien ongelmana on vaikeasti havainnollistettava parametrien fyysikaalinen merkitys.

Kappaleen siirtymätilan tarkka kuvaus vaatii äärettömän määrän vapausasteita. Kappaleen siirtymätilaa voidaan approksimoida elementtimenetelmällä siten, että siirtymätila ratkaistaan diskretisoidun kappaleen solmuissa ja muiden pisteiden siirtymätila interpoloidaan muotofunktioilla (Agrawal, Shabana 1984).

Monikappaledynamiikassa on harvoin tarvetta laskea joustavan kappaleen vastetta yksityiskohtaisesti. Käyttämällä muotojen superponointitekniikkaa voidaan ratkaistavien muuttujien lukumäärää alentaa merkittävästi. Menetelmässä siirrytään solmukoordinaateista modaalikoordinaatteihin, jolloin voidaan systeemin siirtymätila laskea huomattavasti alkuperäisiä vapausasteita pienemmällä määrällä vapausasteita. Ratkaisemalla elementtimenetelmässä rakenteen värähtelyjen ominaisarvotehtävä saadaan tuloksena muotomatriisi $\boldsymbol{\Phi}^i$, joka sisältää yleisessä tapauk-

sessä solmujen kaikki vapausasteet kuvattuna muodoilla. Monikappaledynamiikassa muotomatriisi tulee jakaa erikseen translaatio- ja rotaatiokomponentteihin. Muotomatriisi voidaan hajottaa kahteen osaan seuraavasti (Mikkola, Kerkkänen 2004 s. 21 – 22):

$$\mathbf{\Phi}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_R^i \\ \mathbf{\Phi}_\theta^i \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

missä $\mathbf{\Phi}_R^i(\varphi_{r,1}^i \dots \varphi_{r,n_p}^i)$ on kappaleen i solmujen translaatioita kuvaava muotomatriisi

$\mathbf{\Phi}_\theta^i(\varphi_{r,1}^i \dots \varphi_{r,n_p}^i)$ on kappaleen i solmujen rotaatioita kuvaava muotomatriisi.

Kappaleen i yksittäisen solmun n deformaatiovektoria $\bar{\mathbf{u}}_{f,n}^i$ voidaan kuvata modaali-koordinaateilla seuraavasti:

$$\bar{\mathbf{u}}_{f,n}^i = \mathbf{\Phi}_{R,n}^i \mathbf{p}_f^i, \quad n = 1, 2, \dots, n_n \quad (3.9)$$

missä $\mathbf{\Phi}_{R,n}^i$ on kappaleen i muotomatriisin solmuun n liittyvä osa

\mathbf{p}_f^i on kappaleen i elastisten koordinaattien vektori

n_n on kappaleen i solmujen kokonaismäärä.

Muotomatriisin osa $\mathbf{\Phi}_{R,n}^i$ on kooltaan $(3 \times n_p)$ ja sisältää pelkät translaatioihin liittyvät muodot. (Shabana 1998 s. 215)

Sijoittamalla yhteys (3.9) partikkelin P asemavektorin yhtälöön (3.1) saadaan joustavan kappaleen i partikkelin P asemaavektoriksi seuraavanlainen esitys:

$$\mathbf{r}_P^i = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i(\bar{\mathbf{u}}_{P,0}^i + \bar{\mathbf{u}}_{P,f}^i) = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i(\bar{\mathbf{u}}_{P,0}^i + \mathbf{\Phi}_{R,n}^i \mathbf{p}_f^i) \quad (3.10)$$

Käyttämällä ortogonaalista muotomatriisia saadaan jouston kuvauksessa käytettävät jäykkyys- ja massamatriisit diagonaalimuotoon. Käytettävät muodot voidaan valita kuormitustapauksen mukaan, koska muodoilla ei ole toisiinsa mitään kytkentää. (Ottarsson 1998 s. 6)

3.2 Kappaleen nopeus ja kiihtyvyys

Kappaleen nopeus saadaan derivoimalla aseman kuvaus (yhtälö 3.1) ajan suhteen:

$$\dot{\mathbf{r}}_p^i = \dot{\mathbf{R}}^i + \mathbf{A}^i \dot{\mathbf{u}}_p^i + \mathbf{A}^i \dot{\mathbf{u}}_p^i \quad (3.11)$$

Kiertomatriisin aikaderivaatta $\dot{\mathbf{A}}^i$ voidaan esittää muodossa:

$$\dot{\mathbf{A}}^i = \mathbf{A}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \quad (3.12)$$

missä $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^i$ on vinosymmetrinen kuvaus lokaaleista kulmanopeuksista.

Lokaalin koordinaatiston kulmanopeusvektorin $\overline{\boldsymbol{\omega}}^i$ ja Eulerin parametrien ensimmäisen aikaderivaatan $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ välille voidaan esittää seuraava epälineaarinen yhteys:

$$\overline{\boldsymbol{\omega}}^i = \overline{\mathbf{G}}^i \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.13)$$

missä $\overline{\mathbf{G}}^i$ on lokaali nopeusmuunnosmatriisi ja se määritellään seuraavasti:

$$\overline{\mathbf{G}}^i = 2 \begin{bmatrix} -\theta_1^i & \theta_0^i & \theta_3^i & -\theta_2^i \\ -\theta_2^i & -\theta_3^i & \theta_0^i & \theta_1^i \\ -\theta_3^i & \theta_2^i & -\theta_1^i & \theta_0^i \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Rotaatiokuvaus on mahdollista tehdä myös muuten kuin Eulerin parametreja käyttäen, kunhan matriisi $\overline{\mathbf{G}}^i$ toteuttaa vaaditun kuvauksen.

Partikkelin P^i lokaalin asemavektorin aikaderivaatta voidaan esittää seuraavasti:

$$\dot{\mathbf{u}}_P^i = \dot{\mathbf{u}}_{P,0}^i + \dot{\mathbf{u}}_{P,f}^i = \dot{\mathbf{u}}_{P,0}^i + \Phi_{R\mathbf{p}}^i \dot{\mathbf{p}} \quad (3.15)$$

missä $\dot{\mathbf{u}}_{P,0}^i = \mathbf{0}$, alkuasemavektori on ajan suhteen vakio

$\dot{\mathbf{u}}_{P,f}^i$ on deformaatiosta aiheutuva partikkelin P^i nopeus ja $\Phi_{R\mathbf{p}}^i \dot{\mathbf{p}}$ on muotomatriisin translaatiokomponenttien osuuden ja modaalikoordinaattien nopeuden tulo. (Mikkola, Kerkkänen 2004 s. 22)

Yleistettyjen koordinaattien avulla partikkelin nopeus voidaan esittää seuraavasti:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_P^i &= \dot{\mathbf{R}}^i - \mathbf{A}^i \tilde{\mathbf{u}}_P^i \overline{\mathbf{G}}^i \dot{\boldsymbol{\theta}}^i + \mathbf{A}^i \dot{\mathbf{u}}_{P,f}^i \\ &= \dot{\mathbf{R}}^i - \mathbf{A}^i (\tilde{\mathbf{u}}_0^i + \tilde{\Phi}_{R\mathbf{p}}^i) \overline{\mathbf{G}}^i \dot{\boldsymbol{\theta}}^i + \mathbf{A}^i \Phi_{R\mathbf{p}}^i \dot{\mathbf{p}} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ottamalla käyttöön jäykän kappaleen translaation ja rotaation väliselle kytkennälle seuraava lyhennysmerkintä:

$$\mathbf{B}^i = -\mathbf{A}^i \tilde{\mathbf{u}}_P^i \overline{\mathbf{G}}^i = -\mathbf{A}^i (\tilde{\mathbf{u}}_0^i + \tilde{\Phi}_{R\mathbf{p}}^i) \overline{\mathbf{G}}^i \quad (3.17)$$

ja erottelemalla yhtälöstä (3.16) yleistettyjen koordinaattien nopeudet omaksi vektoriksi saadaan kappaleen i partikkelin P^i paikkavektorin aikaderivaatta esitettyä seuraavasti:

$$\dot{\mathbf{r}}_P^i = \left[\mathbf{I} - \mathbf{A}^i (\tilde{\mathbf{u}}_0^i + \tilde{\Phi}_{R\mathbf{p}}^i) \overline{\mathbf{G}}^i \quad \mathbf{A}^i \Phi_{R\mathbf{p}}^i \right] \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}^i \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}^i \\ \dot{\mathbf{p}}^i \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{R}}^i + \mathbf{B}^i \dot{\boldsymbol{\theta}}^i + \mathbf{A}^i \Phi_{R\mathbf{p}}^i \dot{\mathbf{p}}^i \quad (3.18)$$

missä \mathbf{I} on (3×3) yksikkömatriisi.

Käyttämällä seuraavaa lyhennysmerkintää:

$$\mathbf{L}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B}^i & \mathbf{A}^i \Phi_R^i \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

saadaan partikkelin nopeus esitetty seuraavasti:

$$\dot{\mathbf{q}}_P^i = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B}^i & \mathbf{A}^i \Phi_R^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}^i \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}^i \\ \dot{\mathbf{p}}^i \end{bmatrix} = \mathbf{L}^i \dot{\mathbf{q}}^i \quad (3.20)$$

Derivoimalla yhtälö (3.20) ajan suhteen saadaan partikkelin P^i kiihtyvyys seuraavasti:

$$\ddot{\mathbf{q}}_P^i = \mathbf{L}^i \ddot{\mathbf{q}}^i + \dot{\mathbf{L}}^i \dot{\mathbf{q}}^i \quad (3.21)$$

missä $\dot{\mathbf{L}}^i \dot{\mathbf{q}}^i$ on neliöllinen nopeusvektori, joka sisältää kuvauksen neliöllisen nopeuden aiheuttamista voimista.

Lyhennysmerkinnän \mathbf{L} derivaatta ajan suhteen voidaan esittää seuraavasti:

$$\dot{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \dot{\mathbf{B}} & \dot{\mathbf{A}}^i \Phi_R^i \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\text{missä } \dot{\mathbf{B}} = -\mathbf{A} \tilde{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{G}} - \mathbf{A} \tilde{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{G}} - \mathbf{A} \tilde{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{G}}$$

Purkamalla auki yhtälön (3.21) lyhennysmerkinnät saadaan partikkelin P^i kiihtyvyydelle seuraava esitys:

$$\ddot{\mathbf{q}}_P^i = \ddot{\mathbf{R}}^i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i + \dot{\boldsymbol{\omega}}^i \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \mathbf{A}^i \dot{\bar{\mathbf{u}}}_P^i + \mathbf{A}^i \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_P^i \quad (3.23)$$

missä $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^i$ on vinosymmetrinen esitys kappaleen kulmanopeudesta globaalissa koordinaatistossa

$\ddot{\mathbf{R}}^i$ on lokaalin koordinaatiston kiihtyvyys

$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i$ on kiihtyvyyden normaalikomponentti

$\mathbf{A}^i \mathbf{u}_p^i$ on kiihtyvyyden tangenttikomponentti

$2\tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \mathbf{A}^i \mathbf{u}_p^i$ on kiihtyvyyden korioliskomponentti

$\mathbf{A}^i \mathbf{u}_p^i$ on kappaleen i deformaatiosta syntyvä partikkelin P kiihtyvyys.

(Shabana 1998 s. 201) (Mikkola, Kerckänen 2004 s. 22 - 23)

3.3 Muotomatriisin muodostaminen

Muotomatriisi $\mathbf{\Phi}$ voidaan muodostaa elementtimenetelmän avulla. Muotomatriisin muodostamiseksi tarkastellaan rakenteen ominaisarvotehtävän ratkaisua.

Elementtimenetelmässä vaimentamattoman järjestelmän liikeyhtälö voidaan esittää muodossa:

$$\mathbf{M} \mathbf{u}_f + \mathbf{K} \mathbf{u}_f = \mathbf{Q}_e \quad (3.24)$$

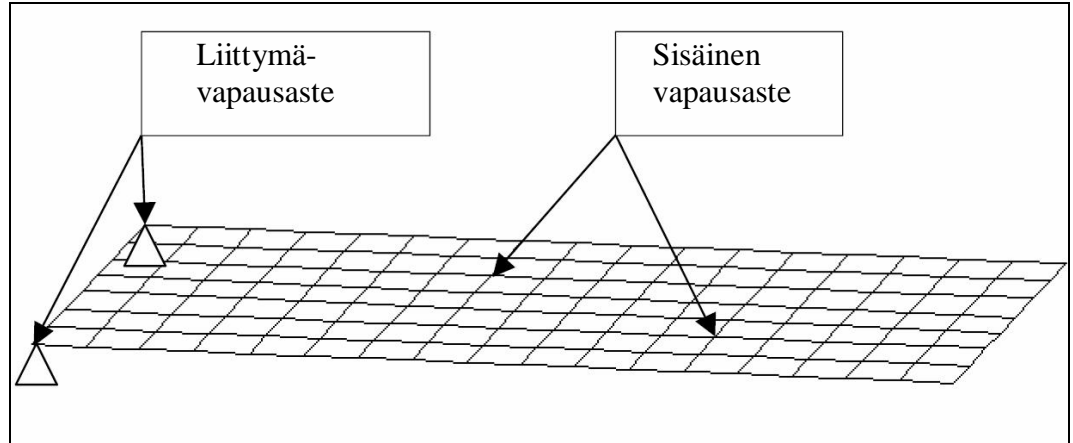
missä \mathbf{M} on massamatriisi

\mathbf{u}_f on solmuisiirtymien vektori

\mathbf{K} on jäykkyydematriisi

\mathbf{Q}_e on ulkoisten voimien vektori.

Käytettäessä vapaan värähtelyn ominaismuotoja kuvaamaan kappaleen deformaatiota muodostuu ongelmaksi usein se, että muodot eivät välttämättä kuvaa oikein nivelten tai ulkoisten voimien liityntäaluetta. Ongelmaan on ratkaisuksi kehitetty osarakennetekniikka, jossa osa kappaleen vapausasteista valitaan liittymävapausasteiksi ja niissä suuretkin paikalliset deformaatiot saadaan kuvattua oikein. (Craig, Bampton 1968) Kuvassa 5 on esitetty eräs tapa jakaa vapausasteet sisäisiin ja ulkoisiin vapausasteisiin.



Kuva 5. Vapausasteiden jako ulkoisiin ja sisäisiin vapausasteisiin. (Mikkola, Kerkkänen 2004 s. 17)

Olkoon rakenteen jäykkyysmatriisi \mathbf{K} ja massamatriisi \mathbf{M} . Matriisit voidaan jaotella liittymävapausasteisiin (B) ja sisäisiin vapausasteisiin (I). Alkuperäisessä rakenteessa voivat liittymävapausasteet sijaita mielivaltaisissa paikoissa. Matriiseja tulee järjestellä uudelleen vaihtamalla rivien ja sarakkeiden järjestystä siten, että järjestyksen jälkeen voidaan rakenteen jäykkyysmatriisi esittää seuraavasti:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{BB} & \mathbf{K}^{BI} \\ \mathbf{K}^{IB} & \mathbf{K}^{II} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

ja vastaavasti massamatriisi \mathbf{M} voidaan jakaa sisäisiin ja ulkoisiin vapausasteisiin seuraavasti:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{BB} & \mathbf{M}^{BI} \\ \mathbf{M}^{IB} & \mathbf{M}^{II} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Edellä esitetyn jaottelun mukaisesti voidaan joustavan jäsenen liikeyhtälö esittää muodossa:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{BB} & \mathbf{M}^{BI} \\ \mathbf{M}^{IB} & \mathbf{M}^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_f^B \\ \mathbf{u}_f^I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{BB} & \mathbf{K}^{BI} \\ \mathbf{K}^{IB} & \mathbf{K}^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_f^B \\ \mathbf{u}_f^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_f^B \\ \mathbf{F}_f^I \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Käyttämällä yhtälön (3.27) mukaista jaottelua, voidaan sisäisiin vapausasteisiin \mathbf{u}_f^I liittyvät ominaismuodot ratkaista yhtälöstä:

$$\left(\mathbf{K}^{II} - \omega_\lambda^2 \mathbf{M}^{II} \right) \boldsymbol{\varphi}_\lambda^N = \mathbf{0} \quad (3.28)$$

missä ω_λ^2 on ominaisarvo

$\boldsymbol{\varphi}_\lambda^N$ ominaisarvoon liittyvä ominaismuoto eli normaalimuoto.

Yhtälöstä (3.28) saadaan ratkaistua tuetun rakenteen ominaismuotomatriisi $\boldsymbol{\Phi}^N (\boldsymbol{\varphi}_1^N \dots \boldsymbol{\varphi}_{n_p}^N)$. Osarakenteen staattiset korjausmuodot määritellään asettamalla kuhunkin rajoitteeseen yksikkösiirtymä, pitämällä muut rajoitteet voimassa ja sisäiset vapausasteet vapaina. Staattiset korjausmuodot ratkaistaan staattisesta tasapainoyhtälöstä:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}^B \\ \mathbf{F}^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{BB} & \mathbf{K}^{BI} \\ \mathbf{K}^{IB} & \mathbf{K}^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^B \\ \mathbf{u}^I \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Staattiset korjausmuodot löydetään kun sisäisiin vapausasteisiin vaikuttava voima \mathbf{F}^I asetetaan nolllaksi:

$$\mathbf{u}^I = \left[-\mathbf{K}^{II} \right]^{-1} \mathbf{K}^{IB} \mathbf{u}^B = \boldsymbol{\Phi}^C \mathbf{u}^B \quad (3.30)$$

missä \mathbf{u}^I on osarakenteen sisäisten vapausasteiden fyysinen siirtymävektori

\mathbf{u}^B on osarakenteen liittymävapausasteiden fyysinen siirtymävektori

$\boldsymbol{\Phi}^C$ on muotomatriisi, joka sisältää staattiset korjausmuodot.

Rakenteen lopullinen ominaismuotomatriisi saadaan yhdistämällä värähtelyjen ominaisarvotehtävästä ratkaistu normaalimuotomatriisi ja staattiset korjausmuodot sisältävä matriisi seuraavasti:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}^B \\ \mathbf{u}^I \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \Phi^C & \Phi^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}^C \\ \mathbf{p}^N \end{bmatrix} = \Phi^V \mathbf{p} \quad (3.31)$$

missä \mathbf{I} ja $\mathbf{0}$ ovat yksikkömatriisi ja nollamatriisi

Φ^C on sisäisten vapausasteiden fyysiset siirtymät staattisissa korjausmuodoissa

Φ^N on sisäisten vapausasteiden fyysiset siirtymät tuetuissa muodoissa

\mathbf{p}^C on staattisten korjausmuotojen modaalikoordinaatit

\mathbf{p}^N on tuettujen muotojen modaalikoordinaatit

Φ^V on reunaehtomuodot ja staattiset korjausmuodot sisältävä ominaismuotomatriisi.

Tulokseksi saadaan muotomatriisi, joka kuvaa rakenteen reunaehtoja ja staattisia korjausmuotoja. Muotovektorin avulla voidaan näin kuvata yleistä reunaehtotapusta monikappaledynamiikassa.

Hankaluutena staattisten korjausmuotojen käytössä on se, että korjausmuotojen kanssa ratkaistut muotomatriisit eivät ole ortogonaalisia. Staattiset korjausmuodot eivät sisällä epälinearisessa simuloinnissa tarvittavaa tietoa niiden taajuuksista. Korjausmuotoja ei myöskään voi poistaa, sillä se vastaa rajoitteiden asettamista. (Ottarsson 1998 s. 6)

Ongelmaa voidaan kiertää ortonormalisoimalla muotomatriisi, jonka tuloksena massa- ja jäykkyysmatriisi saadaan diagonaaliseksi. Tämä voidaan toteuttaa ratkaisemalla ominaisarvot ja -muodot yhtälössä (3.28) esitellyille matriiseille

$$\left(\hat{\mathbf{K}} - \omega^2 \hat{\mathbf{M}} \right) \boldsymbol{\phi}_\lambda^* = \mathbf{0} \quad (3.32)$$

missä jäykkyys ja massamatriisit on normeerattu seuraavasti:

$$\hat{\mathbf{K}} = \Phi^{V,T} \mathbf{K} \Phi^V \quad (3.33)$$

$$\hat{\mathbf{M}} = \Phi^{V,T} \mathbf{M} \Phi^V \quad (3.34)$$

Yhtälöstä (3.32) saadaan lopulliseksi muotomatriisiksi $\Phi^* [\varphi_1^* K \varphi_n^*]$, joka ortogonalisoi muotoihin liittyvät massa- ja jäykkyyismatriisin seuraavasti:

$$\hat{\mathbf{K}}_d = \Phi^{*T} \hat{\mathbf{K}} \Phi^* = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \circ & \\ 0 & & \omega_{n_p}^2 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\hat{\mathbf{M}}_d = \Phi^{*T} \hat{\mathbf{M}} \Phi^* = \mathbf{I} \quad (3.36)$$

missä \mathbf{I} on $(n_p \times n_p)$ yksikkömatriisi siten, että n_p on muotojen määrä.

Menetelmässä katoaa ominaismuotojen fyysinen merkitys ja yhtälöistä (3.35) ja (3.36) on vaikea erottaa toisistaan tuetut muodot ja staattisiin korjausmuotoihin liittyvät muodot. Esitetty menetelmä on yleinen, eikä tee oletuksia monikappale-dynamiikassa käytettävistä nivelistä. (Mikkola, Kerkkänen 2004 s. 19) Liittymäsolmuiksi valitaan usein kappaleen nivelten liittymäsolmut, solmut joihin on keskittynyt voimia ja sellaiset solmut joidenka yksityiskohtaisesta vasteesta ollaan kiinnostuneita.

3.6 Joustavan kappaleen inertia

Monikappale-dynamiikassa kappaleen inertia kuvataan kappaleen lokaalissa koordinaatistossa ja tästä syystä massamatriisista tulee osittain kappaleen orientaatiosta riippuva. Näin massamatriisi tulee ratkaista jokaisella aika-askeleella. Koska inertia kuvataan lokaalissa koordinaatistossa, tulee kappaleen pyörimisestä johtuvat neliöllisestä nopeudesta riippuvat voimakomponentit huomioida. Suoraviivainen menettelytapa on kerätä suoraan kiihtyvyysskomponentteihin liittyvät inertiaominaisuudet omaan matriisiinsa ja neliöllisestä nopeudesta riippuvat komponentit omaan vektoriinsa.

3.6.1 Inertiavoimien tekemä työ

Joustavan kappaleen inertiavoimien tekemä työ voidaan esittää muodossa:

$$W^i = \int_{V^i} \rho^i \mathbf{r}^{i,T} \mathbb{a}^i dV^i \quad (3.37)$$

missä \mathbb{a}^i on partikkelin kiihtyvyys

\mathbf{r}^i on partikkelin asema.

Inertiavoimien tekemä virtuaalinen työ voidaan lausua seuraavasti (Shabana 1998 s. 229):

$$\delta W^i = \int_{V^i} \rho^i \delta \mathbf{r}^{i,T} \mathbb{a}^i dV^i \quad (3.38)$$

missä $\delta \mathbf{r}^i$ on aseman virtuaalinen muutos.

Aseman virtuaalisen muutoksen transpoosi voidaan esittää seuraavasti:

$$\delta \mathbf{r}^{i,T} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{R}^i & \delta \boldsymbol{\theta}^i & \delta \mathbf{p}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}^T \\ \mathbf{B}^{i,T} \\ [\mathbf{A}^i \boldsymbol{\Phi}_R^i]^T \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Purkamalla auki lyhennysmerkinnät partikkelin kiihtyvyyden yhtälöstä (3.21) ja poimimalla neliölliseen nopeuteen liittyvät termit yhtälöstä (3.23) saadaan kiihtyvyys seuraavaan muotoon:

$$\mathbb{a}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B}^i & \mathbf{A}^i \boldsymbol{\Phi}_R^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{R}}^i \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}^i \\ \ddot{\mathbf{p}}^i \end{bmatrix} + \mathbf{A}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \bar{\mathbf{u}}^i + 2\mathbf{A}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \boldsymbol{\Phi}_R^i \dot{\mathbf{p}}^i \quad (3.40)$$

Sijoittamalla virtuaalisen aseman muutoksen (3.39) ja kiihtyvyyden (3.40) kuvaukset yhtälöön (3.38) saadaan inertiaivoimien tekemäksi virtuaaliseksi työksi seuraavanlainen esitys:

$$\delta W^i = \int_{V^i} \rho^i \left[\delta \mathbf{R}^i \quad \delta \boldsymbol{\Theta}^i \quad \delta \mathbf{p}^i \right] \mathbf{L}^{i,T} \left[\mathbf{L}^i \begin{bmatrix} \mathbf{R}^i \\ \boldsymbol{\Theta}^i \\ \mathbf{p}^i \end{bmatrix} + \mathbf{A}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \bar{\mathbf{u}}^i + 2\mathbf{A}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \boldsymbol{\Phi}_R^i \dot{\mathbf{p}}^i \right] dV^i \quad (3.41)$$

Määritellään osa inertiaivoimien tekemästä virtuaalisen työn lausekkeesta massamatriisiksi:

$$\mathbf{M}^i = \int_{V^i} \rho^i \mathbf{L}^{i,T} \mathbf{L}^i dV^i \quad (3.42)$$

Purkamalla auki lyhennysmerkinnät saadaan massamatriisi esitettyä seuraavasti:

$$\mathbf{M}^i = \int_{V^i} \rho^i \begin{bmatrix} \mathbf{I}^T \\ \mathbf{B}^{i,T} \\ [\mathbf{A}^i \boldsymbol{\Phi}_R^i]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B}^i & \mathbf{A}^i \boldsymbol{\Phi}_R^i \end{bmatrix} dV^i \quad (3.43)$$

Kertolaskun suorittamalla saadaan kappaleen i massamatriisiksi:

$$\mathbf{M}^i = \int_{V^i} \rho^i \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B}^i & \mathbf{A}^i \boldsymbol{\Phi}_R^i \\ \mathbf{B}^{i,T} \mathbf{B}^i & \mathbf{B}^{i,T} \mathbf{A}^i \boldsymbol{\Phi}_R^i & \\ \text{symmetrinen} & \boldsymbol{\Phi}_R^{i,T} \boldsymbol{\Phi}_R^i & \end{bmatrix} dV^i \quad (3.44)$$

Määritellään osa inertiaivoimien tekemästä virtuaalisen työn lausekkeesta neliölliseksi nopeusvektoriksi:

$$\mathbf{Q}_v^i = \int_{V^i} \rho^i \mathbf{L}^T \left[\mathbf{A}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \bar{\mathbf{u}}^i + 2\mathbf{A}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \boldsymbol{\Phi}_R^i \dot{\mathbf{p}}^i \right] dV^i \quad (3.45)$$

Purkamalla auki lyhennysmerkintä \mathbf{L} saadaan neliölliseksi nopeusvektoriksi seuraava esitys:

$$\mathbf{Q}_v^i = \int_{V^i} \rho^i \begin{bmatrix} \mathbf{I}^T \left[\mathbf{A}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \bar{\mathbf{u}}^i + 2\mathbf{A}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \boldsymbol{\Phi}_R^i \dot{\boldsymbol{\phi}}^i \right] \\ \mathbf{B}^{i,T} \left[\mathbf{A}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \bar{\mathbf{u}}^i + 2\mathbf{A}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \boldsymbol{\Phi}_R^i \dot{\boldsymbol{\phi}}^i \right] \\ \left[\mathbf{A}^i \boldsymbol{\Phi}_R^i \right]^T \left[\mathbf{A}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \bar{\mathbf{u}}^i + 2\mathbf{A}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \boldsymbol{\Phi}_R^i \dot{\boldsymbol{\phi}}^i \right] \end{bmatrix} dV^i \quad (3.46)$$

Edellä esitetty tapa muodostaa kappaleen i massamatriisi \mathbf{M}^i ja neliöllinen nopeusvektori \mathbf{Q}_v^i ovat suoraviivaisia, mutta numeerisen ratkaisun kannalta ei ole mielekästä laskea ajan suhteen vakiona säilyviä termejä jokaisella aika-askeleella erikseen. Sekä massamatriisi että neliöllinen nopeusvektori sisältävät ajan suhteen vakiona säilyviä komponentteja. Massamatriisin yhteydessä näistä komponenteista käytetään usein nimitystä massainvariantit. Massainvariantit tulee ratkaista esikäsittelyssä ennen varsinaisten liikeyhtälöiden integroimista.

3.6.2 Massamatriisi ja massainvariantit

Joustavan kappaleen kineettinen energia voidaan lausua muodossa:

$$T^i = \frac{1}{2} \int_{V^i} \rho^i \dot{\boldsymbol{\phi}}^{i,T} \dot{\boldsymbol{\phi}}^i dV^i \quad (3.47)$$

Sijoittamalla kappaleen mielivaltaisen pisteen i nopeus (yhtälö 3.12) yhtälöön (3.47) saadaan kineettinen energia lopulta esitettyä muodossa:

$$T^i = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^{i,T} \mathbf{M}^i \dot{\boldsymbol{q}}^i \quad (3.48)$$

missä $\dot{\boldsymbol{q}}$ on kappaleen yleistettyjen koordinaattien nopeudet sisältävä vektori \mathbf{M}^i on kappaleen i massamatriisi, joka voidaan esittää komponentteittain seuraavasti:

$$\mathbf{M}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{R,R} & \mathbf{M}_{R,\theta} & \mathbf{M}_{R,p} \\ \mathbf{M}_{\theta,R} & \mathbf{M}_{\theta,\theta} & \mathbf{M}_{\theta,p} \\ \mathbf{M}_{p,R} & \mathbf{M}_{p,\theta} & \mathbf{M}_{p,p} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

missä $\mathbf{M}_{p,p} = \hat{\mathbf{M}}_d = \mathbf{I}$.

Massamatriisi koostuu yhdeksästä komponentista. Komponenttien alaindeksit viittaavat translaatiokoordinaatteihin (R), rotaatiokoordinaatteihin (θ) ja modaali-koordinaatteihin (p). Osamatriisit muodostuvat ajasta riippuvista ja ajasta riippumattomista termeistä. Ajasta riippumattomia termejä kutsutaan invarianteiksi. Kappaletta i kuvaava yläindeksi on selvyuden vuoksi jätetty pois massamatriisin osion komponenteista. Alaindeksit j ja k tarkoittavat summaa muotojen yli. Massamatriisin komponentit voidaan kirjoittaa muodossa:

$$\mathbf{M}_{R,R} = \int_V \rho \mathbf{I} dV = \mathbf{I}^1 \mathbf{I} \quad (3 \times 3) \quad (3.50)$$

$$\mathbf{M}_{R,\theta} = - \int_V \rho \mathbf{A} (\tilde{\mathbf{u}}_0 + \tilde{\Phi}_t \mathbf{p}) \overline{\mathbf{G}} dV = - \mathbf{A} (\mathbf{I}^2 + \mathbf{I}^3 \mathbf{p}) \overline{\mathbf{G}} \quad (3 \times 4) \quad (3.51)$$

$$\mathbf{M}_{R,p} = \int_V \rho \mathbf{A} \Phi_t dV = \mathbf{A} \mathbf{I}^3 \quad (3 \times n_p) \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\theta,\theta} &= \int_V \rho \overline{\mathbf{G}}^T (\tilde{\mathbf{u}}_0 + \tilde{\Phi}_t \mathbf{p})^T (\tilde{\mathbf{u}}_0 + \tilde{\Phi}_t \mathbf{p}) \overline{\mathbf{G}} dV \quad (4 \times 4) \quad (3.53) \\ &= \overline{\mathbf{G}}^T \left[\mathbf{I}^7 - [\mathbf{I}_j^8 + \mathbf{I}_j^{8,T}] p_j - \mathbf{I}_{i,j}^9 p_j p_k \right] \overline{\mathbf{G}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_{\theta,p} = - \int_V \rho \overline{\mathbf{G}}^T (\tilde{\mathbf{u}}_0 + \tilde{\Phi}_t \mathbf{p})^T \Phi_t dV = \overline{\mathbf{G}}^T [\mathbf{I}^4 + \mathbf{I}_j^5 p_j] \quad (4 \times n_p) \quad (3.54)$$

$$\mathbf{M}_{p,p} = - \int_V \rho \Phi_t^T \Phi_t dV = \mathbf{I}^6 \quad (n_p \times n_p) \quad (3.55)$$

$$\mathbf{M}_{p,R} = \mathbf{M}_{R,p}^T \quad (n_p \times 3) \quad (3.56)$$

$$\mathbf{M}_{\theta,R} = \mathbf{M}_{R,\theta}^T \quad (4 \times 3) \quad (3.57)$$

$$\mathbf{M}_{p,\theta} = \mathbf{M}_{\theta,p}^T \quad (n_p \times 4) \quad (3.58)$$

Komponentit $\mathbf{I}^1 \dots \mathbf{I}^9$ ovat invariantteja. Ajasta riippumattomina niitä ei tarvitse laskea jokaisella aika-askeleella erikseen, riittää että ne lasketaan kerran. Invariantteja

tit voidaan laskea tilavuusintegraaleina tai diskreetissä tapauksessa summina seuraavasti:

Joustavan kappaleen kokonaismassa:

$$\mathbf{I}^1 = \int_V \rho dV \cong \sum_{i=1}^{n_n} m_i \quad (3.59)$$

missä n_n on solmujen lukumäärä.

Ensimmäinen staattinen momentti:

$$\mathbf{I}^2 = \int_V \rho \bar{\mathbf{u}}_0 dV \cong \sum_{i=1}^{n_n} m_i \bar{\mathbf{u}}_0^i \quad (3.60)$$

Painopisteen aseman deformaatiosta johtuva korjaus:

$$\mathbf{I}_j^3 = \int_V \rho \phi_j dV \cong \sum_{i=1}^{n_n} m_i \phi_{i,j} \quad j = 1K n_p \quad (3.61)$$

missä n_p on muotojen lukumäärä

Deformaation ja rotaation kytkentä:

$$\mathbf{I}^4 = \int_V \rho \tilde{\mathbf{u}}_0 \Phi dV \cong \sum_{i=1}^{n_n} m_i \tilde{\mathbf{u}}_0^i \Phi_t^i \quad (3.62)$$

Deformaation ja rotaation kytkennän toisen asteen korjaus:

$$\mathbf{I}_j^5 = \int_V \tilde{\phi}_j \Phi \rho dV \cong \sum_{i=1}^{n_n} m_i \tilde{\phi}_{t,j}^i \Phi_t^i \quad j = 1K n_p \quad (3.63)$$

Joustavan kappaleen modaalimassa:

$$\mathbf{I}^6 = \int_V \rho \Phi^T \Phi dV \cong \sum_{i=1}^{n_n} m_i \Phi_t^{i,T} \Phi_t^i \quad (3.64)$$

Joustavan kappaleen hitausmomentti:

$$\mathbf{I}^7 = \int_V \rho \tilde{\mathbf{u}}_0^T \tilde{\mathbf{u}}_0 dV \cong \sum_{i=1}^{n_n} m_i \tilde{\mathbf{u}}_0^{iT} \tilde{\mathbf{u}}_0^i \quad (3.65)$$

Hitausmomentin ensimmäisen asteen korjaus

$$\mathbf{I}_j^8 = \int_V \rho \tilde{\mathbf{u}}_0^T \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_j dV \cong \sum_{i=1}^{n_n} m_i \tilde{\mathbf{u}}_0^i \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{i,j} \quad j = 1, \mathcal{K}, n_p \quad (3.66)$$

Hitausmomentin toisen asteen korjaus

$$\mathbf{I}_{jk}^9 = \int_V \rho \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_j \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_k dV \cong \sum_{i=1}^{n_n} m_i \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{i,j} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{i,k} \quad j, k = 1, \mathcal{K}, n_p \quad (3.67)$$

Analyysin laskentaa voidaan nopeuttaa asettamalla invariantteja nolliksi, mutta tällöin tulosten tarkkuus heikkenee. Invarianttien nollaus kannattaa aloittaa invarianteista \mathbf{I}^5 ja \mathbf{I}^9 (toisen asteen inertiaikorjaukset), koska ne ovat raskaat laskea, mutta vaikuttavat vähiten laskentatarkkuuteen. (Sopanen 1999 s. 26)

3.7 Yleistetyt voimat

Yleistetyillä voimilla tarkoitetaan voimia, jotka liittyvät systeemin yleistettyihin koordinaatteihin. Yleistettyjen voimien avulla voidaan kappaleen pisteessä vaikuttavat ulkoiset voimat ja momentit kohdistaa kappaleen yleistettyihin koordinaatteihin. Joustavan järjestelmän yleistetty voimavektori saadaan muodostettua soveltamalla virtuaalisen työn periaatetta systeemin tasapainotilaan:

$$\delta W^i = \delta W_s^i + \delta W_e^i \quad (3.68)$$

missä δW^i on kappaleeseen kohdistuvien voimien tekemä virtuaalinen työ

δW_s^i on elastisten voimien tekemä virtuaalinen työ

δW_e^i joustavaan kappaleeseen kohdistuvien ulkoisten voimien tekemä virtuaalinen työ.

Elementtimenetelmän avulla elastisten voimien tekemä virtuaalinen työ voidaan kirjoittaa diskreetissä muodossa:

$$\delta W_s^i = -\delta \mathbf{q}^{i,T} \mathbf{K}^i \mathbf{q}^i \quad (3.69)$$

missä \mathbf{K}^i on kappaleen i jäykkyysmatriisi
 \mathbf{q}^i on kappaleen yleistettyjen koordinaattien vektori.

Joustavan kappaleen jäykkyys liittyy ainoastaan yleistettyihin modaalikoordinaatteihin \mathbf{p}^i , eikä modaalikoordinaateilla ole jäykkyysmatriisissa kytkentää muihin yleistettyihin koordinaatteihin. Näin ollen voidaan yhtälö (3.69) kirjoittaa muodossa:

$$\delta W_s^i = \begin{bmatrix} -\delta \mathbf{R}^{i,T} & -\delta \boldsymbol{\theta}^{i,T} & -\delta \mathbf{p}^{i,T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{K}}_d^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^i \\ \boldsymbol{\theta}^i \\ \mathbf{p}^i \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

missä $\hat{\mathbf{K}}_d$ on elementtimenetelmästä saatu ortogonaalinen jäykkyysmatriisi.

Yhtälö (3.70) voidaan kirjoittaa seuraavassa muodossa:

$$\delta W_s^i = -\delta \mathbf{q}^{i,T} \hat{\mathbf{K}}_d^i \mathbf{p}^i \quad (3.71)$$

Joustavaan jäsenen kohdistuvien ulkoisten voimien tekemä virtuaalinen työ voidaan kirjoittaa muodossa:

$$\delta W_e^i = \mathbf{F}_e^i \delta \mathbf{r}^i = \mathbf{F}_e^i \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial \mathbf{q}^i} \delta \mathbf{q}^i = \mathbf{Q}_e^i \delta \mathbf{q}^i \quad (3.72)$$

missä \mathbf{Q}_e^i on ulkoisista voimista muodostettu yleistetty voimavektori.

Vastaavalla tavalla voidaan kirjoittaa virtuaaliseen työhön δW^i liittyvä yleistetty voimavektori:

$$\delta W^i = \mathbf{Q}^i \delta \mathbf{q}^i \quad (3.73)$$

Sijoittamalla yhtälöt (3.71), (3.72) ja (3.73) alkuperäiseen työn tasapainoyhtälöön (3.68) saadaan järjestelmän yleistettyjen voimien tasapainoyhtälöksi:

$$\mathbf{Q}^i = -\mathbf{K}^i \mathbf{q}^i + \mathbf{Q}_e^i \quad (3.74)$$

Partikkelin P^i virtuaalinen siirtymä voidaan esittää seuraavasti:

$$\delta \mathbf{r}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{A}^i \tilde{\mathbf{u}}_p^i \bar{\mathbf{G}}^i & \mathbf{A}^i \Phi_p^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{R}^i \\ \delta \Theta^i \\ \delta \mathbf{p}^i \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Sijoittamalla partikkelin P^i virtuaalisen siirtymän $\delta \mathbf{r}^i$ yhtälö (3.75) ulkoisten voimien tekemän virtuaalisen työn yhtälöön (3.72) saadaan ulkoisten voimien tekemäksi virtuaaliseksi työksi:

$$\delta W_e^i = \mathbf{F}^i \delta \mathbf{R}_p^i - \mathbf{F}^i \mathbf{A}^i \tilde{\mathbf{u}}_p^i \bar{\mathbf{G}}^i \delta \Theta^i + \mathbf{F}^i \mathbf{A}^i \Phi_p^i \delta \mathbf{p}^i \quad (3.76)$$

Yhtälö (3.76) voidaan esittää muodossa:

$$\delta W_e^i = \mathbf{F}_R^i \delta \mathbf{R}_p^i - \mathbf{F}_\theta^i \delta \Theta^i + \mathbf{F}_p^i \delta \mathbf{p}^i \quad (3.77)$$

$$\text{missä } \mathbf{F}_R^i = \mathbf{F}^i \quad (3.78a)$$

$$\mathbf{F}_\theta^i = -\mathbf{F}^i \mathbf{A}^i \tilde{\mathbf{u}}_p^i \bar{\mathbf{G}}^i \quad (b)$$

$$\mathbf{F}_p^i = \mathbf{F}^i \mathbf{A}^i \Phi^i \quad (c)$$

\mathbf{F}_θ^i kuvaa voimakomponentin siirrosta lokaaliin koordinaatistoon aiheutuvaa momenttivaikutusta. Kappaleeseen vaikuttavien globaalien momenttien \mathbf{T}^i kuvaus yleistetyissä koordinaateissa voidaan esittää seuraavasti:

$$\mathbf{F}_\theta^i = \overline{\mathbf{G}}^{i,T} \mathbf{T}^i \quad (3.79)$$

Vastaavasti lokaalissa koordinaatistossa kuvattujen momenttien kuvaus yleistetyissä koordinaateissa voidaan lausua seuraavasti:

$$\mathbf{F}_\theta^i = \overline{\mathbf{G}}^{i,T} \mathbf{A}^i \overline{\mathbf{T}}^i \quad (3.80)$$

Jos kappaleeseen vaikuttaa useita ulkoisia voimia ja momenteja voidaan yhtälö (3.76) esittää muodossa:

$$\delta W_e^i = (\mathbf{Q}_e^i)_R^T \delta \mathbf{R}_P^i + (\mathbf{Q}_e^i)_\theta^T \delta \boldsymbol{\theta}^i + (\mathbf{Q}_e^i)_p^T \delta \mathbf{p}^i \quad (3.81)$$

missä $(\mathbf{Q}_e^i)_R^T$ on siirtymäkoordinaatteihin liittyvä yleistetty voimavektori

$(\mathbf{Q}_e^i)_\theta^T$ on kiertymäkoordinaatteihin liittyvä yleistetty voimavektori

$(\mathbf{Q}_e^i)_p^T$ on joustavuutta kuvaaviin koordinaatteihin liittyvä yleistetty voimavektori.

Yleistetty voimavektori, ilman elastisten voimien osuutta, koostuu seuraavista komponenteista:

$$(\mathbf{Q}_e^i)_R^T = \sum_{i=1}^{n_F} \mathbf{F}_i^{i,T} \quad (3.82a)$$

$$(\mathbf{Q}_e^i)_\theta^T = \left[\sum_{i=1}^{n_T} \mathbf{T}_i^{i,T} + \sum_{i=1}^{n_T} \mathbf{A} \overline{\mathbf{T}}_i^{i,T} - \sum_{i=1}^{n_F} \mathbf{F}_i^{i,T} \mathbf{A}^i \tilde{\mathbf{u}}_i^i \right] \mathbf{G}^i \quad (b)$$

$$(\mathbf{Q}_e^i)_p^T = \sum_{i=1}^{n_F} \mathbf{F}_i^{i,T} \mathbf{A}^i \boldsymbol{\Phi}^i \quad (c)$$

Kappaleen pyrkimys palautua deformatumattomaan tilaan huomioidaan elastisilla voimilla. Kun elastiset voimat huomioidaan, saadaan yhtälön (3.82c) modaali-koordinaatteihin liittyväksi yleistetyksi voimaksi:

$$\left(\mathbf{Q}_e^i\right)_p^T = \left(\sum_{i=1}^{n_F} \mathbf{F}_i^{i,T} \mathbf{A}^i \Phi^i\right) - \hat{\mathbf{K}}_d \mathbf{p}^i \quad (3.83)$$

(Mikkola, Kerkkänen 2004 s. 28 - 29)

3.8 Nivelrajoitteiden huomioiminen

Monikappaledynamiikassa joustava kappale liittyy muihin järjestelmän kappaleisiin nivelrajoitteiden avulla. Nivel voidaan liittää joustavan kappaleen mielivaltaiseen pisteeseen.

Liikerajoitteiden kuvaamista vaikeuttaa se, että monikappaledynamiikassa ja elementtimenetelmässä rajoitteiden määritelmät ovat erilaiset. Elementtimenetelmässä rajoitteet kuvataan suhteessa liikkumattomaan globaaliin koordinaatistoon, kun taas monikappaledynamiikassa liikerajoitteet kuvaavat kappaleiden liittymistä toisiinsa. (Mikkola, Kerkkänen 2004 s. 15)

Nivelrajoitteet voidaan huomioida sijoittamalla rajoiteyhtälöt suoraan liikeyhtälöihin, jolloin saadaan systeemin vapausasteiden mukainen määrä liikeyhtälöitä. Ongelmaksi muodostuu usein saatujen yhtälöiden voimakas epälineaarisuus ja siitä johtuvat mahdolliset ongelmat numeerisessa ratkaisussa. Tässä työssä käytetään Lagrangen kertoimien menetelmää. Tällöin liikeyhtälöihin täytyy lisätä rajoitteita kuvaava vektori.

Monikappalejärjestelmään kuuluvia niveliä eli rajoiteyhtälöitä voidaan kuvata seuraavasti (Shabana 1998 s. 225):

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (3.84)$$

Liiketyhtälöiden numeerista ratkaisua varten on tarpeen derivoida rajoiteyhtälö kahdesti ajan suhteen. Kun rajoiteyhtälö (3.85) derivoidaan ketjusääntöä soveltaen saadaan:

$$\mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_t = \mathbf{0} \quad (3.85)$$

missä \mathbf{C}_t on rajoitteen aikaderivaatta.

Jos rajoitteet eivät ole ajasta riippuvia, on vektori \mathbf{C}_t nolla. Rajoitteiden toinen derivaatta voidaan vastaavasti ratkaista derivoimalla yhtälö (3.86) käyttäen ketjusääntöä:

$$\left(\mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}}\right)_q \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{t,q} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{q,t} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_q \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{t,t} = 0 \quad (3.86)$$

missä \mathbf{C}_q on rajoiteyhtälöiden Jacobin matriisi, eli rajoiteyhtälöiden osittaisderivaatta yleistettyjen koordinaattien suhteen.

Dynaamisessa analyysissä tarvittava rajoitteiden Jacobin matriisi \mathbf{C}_q koostuu rajoiteyhtälöiden osittaisderivaatoista yleistettyjen koordinaattien suhteen. Jacobin matriisissa ($n_c \times n_q$) on rivejä yhtä monta kuin järjestelmässä on rajoiteyhtälöitä ja sarakkeita yhtä monta kuin järjestelmässä on yleistettyjä koordinaatteja. Dynaamisessa analyysissä on järjestelmässä aina enemmän yleistettyjä koordinaatteja kuin rajoitteita. Yhtälössä (3.87) alaindeksit tarkoittavat osittaisderivaattoja annettujen muuttujien suhteen annetussa järjestyksessä. Rajoiteyhtälöiden Jacobin matriisi on määritelty seuraavasti:

$$\mathbf{C}_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial q_1} & \frac{\partial C_1}{\partial q_2} & \text{L} & \frac{\partial C_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial C_2}{\partial q_1} & \frac{\partial C_2}{\partial q_2} & \text{L} & \frac{\partial C_2}{\partial q_n} \\ \text{M} & \text{M} & & \text{M} \\ \frac{\partial C_n}{\partial q_1} & \frac{\partial C_n}{\partial q_2} & \text{L} & \frac{\partial C_n}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

Ratkaistaan kiihtyvyydet yhtälöstä (3.86):

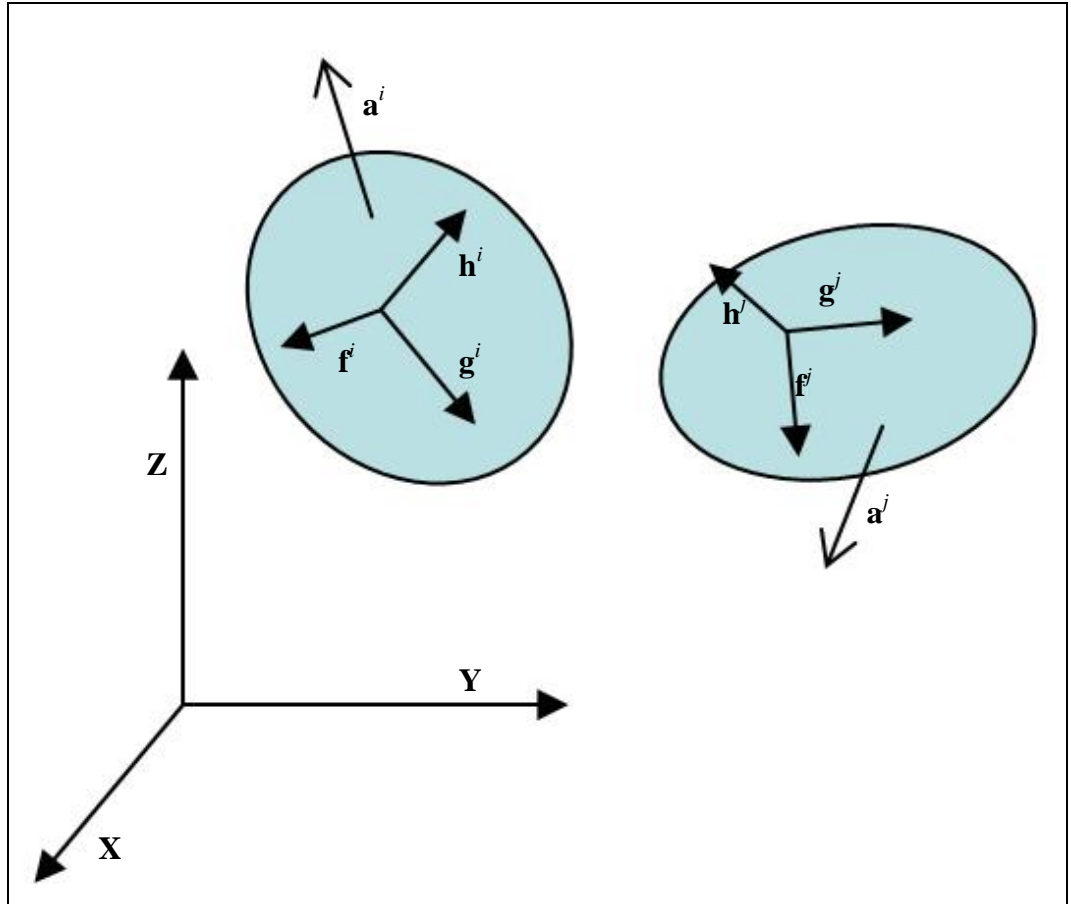
$$\mathbf{C}_q \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_c \quad (3.88)$$

missä $\mathbf{Q}_c = -(\mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}})_q \dot{\mathbf{q}} - 2\mathbf{C}_{q,t} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{C}_{t,t}$ on rajoitevoima. (3.89)

Monikappaledynamiikassa on kolme perusrajoitetta, joita yhdistelemällä voidaan rakentaa kaikki mekanismien käsittelyssä tarvittavat nivelet. Perusrajoitteet ovat:

- Kahden vektorin symmetrinen kohtisuoruus
- Kahden vektorin epäsymmetrinen kohtisuoruus
- Pisteiden yhtenevyys

Kappaleisiin liittyvät nivelet eivät yleisessä tapauksessa sijaitse kappaleen tunnetuissa pisteissä eivätkä edes kappaleen tunnetun koordinaatiston suuntaisesti. Tästä syystä määritellään kappaleeseen nivelkoordinaatisto, jonka suhteen nivel esitetään. Kuvassa 6 on esitetty tunnettujen kappaleiden i ja j tunnettuihin pisteisiin asetetut globaalit vektorit \mathbf{a}^i ja \mathbf{a}^j .



Kuva 6. Kappaleisiin i ja j kiinnitetyt vektorit \mathbf{a}^i ja \mathbf{a}^j .

Vektoreiden \mathbf{a}^i ja \mathbf{a}^j välinen kohtisuoruusrajoite C^{d1} voidaan esittää niiden välisen pistetulon avulla:

$$C^{d1}(\mathbf{a}^i, \mathbf{a}^j) = \mathbf{a}^{i,T} \mathbf{a}^j = 0 \quad (3.90)$$

Kuvaamalla vektorit \mathbf{a}_i ja \mathbf{a}_j kappaleiden lokaaleissa koordinaatistoissa esitettyjen vektoreiden, sekä kiertomatriisin avulla, saadaan kohtisuoruusrajoitteeksi:

$$C^{d1}(\mathbf{a}^i, \mathbf{a}^j) = \bar{\mathbf{a}}^{i,T} \mathbf{A}^{i,T} \bar{\mathbf{a}}^j \mathbf{A}^j = 0 \quad (3.91)$$

Koska rajoite riippuu kummankin kappaleen kiertomatriisista, rajoittaa se kahden kappaleen välisen orientaation. Kohtisuoruusrajoite voidaan kuvata myös käyttämällä kappaleeseen kiinnitettyä vektoria \mathbf{a}_i ja kappaleiden kahta vapaasti valittua

pistettä yhdistävää vektoria $\mathbf{d}^{i,j}$. Oletetaan, että $\mathbf{d}^{i,j}$ ei ole nolla, tällöin saadaan rajoiteyhtälöksi:

$$C^{d2}(\mathbf{a}^i, \mathbf{d}^{i,j}) = \mathbf{a}^{i,T} \mathbf{d}^{i,j} = 0 \quad (3.92)$$

Esittämällä $\mathbf{d}^{i,j}$ yleistettyjen koordinaattien avulla:

$$\mathbf{d}^{i,j} = \mathbf{R}^j + \mathbf{A}^j \bar{\mathbf{u}}_p^j - \mathbf{R}^i - \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}_p^i \quad (3.93)$$

saadaan toiseksi kohtisuoruusrajoitetyypiksi

$$C^{d2}(\mathbf{a}^i, \mathbf{d}^{i,j}) = \bar{\mathbf{a}}^{i,T} \mathbf{A}^{i,T} (\mathbf{R}^j + \mathbf{A}^j \bar{\mathbf{u}}_p^j - \mathbf{R}^i) - \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}_p^i = 0 \quad (3.94)$$

Rajoitteiden C^{d1} ja C^{d2} suurin ero on se, että C^{d2} on epäsymmetrinen. Sovellettaessa rajoitetta kappaleen j suhteen, tapahtuu se vaihtamalla indeksit i ja j keskenään. Rajoite ei ole voimassa, jos $\mathbf{d}^{i,j} = 0$. Rajoitetta C^{d1} käytetään kardaninivelten ja translaationivelten kuvaamisessa. Rajoitetta C^{d2} käytetään monimutkaisempien yhdistettyjen nivelten kuvaamisessa. Kohtisuoruusrajoitteet lisäävät järjestelmään yhden rajoiteyhtälön vaadittua kohtisuoruutta kohden. (Rouvinen 2003 s. 13 – 14) Kahden pisteen yhtenevyys määritellään asettamalla P^i ja P^j yhteneviksi eli asettamalla $\mathbf{d}^{i,j} = 0$. Rajoiteyhtälö voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$C^s(P^i, P^j) = \mathbf{R}^j + \mathbf{A}^j \bar{\mathbf{u}}_p^j - \mathbf{R}^i - \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}_p^i = \mathbf{0} \quad (3.95)$$

Pisteiden yhtenevyyttä tarvitaan pallonivelen, kardaninivelen ja sarananivelen kuvaamisessa. Rajoite lisää järjestelmään kolme rajoiteyhtälöä vaadittua pisteen yhtenevyyttä kohti. (Rouvinen 2003 s. 14)

Kahden nivelkoordinaatiston valitut akselit ovat yhdensuuntaisia, kun toisen koordinaatiston valittu akseli on kohtisuorassa ensimmäisen koordinaatiston kahteen muuhun akseliin. Vaaditaan, että nivelkoordinaatistojen akselit \mathbf{h}^i ja \mathbf{h}^j ovat yhdensuuntaiset. Yhdensuuntaisuus on voimassa vain ja ainoastaan silloin, kun \mathbf{h}^j

on kohtisuorassa vektoreihin \mathbf{f}^i ja \mathbf{g}^i nähden. Kahden vektorin yhdensuuntaisuus voidaan ilmaista yhdistämällä kaksi vektoreiden kohtisuoruusrajoitetta:

$$\mathbf{C}^{p1}(\mathbf{h}^i, \mathbf{h}^j) = \begin{bmatrix} C^{d1}(\mathbf{f}^i, \mathbf{h}^j) \\ C^{d1}(\mathbf{g}^i, \mathbf{h}^j) \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

Vastaavasti voidaan määrittää kappaleeseen kiinnitetyn nivelkoordinaatiston ja kappaleita yhdistävän vektorin yhdensuuntaisuus C^{d2} rajoitteen avulla.

$$\mathbf{C}^{p1}(\mathbf{h}^i, \mathbf{d}^{i,j}) = \begin{bmatrix} C^{d2}(\mathbf{f}^i, \mathbf{d}^{i,j}) \\ C^{d2}(\mathbf{g}^i, \mathbf{d}^{i,j}) \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

Kahden vektorin yhdensuuntaisuutta hyödynnetään mm. liuku- ja sylinterinivelissä. Yhdensuuntausrajoitteet lisäävät järjestelmään kaksi rajoiteyhtälöä yhdensuuntaisuutta kohden. (Rouvinen 2003 s. 15 – 16)

3.9 Liiketyhtälöiden muodostaminen

Lagrangen yhtälö voidaan esittää seuraavasti:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Q} = 0 \quad (3.98)$$

missä $\boldsymbol{\lambda}$ on vektori Lagrangen kertoimista

\mathbf{Q} on yleistettyihin koordinaatteihin vaikuttava voimavektori

T on kineettinen energia.

Järjestelmän liiketyhtälöt saadaan sijoittamalla kineettisen energian lauseke (3.48) sekä yleistetyn voimavektorin lauseke (3.74) Lagrangen yhtälöön (3.98):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} - \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{K}\mathbf{p} - \mathbf{Q}_e = 0 \quad (3.99)$$

Käyttämällä seuraavaa merkintää:

$$\mathbf{Q}_v = -\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} - \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \quad (3.100)$$

saadaan liikeyhtälö muotoon:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{p} + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_v \quad (3.101)$$

Jakamalla yleistetyt koordinaatit referenssikoordinaatiston liikettä ja deformaatiota kuvaaviin koordinaatteihin saadaan yhtälö (3.101) muotoon:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{r,r} & \mathbf{M}_{r,p} \\ \mathbf{M}_{p,p} & \mathbf{M}_{r,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_r \\ \ddot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_r \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_r^T \\ \mathbf{C}_p^T \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_e)_r \\ (\mathbf{Q}_e)_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_v)_r \\ (\mathbf{Q}_v)_p \end{bmatrix}$$

(3.102)

missä \mathbf{q}_r on yleistettyjen koordinaattien vektori ilman modaalikoordinaatteja
 \mathbf{p} on modaalikoordinaattivektori.

Huomioimalla rajoitteet \mathbf{Q}_c saadaan liikeyhtälö muotoiltua numeeriseen ratkaisuun sopivaksi:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{r,r} & \mathbf{M}_{r,p} & \mathbf{C}_r^T \\ & \mathbf{M}_{p,p} & \mathbf{C}_p^T \\ sym & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_r \\ \ddot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_e)_r + (\mathbf{Q}_v)_r \\ (\mathbf{Q}_e)_p + (\mathbf{Q}_v)_p - \mathbf{K}\mathbf{p} \\ \mathbf{Q}_c \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

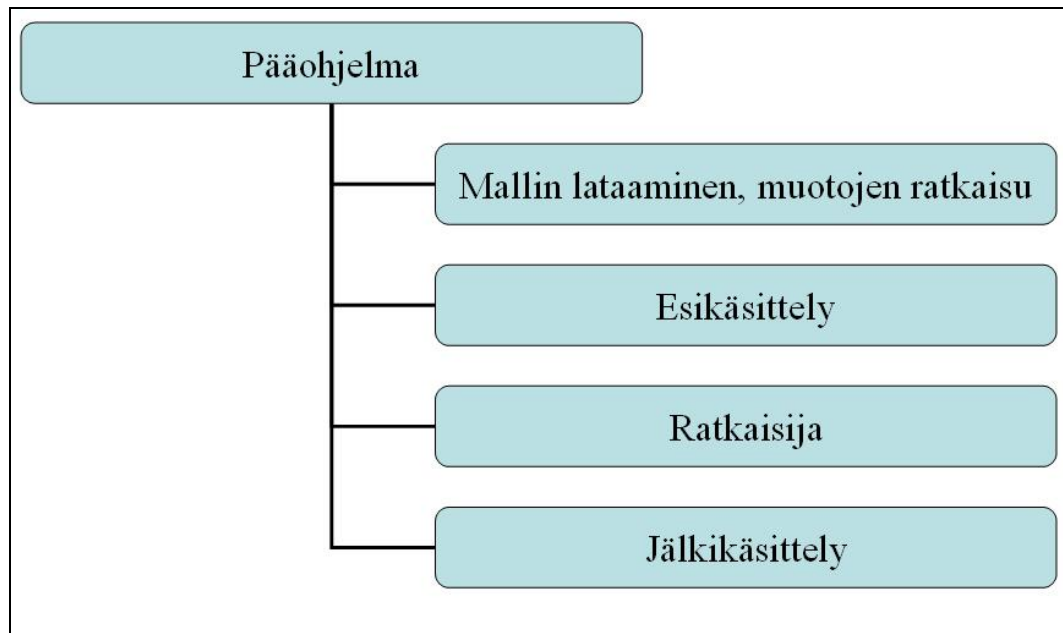
Liikeyhtälö voidaan vielä muokata siten, että ratkaistavaksi jäävät tuntemattomat kiihtyvyydet ja Lagrangen kertoimet:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_r \\ \mathbf{p} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{r,r} & \mathbf{M}_{r,p} & \mathbf{C}_r^T \\ & \mathbf{M}_{p,p} & \mathbf{C}_p^T \\ \text{sym} & & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_e)_r + (\mathbf{Q}_v)_r \\ (\mathbf{Q}_e)_p + (\mathbf{Q}_v)_p - \mathbf{Kp} \\ \mathbf{Q}_c \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

(Mikkola, Kerkkänen 2004 s. 30 – 31)

4 OHJELMAN ESITTELY

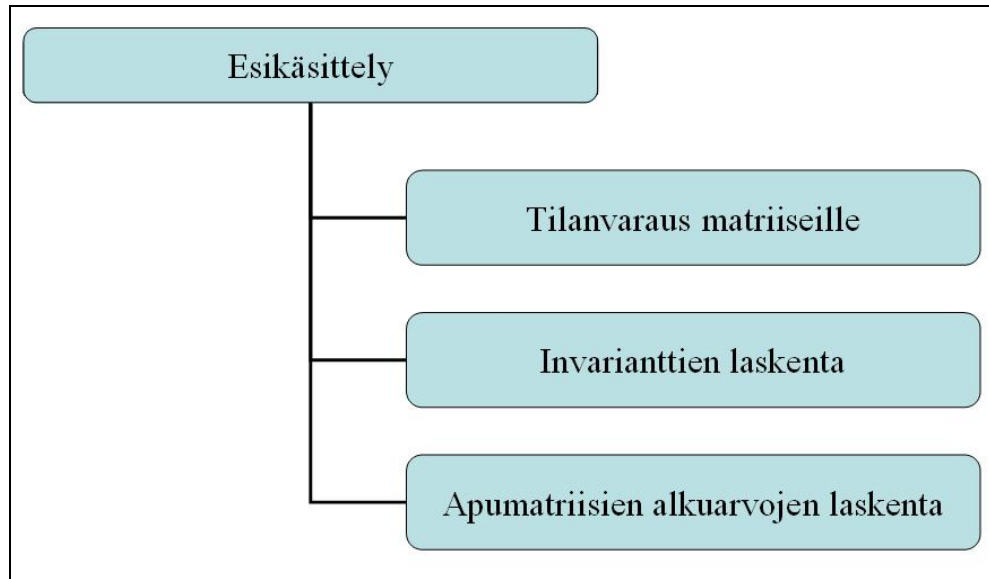
Matlab-ympäristöön tehty simulointiohjelma käynnistetään kutsumalla pääohjelmaa. Pääohjelma hakee mallin, kutsuu esikäsittelyn ja ratkaisijan. Lopuksi pääohjelma välittää ratkaisijalta saadut tulokset jälkikäsittelyyn. Kuvassa 7 on esitetty pääohjelman rakenne.



Kuva 7. Pääohjelman rakenne.

Pääohjelma kutsuu tiedostoa, joka sisältää mallin. Nyt esitellyssä versiossa käyttäjä tekee mallin tiedostoon kirjoittaen mallin alkutiedot matriiseihin. Menettely on hankala ja tuottaa paljon virheitä. Tulevana kehityskohteena on mallin muodostamisen automatisointi.

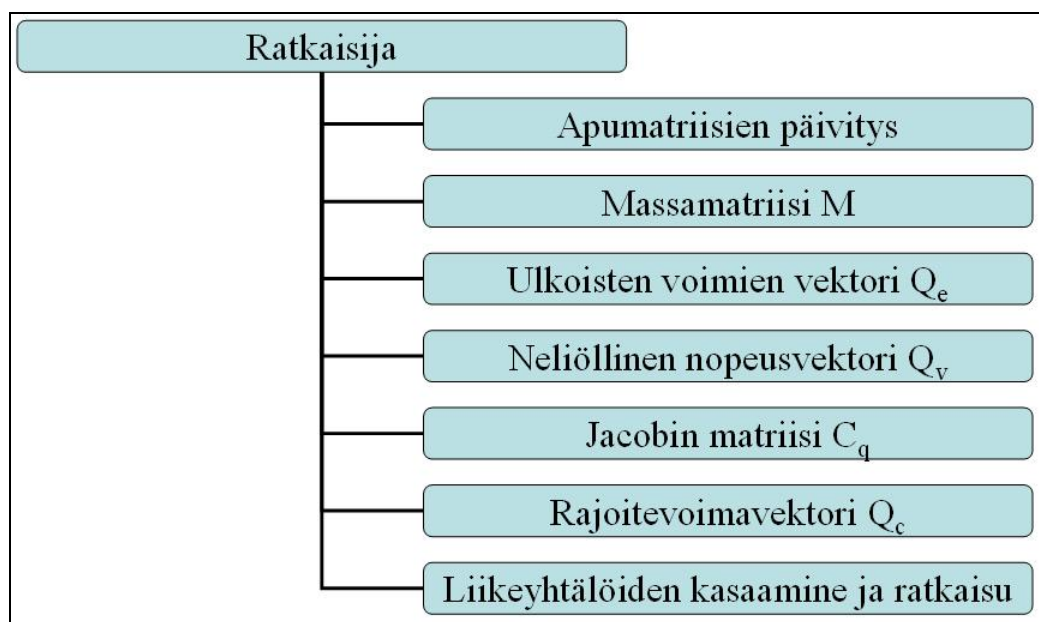
Esikäsittelyssä lasketaan simuloinnin aikana tarvittavien matriisien alkuarvot ja niiden muuttujien arvot, jotka ovat simuloinnin ajan vakioita. Kuvassa 8 on esitelty esikäsittelyn rakenne.



Kuva 8. Esikäsittelyn rakenne.

Esikäsittely jakautuu muistinvaraukseen, invarianttien laskentaan ja matriisien alkuarvojen laskentaan. Esikäsittelyssä koostetaan myös yleistettyjen koordinaattien ja niiden nopeuksien vektori alkuarvoksi numeeriselle integraattorille.

Ratkaisijassa koostetaan liikeyhtälössä tarvittavat järjestelmän matriisit ja vektorit, kuten massamatriisi, neliöllinen nopeusvektori ja ulkoisten voimien vektori. Kuvassa 9 on esitetty ratkaisijan rakenne.



Kuva 9. Ratkaisijan rakenne.

Liikesyhtälöiden numeerisena ratkaisijana ei toistaiseksi ole muita vaihtoehtoja kuin neljännen kertaluvun Runge-Kutta. Liikesyhtälö tulee työssä esitetyllä tavalla muodostettuna olemaan toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, joka palautetaan kahdeksi ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöksi ennen ratkaisua. Tämä tapahtuu asettamalla yleistettyjen koordinaattien ja niiden nopeuksien vektori samaan vektoriin seuraavasti:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Nyt voidaan yleistettyjen koordinaattien nopeudet ja kiihtyvyydet esittää seuraavasti:

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Ajan hetkellä $t = t(a)$ vektori $\dot{\mathbf{y}}(a)$ voidaan integroida numeerisesti siten, että saadaan $\mathbf{y}(a+1)$, missä $t(a+1) = t(a) + \Delta t$:

$$\dot{\mathbf{y}}(a) \rightarrow \mathbf{y}(a+1) \quad (4.3)$$

Integrointi vaatii vektoreille \mathbf{q} ja $\dot{\mathbf{q}}$ alkuarvot. (Nikravesh 1988 s. 254)

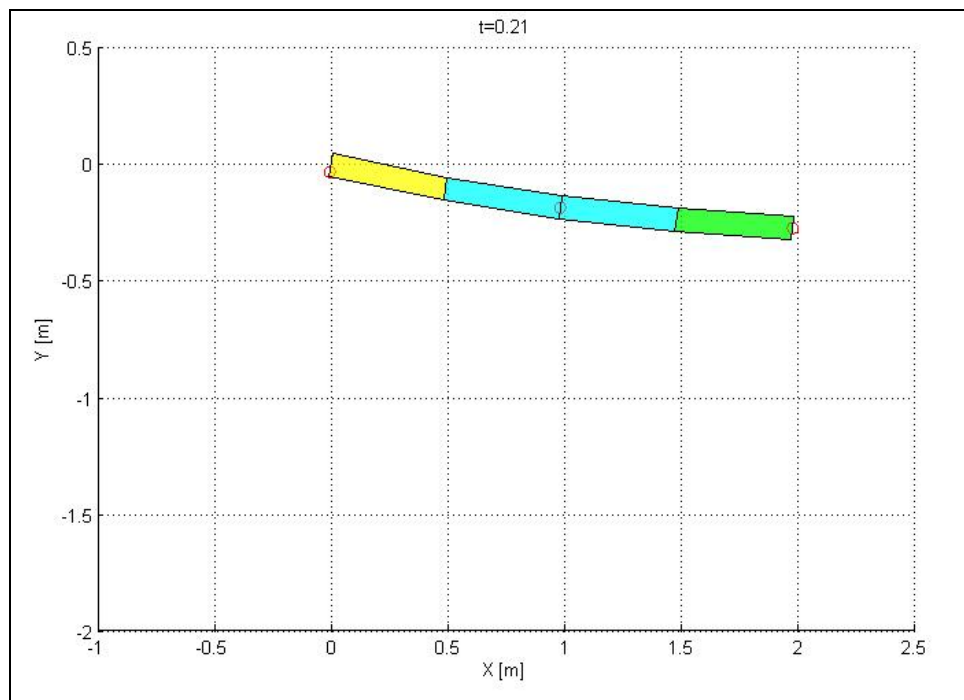
Esitelty ohjelma palauttaa jälkikäsitteeseen yleistetyt koordinaatit ja niiden nopeudet kaikilta aika-askelilta. Niiden tietojen perusteella voidaan laskea tarvittavat suureet jälkikäsitteeseen. Ohjelman esitellyssä versiossa ei jälkikäsitteessä tehdä muuta kuin visualisoidaan simulointi ja poimitaan halutun pisteen koordinaatit kaikilta aika-askelilta mallin verifiointia varten.

5 NUMEERINEN ESIMERKKI

Työssä tehdyn rakenteellisen jouston huomioivan simulointiohjelman toiminta varmennetaan vertaamalla simulointituloksia kaupalliseen simulointiohjelmistoon. Kaupallisena simulointiohjelmistona on käytetty MSC.Adams:in versiota 2005r2. Heilurista tehtiin elementtimalli, josta ratkaistiin Craig-Bampton-muodot kaupallisella elementtimenetelmän ohjelmistolla (Ansys 8.1). Ansys-ohjelman makrokielellä kirjoitettu koodi elementtimallin muodostamiseksi ja muotojen laskemiseksi on esitetty liitteessä 1.

5.1 Heiluri

Esimerkkijärjestelmänä työssä mallinettiin heiluri, joka oli kiinnitettynä globaaliin koordinaatistoon pallonivelellä. Kuvassa 10 on esitetty Matlab-visualisointi heilurin simuloinnista. Heilurin tiheys $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ ja kimmokerroin $E = 2,08 \cdot 10^8 \text{ Pa}$. Heilurin mallintamiseen käytettiin kaksisolmuisia, kahdentoista vapausasteen kolmiulotteisia palkkielementtejä. Muotojen laskennassa käytetyssä elementtimallissa oli neljä elementtiä. Elementit jaettiin tasan heilurin pituudelle. Elementtijako on esitetty kuvassa 10.



Kuva 10. Elementtijako heilurin Matlab-visualisoinnissa.

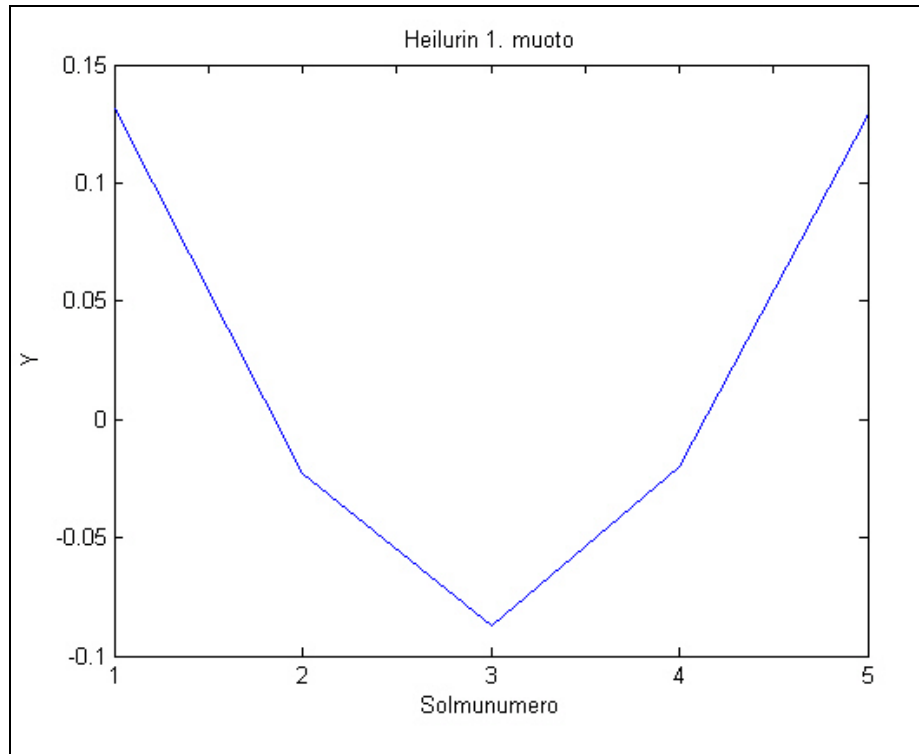
5.1.1 Heilurin lähtötiedot

Heilurin mallintamisessa käytetyllä 3D-palkkielementillä ei ole hitautta pituusakselinsa ympäri, sillä elementin molemmat solmut ovat samalla viivalla. Muotojen laskeminen ei onnistu mallista, jonka hitaus jonkun akselin ympäri on nolla. Ongelma on tässä työssä kierretty poikkeuttamalla yhtä solmua 0,01 mm muiden solmujen määrittämältä viivalta. Poikkeutus aiheuttaa sen, että lopullisen elementtimallin hitaus ei ole nolla minkään akselin ympäri ja muotojen laskeminen on mahdollista. Taulukossa 1 on esitetty lähtötiedot järjestelmälle.

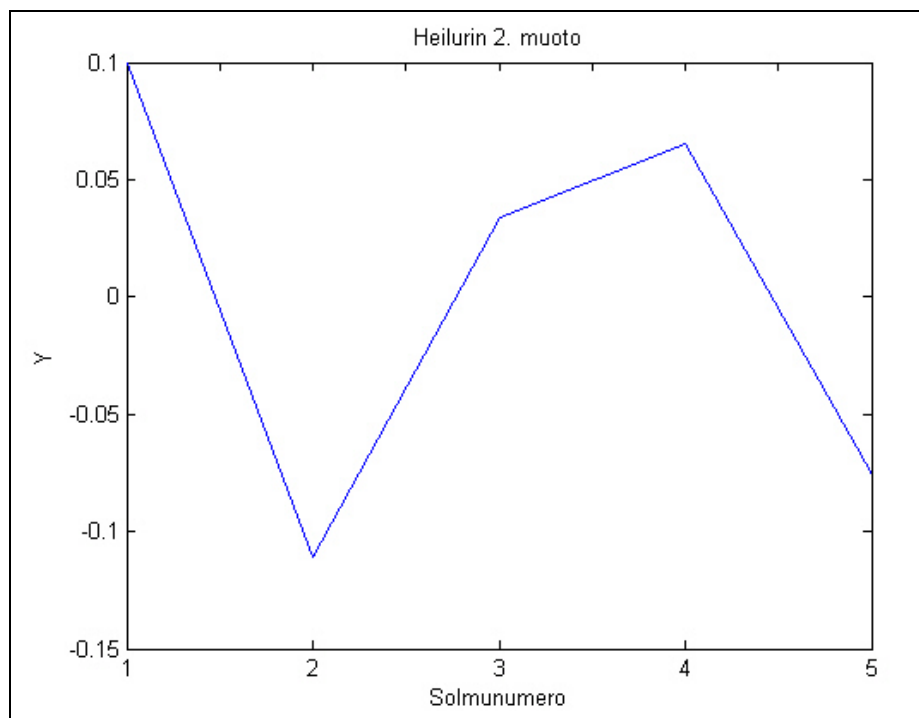
Taulukko 1. Heilurin lähtötiedot

Pituus (elementin x-koordinaatti)	2,0 [m]
Poikkipinnan korkeus (elem. y-koord.)	0,1 [m]
Poikkipinnan leveys (elem. z-koord.)	0,1 [m]
Kimmokerroin	$2,08 \cdot 10^8$ [Pa]
Tiheys	7850 [kg/m ³]
Muodon 1. ominaistajuus	3,5306262013 [Hz]
Muodon 2. ominaistajuus	14,6039279966 [Hz]

Heilurin joustavuutta kuvattiin kahdella Craig-Bampton-muodolla (Craig, Bamton 1968), jotka on esitetty kuvissa 11 ja 12.



Kuva 11. Heilurin ensimmäinen muoto. Taajuus 3,53 Hz.



Kuva 12. Heilurin toinen muoto. Taajuus 14,06 Hz.

Kuvista 11 ja 12 nähdään, että heilurin muotoina käytetään vain yhdessä tasossa olevia muotoja.

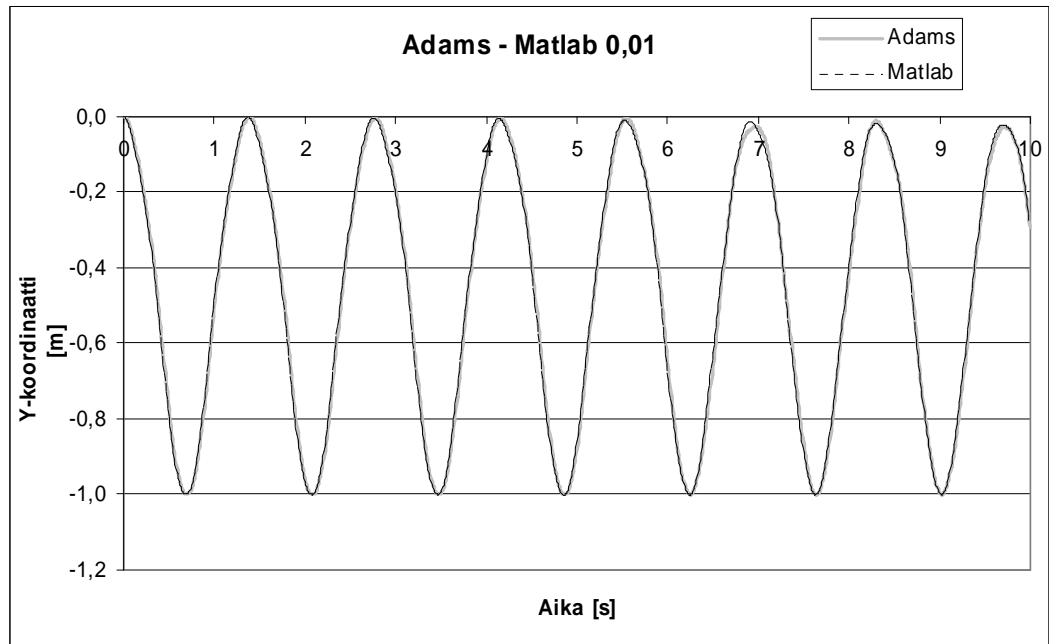
Heilurin muodot on esitetty numeerisessa muodossa taulukossa 2.

Taulukko 2. Numeerinen esitys käytetyistä muodoista.

Solmu	Vapausaste	Muoto 1.	Muoto 2.
1	x translaatio	-3,85208E-06	3,95681E-06
	y translaatio	0,131667092	0,099867928
	z translaatio	0	0
	x rotaatio	0	0
	y rotaatio	0	0
	z rotaatio	-0,336220543	-1,241869937
	2	x translaatio	-3,78477E-06
y translaatio		-0,023031338	-0,110643051
z translaatio		0	0
x rotaatio		0	0
y rotaatio		0	0
z rotaatio		-0,245333069	0,145251329
3		x translaatio	-3,7178E-06
	y translaatio	-0,087024389	0,033526027
	z translaatio	0	0
	x rotaatio	0	0
	y rotaatio	0	0
	z rotaatio	0,005403929	0,262813214
	4	x translaatio	-3,6515E-06
y translaatio		-0,020191389	0,065141232
z translaatio		0	0
x rotaatio		0	0
y rotaatio		0	0
z rotaatio		0,240757044	-0,14179849
5		x translaatio	2,61602E-05
	y translaatio	0,128827139	-0,075916347
	z translaatio	0	0
	x rotaatio	0	0
	y rotaatio	0	0
	z rotaatio	0,326677061	-0,35227349

5.1.2 Simuloinnin tulokset

Vertailutuloksina on käytetty heilurin keskisolmun globaalia y-koordinaattia, joka sisältää jäykän kappaleen liikkeen ja deformaation. Kuvassa 13 on esitetty heilurin keskisolmun globaali y-asema. Molemmassa simuloinneissa on käytetty 0,01 s aika-askelta. Järjestelmässä ei ole vaimennusta.



Kuva 13. Keskisolmun globaali y-koordinaatti 10 sekunnin simuloinnissa.

Kuvasta 13 nähdään, että kuvan piirtotarkkuudella alkavat vasteiden erot näkyä n. seitsemännellä sekunnilla. Kuvaajista nähdään myös, että järjestelmästä häviää integroinnissa tapahtuvan virheen vuoksi potentiaalienergiaa.

Liitteessä 2 on esitetty keskisolmun globaali y-koordinaatti MSC.Adamsilla ja työssä tehdyllä ohjelmalla ratkaistuna, sekä asemien ero.

Käytettäessä 0,01 s aika-askelta Matlab-simuloinnissa on y-koordinaatin ero ensimmäisen sekunnin aikana suurimmillaan 253 μm . Lyhennettäessä aika-askelta yhteen millisekuntiin laskee suurimman eron arvo ensimmäisellä sekunnilla 16,3 μm :in.

Matlab-ratkaisun tulokset lähestyvät vertailutuloksia aika-askelta lyhennettäessä. Ero johtuu kaupallisen ohjelman tarkemmasta integroinnista ja numeerisen ratkaisun stabiloinnista. Molempien simulointien numeerisena ratkaisijana käytettiin neljännen kertaluvun Runge-Kutta-integraattoria.

6 JOHTOPÄÄTÖKSET

Työn tavoitteena oli kirjoittaa Matlab-ympäristöön kelluvan koordinaatiston menetelmää käyttävä monikappaledynamiikan simulointiohjelma. Koodin toimivuutta verifioitiin vertaamalla kirjoitetun ohjelman ja kaupallisen simulointiohjelman simulointituloksia toisiinsa. Esitetyn esimerkin perusteella voidaan todeta, että Matlab-ympäristössä tehty koodi käyttää kelluvan koordinaatiston menetelmää oikein. Sekä joustavuus että referenssikoordinaatiston liike tulee huomioiduksi oikein. Referenssikoordinaatiston liikkeen oikeellisuus voidaan päätellä siitä, että referenssivasteen ja testattavan ohjelman vasteissa ei ole vaihe-eroa.

Työssä ei ole kiinnitetty mitään huomiota ohjelman ajonopeuteen, eikä stabilointiin. Reaaliaikaisuusvaatimus ei ole mahdollista mielekkäästi toteuttaa Matlab-ympäristössä ja reaaliaikaisuuden saavuttamiseksi tuleekin työssä kirjoitettu ohjelma siirtää C-kielelle. Stabiloinnin puuttuminen aiheuttaa sen, että pitkissä simuloinneissa numeerinen virhe voi kumuloitua, eivätkä tulokset vastaa todellisuutta. Tämän vuoksi tulee stabilointimenetelmiä lisätä C-kieliseen ohjelmaan tulevissa versioissa. C-kielistä ohjelmaa tapauskohtaisesti soveltaen on mahdollista saada usean kappaleen järjestelmä toimimaan reaaliaikaisesti. Tapauskohtainen soveltaminen tarkoittaa tässä yhteydessä mm. liikeyhtälön muodon valintaa, integraattorin ja stabilointimenetelmän valintaa, sopivien muotojen valintaa ja valitsemalla osa järjestelmän kappaleista jäykiksi.

Ohjelman laskentatehokkuutta voidaan kehittää siirtämällä laskentarutiineista kaikki ajan suhteen muuttumattomat komponentit esikäsittelyyn. Myös liikeyhtälön integroitavien muuttujien määrää vähentämällä saadaan koodin ratkaisu nopeammaksi. Eräs tapa vähentää integroitavia muuttujia on käyttää kappaleen globaaleja kulmanopeuksia Eulerin parametrien nopeuksien sijasta. Muutos vähentää yhden muuttujan jokaista kappaletta kohti lopullisesta liikeyhtälöstä.

Työssä tehdyn simulointiohjelman käyttämistä haittaa se, että käyttäjän pitää määrittellä elementtimalli, josta muodot lasketaan ja joka toimii mallin geometrian pohjan, käsin tekstitiedostoon. Elementtimallin määrittelemisen matriisiin ele-

mentti kerrallaan on työlästä ja virhealtista. Eräs seuraavista kehitysaskelista onkin lisätä ohjelmaan tuki jollekin tunnetulle tiedostoformaatille, jolla elementtimalli ja muodot saadaan automaattisesti siirrettyä elementtimenetelmän ohjelmasta simulointiohjelmaan. Myös nivelten, ulkoisten voimien ja muiden lähtötietojen määrittelyyn tulee tehdä oma käyttöliittymänsä, sillä suoraan tekstimuotoiseen tiedostoon kirjoitettaessa ei lähtötiedon oikeellisuutta tarkasteta ennen ohjelman ajoa.

LÄHTEET

Agrawal, O., Shabana, A. 1984. Dynamic Analysis of Multibody Systems Using Component Modes. *Component & Structures*, **21**(6), s. 1303 - 1312.

Bayo, E., Garcia de Jalon, J. 1993. *Kinematic and Dynamics Simulation of Multibody Systems: The Real-Time Challenge*. New York: Springer-Verlag, 440 s. ISBN 0-387-94096-0

Craig, R., Bampton, M. 1968. Coupling of Substructures for Dynamic Analyses. *AIAA Journal*, **6**(7), s. 1313 - 1319.

Mikkola, A. 1997. *Studies on Fatigue Damage in a Hydraulically Driven Boom System Using Virtual Prototype Simulations*. Ph.D. thesis, LTKK, tieteellinen julkaisu 61, 80 s. ISBN 951-764-173-7.

Mikkola, A. 2002. *Koneen simuloinnin työkurssin luentokalvot*. Lappeenrannan teknillinen yliopisto, konetekniikan osasto. Viitattu [1.7.2006] Saatavissa: <http://www2.lut.fi/kote/kurssit/2082/materiaali/index.html>

Mikkola, A., Kerkkänen, K. 2004. *Kelluvan koordinaatiston menetelmä monikapaledynamiikassa*. LTY, tutkimusraportti, 38 s. ISBN 951-764-885-5

Nikravesh, P. 1988. *Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems*. Prentice Hall, 370 s. ISBN 0-13-164220-0 025.

Ottarsson, G. 1998. Appendix D. Theoretical Background. *Mechanical Dynamics*, Inc.2000. MSC.Adams Online Help.

Real-Time Encyclopedia [verkkosivu]. [Viitattu 6.7.2006]. Saatavissa: <http://www.realtime-info.be/encyc/techno/terms/defini/def.htm>

Rouvinen, A. 2003. Mekanismien dynamiikan simuloinnissa sovellettavia numeerisia- ja mallinnusmenetelmiä. LTY, tutkimusraportti, 62 s. ISBN 951-764-797-2

Salmi, T. 1997. Dynamiikka 2. Kinetiikka, Teoriaa ja esimerkkejä. Pressus Oy, 312 s. ISBN 952-9835-24-8.

Shabana, A. 1996. Resonance Conditions and Deformable body Co-ordinate Systems. *Journal of Sound and Vibration*, **192**(1), s. 389 - 398.

Shabana, A. 1997a. Definition of the Slopes and the Finite Element Absolute Nodal Coordinate Formulation. *Multibody System Dynamics*, **1**(3), s. 339 - 348. ISSN 1384-5640.

Shabana, A. 1997b. Flexible Multibody Dynamics: Review of Past and Recent Developments. *Multibody System Dynamics*, **1**(2), s. 189 - 222. ISSN 1384-5640.

Shabana, A. 1998. *Dynamics of Multibody Systems*. Second Edition. Cambridge University Press, 372 s. ISBN 0-521-59446-4.

Shabana, A., Mikkola, A. 2003. On the Use of the Degenerate Plate and the Absolute Nodal Co-ordinate Formulations in Multibody System Applications. *Journal of Sound and Vibration*, **259**(2), s. 481 - 489.

Sopanen, J. 1999. Virtuaaliprototyypin käyttö roottorin dynamiikan analysoinnissa. Diplomityö, LTKK, 64 s.

LIITTEET

Liite 1. Ansys-makro heilurin muotojen laskentaa varten.

Liite 2. Heilurin simulointitulosten vertailutaulukko keskipisteen y-koordinaatille.

LIITE 1. Ansys-makro heilurin muodostamiseksi ja Craig-Bampton-muotojen las-
kemiseksi.

```
!! palkkielementeillä tehty heiluri  
!! Tuomas Rantalainen  
!!  
!! Referenssipalkki matlab-koodin verifiointia varten
```

FINISH

```
/clear
```

```
/fil,vertailupalkki      ! filename
```

```
/prep7
```

```
L=2.0                ! palkin pituus  
B=0.1                ! palkin leveys  
H=0.1                ! palkin korkeus  
A=B*H                ! ala  
Izz=(B*H**3)/12     ! neliömomentti z ympäri  
Iyy=(H*B**3)/12     ! neliömomentti y ympäri  
E=2.07E+8           ! kimmomoduuli  
rho=7850             ! tiheys  
nyy=0.3              ! poissonin vakio  
pl=0.00001          ! pieni luku
```

```
!***MATERIAALIT*****
```

```
UIMP,1,ex,nuxy,dens,E,nyy,rho  ! vetelä teräs
```

```
!Table 4.1 BEAM4 Real Constants
```

```
!No. Name Description
```

```
!1 AREA Cross-sectional area
```

```
!2 IZZ Area moment of inertia
```

```
!3 IYY Area moment of inertia
```

```
!4 TKZ Thickness along Z axis
```

```
!5 TKY Thickness along Y axis
```

```
!6 THETA Orientation about X axis
```

```
!7 ISTRN Initial strain
```

```
!8 IXX Torsional moment of inertia
```

```
!9 SHEARZ Shear deflection constant Z [1]
```

```
!10 SHEARY Shear deflection constant Y [2]
```

```
!11 SPIN Rotational frequency (required if KEYOPT(7) = 1)
```

```
!12 ADDMAS Added mass/unit length
```

```
ROT = 0                ! initial orientation about x- axis
```

(jatkuu)

(liite 1 jatkoa)

Ixx = 0.166667E-3

! vääntöneliömomentti

! ELEMENTTITYYPIT

ET,1,BEAM4

! 3d-palkkielementti, 6dof

R,1,A,Izz,Iyy,B,H,ROT,0,Ixx

! B = paksuus z-suunnassa

! H = korkeus y-suunnassa

! keypointit puomin akselia pitkin

K,1,0,0,0

K,2,0.5,0,0

K,3,1.0,0,0

K,4,1.5,0,0

K,5,2.0,-pl,0

! viivat

L,1,2

L,2,3

L,3,4

L,4,5

! elementtijako

esize,,1,

! yksi elementti viivaa kohti

! verkotus

lmesh,1,4

! verkota viivat yhdestä neljään

/eshape,1! näytä elementin muoto (poikkipinta)

eplot

/VIEW,1,1,2,3

! käännetään kuvakulmaa

/ANG,1

/REP,FAST

lumpm,on

! lumped mass

/solu

/units,user,1

! yksikkönä [m, kg, s]

NSEL,S,NODE,,1,1,,

! valitaan pääty ulkoiseksi vapausasteeksi

ADAMS,4,0,0

! ratkaistaan 6+4 alinta muotoa

/eof

LIITE 2. Heilurin simulointitulosten vertailutaulukko keskipisteen y-koordinaatille. Suurimmat erot on korostettu.

aika	0,01 s			0,001 s			0,0001 s		
	Adams [m]	Matlab [m]	ero [μm]	Matlab [m]	ero [μm]	Matlab [m]	ero [μm]		
0	0,0000	0,0000	0,0	0,0000	0,0	0,0000	0,0		
0,01	-0,0005	-0,0005	0,5	-0,0005	0,0	-0,0005	0,0		
0,02	-0,0021	-0,0021	6,5	-0,0021	0,0	-0,0021	0,0		
0,03	-0,0047	-0,0047	12,2	-0,0047	0,0	-0,0047	0,0		
0,04	-0,0085	-0,0085	9,2	-0,0085	0,1	-0,0085	0,1		
0,05	-0,0133	-0,0133	4,9	-0,0133	0,1	-0,0133	0,1		
0,06	-0,0192	-0,0192	22,1	-0,0192	0,1	-0,0192	0,1		
0,07	-0,0260	-0,0260	28,9	-0,0260	0,1	-0,0260	0,1		
0,08	-0,0336	-0,0336	15,9	-0,0336	0,3	-0,0336	0,3		
0,09	-0,0419	-0,0419	11,8	-0,0419	0,3	-0,0419	0,3		
0,1	-0,0509	-0,0509	36,8	-0,0509	0,1	-0,0509	0,1		
0,11	-0,0606	-0,0606	39,6	-0,0606	0,2	-0,0606	0,2		
0,12	-0,0709	-0,0709	13,5	-0,0709	0,4	-0,0709	0,4		
0,13	-0,0819	-0,0819	28,0	-0,0819	0,4	-0,0819	0,4		
0,14	-0,0934	-0,0934	57,9	-0,0934	0,0	-0,0934	0,0		
0,15	-0,1053	-0,1053	53,0	-0,1053	0,4	-0,1053	0,4		
0,16	-0,1175	-0,1175	12,2	-0,1175	0,6	-0,1175	0,6		
0,17	-0,1300	-0,1300	41,5	-0,1300	0,4	-0,1300	0,4		
0,18	-0,1428	-0,1428	72,8	-0,1428	0,1	-0,1428	0,1		
0,19	-0,1559	-0,1559	56,7	-0,1559	0,5	-0,1559	0,5		
0,2	-0,1694	-0,1694	1,2	-0,1694	0,7	-0,1694	0,7		
0,21	-0,1833	-0,1833	61,3	-0,1833	0,4	-0,1833	0,4		
0,22	-0,1975	-0,1974	87,8	-0,1975	0,2	-0,1975	0,2		
0,23	-0,2119	-0,2119	56,6	-0,2119	0,7	-0,2119	0,7		
0,24	-0,2265	-0,2265	16,0	-0,2265	0,8	-0,2265	0,8		
0,25	-0,2415	-0,2415	84,7	-0,2415	0,4	-0,2415	0,4		
0,26	-0,2570	-0,2570	104,3	-0,2570	0,4	-0,2570	0,4		
0,27	-0,2729	-0,2729	57,1	-0,2729	0,8	-0,2729	0,8		
0,28	-0,2895	-0,2895	27,5	-0,2895	0,9	-0,2895	0,9		
0,29	-0,3066	-0,3066	96,9	-0,3066	0,3	-0,3066	0,3		
0,3	-0,3242	-0,3242	104,1	-0,3242	0,6	-0,3242	0,6		
0,31	-0,3425	-0,3425	40,3	-0,3425	1,1	-0,3425	1,1		
0,32	-0,3612	-0,3612	55,8	-0,3612	0,9	-0,3612	0,9		
0,33	-0,3807	-0,3807	121,7	-0,3807	0,2	-0,3807	0,2		
0,34	-0,4008	-0,4008	113,4	-0,4008	0,8	-0,4008	0,8		
0,35	-0,4216	-0,4216	31,8	-0,4216	1,2	-0,4216	1,2		
0,36	-0,4432	-0,4432	71,1	-0,4432	0,9	-0,4432	0,9		
0,37	-0,4654	-0,4654	129,7	-0,4654	0,0	-0,4654	0,0		
0,38	-0,4881	-0,4881	104,6	-0,4881	0,9	-0,4881	0,9		
0,39	-0,5112	-0,5112	11,2	-0,5112	1,3	-0,5112	1,3		
0,4	-0,5348	-0,5348	91,7	-0,5348	0,7	-0,5348	0,7		
0,41	-0,5587	-0,5587	135,3	-0,5587	0,2	-0,5587	0,2		
0,42	-0,5829	-0,5829	91,1	-0,5829	1,0	-0,5829	1,0		
0,43	-0,6074	-0,6074	12,8	-0,6074	1,2	-0,6074	1,2		
0,44	-0,6319	-0,6319	111,1	-0,6319	0,6	-0,6319	0,6		
0,45	-0,6565	-0,6564	139,6	-0,6565	0,4	-0,6565	0,4		

(jatkuu)

(liite 2 jatkoa)

aika	0,01 s			0,001 s			0,0001 s		
	Adams [m]	Matlab [m]	ero [μm]	Matlab [m]	ero [μm]	Matlab [m]	ero [μm]		
0,46	-0,6808	-0,6807	81,9	-0,6808	1,2	-0,6808	1,2		
0,47	-0,7047	-0,7047	24,4	-0,7047	1,1	-0,7047	1,1		
0,48	-0,7282	-0,7282	109,9	-0,7282	0,4	-0,7282	0,4		
0,49	-0,7513	-0,7513	119,3	-0,7513	0,5	-0,7513	0,5		
0,5	-0,7737	-0,7737	51,2	-0,7737	1,1	-0,7737	1,1		
0,51	-0,7955	-0,7955	49,4	-0,7955	1,0	-0,7955	1,0		
0,52	-0,8165	-0,8165	117,1	-0,8165	0,2	-0,8165	0,2		
0,53	-0,8365	-0,8365	110,3	-0,8365	0,7	-0,8365	0,7		
0,54	-0,8555	-0,8555	36,9	-0,8555	1,0	-0,8555	1,0		
0,55	-0,8735	-0,8735	50,7	-0,8735	0,8	-0,8735	0,8		
0,56	-0,8903	-0,8903	98,4	-0,8903	0,1	-0,8903	0,1		
0,57	-0,9059	-0,9059	80,1	-0,9059	0,6	-0,9059	0,6		
0,58	-0,9204	-0,9204	13,7	-0,9204	0,8	-0,9204	0,8		
0,59	-0,9338	-0,9338	52,7	-0,9338	0,5	-0,9338	0,5		
0,6	-0,9459	-0,9458	77,9	-0,9459	0,1	-0,9459	0,1		
0,61	-0,9567	-0,9567	52,7	-0,9567	0,6	-0,9567	0,6		
0,62	-0,9663	-0,9663	0,3	-0,9663	0,6	-0,9663	0,6		
0,63	-0,9746	-0,9747	42,9	-0,9746	0,3	-0,9746	0,3		
0,64	-0,9818	-0,9818	50,7	-0,9818	0,1	-0,9818	0,1		
0,65	-0,9878	-0,9878	26,9	-0,9878	0,3	-0,9878	0,3		
0,66	-0,9926	-0,9926	3,4	-0,9926	0,2	-0,9926	0,2		
0,67	-0,9962	-0,9962	18,3	-0,9962	0,0	-0,9962	0,0		
0,68	-0,9986	-0,9986	13,3	-0,9986	0,1	-0,9986	0,1		
0,69	-0,9998	-0,9998	1,7	-0,9998	0,0	-0,9998	0,0		
0,7	-0,9999	-0,9999	1,6	-0,9999	0,0	-0,9999	0,0		
0,71	-0,9988	-0,9988	14,2	-0,9988	0,0	-0,9988	0,0		
0,72	-0,9964	-0,9964	25,0	-0,9964	0,2	-0,9964	0,2		
0,73	-0,9929	-0,9929	14,0	-0,9929	0,3	-0,9929	0,3		
0,74	-0,9881	-0,9881	18,6	-0,9881	0,4	-0,9881	0,4		
0,75	-0,9820	-0,9820	53,7	-0,9820	0,0	-0,9820	0,0		
0,76	-0,9747	-0,9747	58,3	-0,9747	0,4	-0,9747	0,4		
0,77	-0,9661	-0,9661	17,4	-0,9661	0,8	-0,9661	0,8		
0,78	-0,9562	-0,9562	51,9	-0,9562	0,6	-0,9562	0,6		
0,79	-0,9451	-0,9451	103,0	-0,9451	0,1	-0,9451	0,1		
0,8	-0,9326	-0,9326	90,6	-0,9326	0,8	-0,9326	0,8		
0,81	-0,9189	-0,9189	10,4	-0,9189	1,2	-0,9189	1,2		
0,82	-0,9038	-0,9038	95,2	-0,9038	0,7	-0,9038	0,7		
0,83	-0,8876	-0,8876	153,8	-0,8876	0,3	-0,8876	0,3		
0,84	-0,8702	-0,8702	116,0	-0,8702	1,3	-0,8702	1,3		
0,85	-0,8517	-0,8517	6,7	-0,8517	1,6	-0,8517	1,6		
0,86	-0,8323	-0,8323	139,3	-0,8323	0,8	-0,8323	0,8		
0,87	-0,8119	-0,8119	191,1	-0,8119	0,7	-0,8119	0,7		
0,88	-0,7907	-0,7906	114,3	-0,7907	1,8	-0,7907	1,8		
0,89	-0,7686	-0,7686	52,7	-0,7686	1,9	-0,7686	1,9		
0,9	-0,7459	-0,7459	207,3	-0,7459	0,6	-0,7459	0,6		
0,91	-0,7226	-0,7227	241,5	-0,7226	1,2	-0,7226	1,2		
0,92	-0,6991	-0,6991	121,4	-0,6991	2,4	-0,6991	2,4		
0,93	-0,6752	-0,6752	85,9	-0,6752	2,1	-0,6752	2,1		

(jatkuu)

(liite 2 jatkoa)

aika	0,01 s Adams [m]	0,01 s Matlab [m]	ero [μm]	0,001 s Matlab [m]	ero [μm]	0,0001 s Matlab [m]	ero [μm]
0,94	-0,6513	-0,6513	248,1	-0,6513	0,4	-0,6513	0,4
0,95	-0,6272	-0,6272	252,6	-0,6272	1,7	-0,6272	1,7
0,96	-0,6032	-0,6032	86,6	-0,6032	2,8	-0,6032	2,8
0,97	-0,5792	-0,5792	85,4	-0,5792	8,6	-0,5792	8,6
0,98	-0,5555	-0,5555	150,4	-0,5555	15,4	-0,5555	15,4
0,99	-0,5321	-0,5321	95,7	-0,5321	14,9	-0,5321	14,9
1	-0,5092	-0,5092	184,1	-0,5092	16,3	-0,5092	16,3