

Tutkimusraportti 44
Research Report 44

**MEKANISMIEN DYNAMIIKAN SIMULOINNISSA
SOVELLETTAVIA NUMEERISIA- JA
MALLINNUSMENETELMIÄ**

Tutkija, TkT Asko Rouvinen

ISBN 951-764-797-2
ISSN 1459-2932

Lappeenrannan teknillinen yliopisto
Konetekniikan osasto
Mekatroniikan ja virtuaalisuunnittelun laboratorio
PL 20
53851 Lappeenranta
Finland

Lappeenranta, 26 Elokuuta 2003

TIIVISTELMÄ

TkT Asko Rouvinen

Mekanismien dynamiikan simuloinnissa sovellettavia numeerisia- ja mallinnusmenetelmiä

Lappeenranta 2003

62 s.

Tutkimusraportti 44

ISBN 951-764-797-2

ISSN 1459-2932

Koneet voidaan usein jakaa osajärjestelmiin, joita ovat ohjaus- ja säätöjärjestelmät, voimaa tuottavat toimilaitteet ja voiman välittävät mekanismit. Eri osajärjestelmiä on simuloitu tietokoneavusteisesti jo usean vuosikymmenen ajan. Osajärjestelmien yhdistäminen on kuitenkin uudempi ilmiö. Usein esimerkiksi mekanismien mallinnuksessa toimilaitteen tuottama voima on kuvattu vakiona, tai ajan funktiona muuttuvana voimana. Vastaavasti toimilaitteiden analysoinnissa mekanismin toimilaitteeseen välittämä kuormitus on kuvattu vakiovoimana, tai ajan funktiona työkiertoa kuvaavana kuormituksena. Kun osajärjestelmät on erotettu toisistaan, on niiden välisten vuorovaikutuksien tarkastelu erittäin epätarkkaa. Samoin osajärjestelmän vaikutuksen huomioiminen koko järjestelmän käyttäytymisissä on hankalaa.

Mekanismien dynamiikan mallinnukseen on kehitetty erityisesti tietokoneille soveltuvia numeerisia mallinnusmenetelmiä. Useimmat menetelmistä perustuvat Lagrangen menetelmään, joka mahdollistaa vapaasti valittaviin koordinaattimuuttujiin perustuvan mallinnuksen. Numeerista ratkaisun mahdollistamiseksi menetelmän avulla muodostettua differentiaali-algebraaliyhtälöryhmää joudutaan muokkaamaan esim. derivoimalla rajoiteyhtälöitä kahteen kertaan. Menetelmän alkuperäisessä numeerisissa ratkaisuisissa kaikki mekanismia kuvaavat yleistetyt koordinaatit integroidaan jokaisella aika-askeleella. Tästä perusmenetelmästä johdetuissa menetelmissä riippumattomat yleistetyt koordinaatit joko integroidaan ja riippuvat koordinaatit ratkaistaan rajoiteyhtälöiden perusteella tai yhtälöryhmän kokoa pienennetään esim. käyttämällä nopeus- ja kiihtyvyyssanalyysissä eri kiertymäkoordinaatteja kuin asema-analyysissä.

Useimmat integrointimenetelmät on alun perin tarkoitettu differentiaaliyhtälöiden (ODE) ratkaisuun jolloin yhtälöryhmään liitetyt niveliä kuvaavat algebraaliset rajoiteyhtälöt saattavat aiheuttaa ongelmia. Nivelrajoitteiden virheiden korjaus, stabilointi, on erittäin tärkeää mekanismien dynamiikan simuloinnin onnistumisen ja tulosten oikeellisuuden kannalta. Mallinnusmenetelmien johtamisessa käytetyn virtuaalisen työn periaatteen oletuksena nimittäin on, etteivät rajoitevoimat tee työtä, eli rajoitteiden vastaista siirtymää ei tapahdu. Varsinkin monimutkaisten järjestelmien pidemmissä analyysissä nivelrajoitteet eivät toteudu tarkasti. Tällöin järjestelmän energiatasapaino ei toteudu ja järjestelmään muodostuu virtuaalista energiaa, joka rikkoo virtuaalisen työn periaatetta, Tästä syystä tulokset eivät enää pidä paikkaansa.

Tässä raportissa tarkastellaan erityyppisiä mallinnus- ja ratkaisumenetelmiä, ja vertaillaan niiden toimivuutta yksinkertaisten mekanismien numeerisessa ratkaisussa. Menetelmien toimivuutta tarkastellaan ratkaisun tehokkuuden, nivelrajoitteiden toteutumisen ja energiatasapainon säilymisen kannalta.

Asiasanat: Mekanismien dynamiikka, mallinnus, stabilointimenetelmät, integrointi

ABSTRACT

Dr. Tech. Asko Rouvinen

Numerical and modelling methods used in mechanism dynamics simulation

Lappeenranta 2003

62 p.

Research report 44

ISBN 951-764-797-2

ISSN 1459-2932

Machines can be divided into subsystems, such as controlsystems, actuators that produce force and mechanism that transmit the force. The computer aided simulation of separate subsystems has been performed for decades. The combination of these subsystems is anyhow a more recent phenomena. Usually in mechanism simulation the force produced by actuator is described as constant or as a function of time. Respectively in simulation of actuators, the force transmitted by mechanism is described as constant or as a function of time that describes the force during the work cycle. If subsystems are separated from each other the interaction between them can't be described accurately. Also the estimation of the affect of certain subsystem to the complete machine is difficult.

There are several methods for computer aided modelling of mechanism dynamics. Most of these methods are based on Lagrange method that enables modelling using generalised coordinates. The numerical solution of the equations describing the mechanism requires for example calculation of second derivates of constraint equations. In the original solution method, all coordinate values are integrated at every time step. There are also several methods based on the original method that utilise coordinate partitioning or velocity transformations in order to reduce the size of matrices to integrate.

Numerical integration methods are best suitable for solution of ordinary differential equations (ODE). It is possible that algebraic equations describing constraints cause difficulties. The stabilisation or violation correction of constraint equations is an important part of mechanism dynamics simulation. The principle of virtual work, utilised in the derivation of modelling methods, assumes that constraint forces do no work so there should be no displacement against constraints. Especially with complicated systems constraint equations can't be solved exactly. This causes unbalance in the energy of the system and there can form virtual energy, which causes inaccuracy to results.

This report studies different types of modelling and solution methods. The usability of methods is studied with the solution of simple mechanism examples. The usability is rated based on numerical efficiency, violation of constraints and fulfilment of energy balance.

Keywords: Mechanism dynamics, modelling, stabilisation methods, numeric integration

SISÄLLYSLUETTELO

1	JOHDANTO	7
2	KINEMAATTINEN ANALYYSI	9
2.1	KAPPALEEN ASEMA JA ORIENTAATIO AVARUUSTAPAUKSESSA	11
2.2	KAHDEN VEKTORIN KOHTISUORUUS	12
2.3	KAHDEN PISTEEN YHTENEVYYS	14
2.4	KAHDEN VEKTORIN YHDENSUUNTAISUUS	15
2.5	KINEMAATTISEN ANALYYSIN SUORITTAMINEN	17
2.6	PERUSRAJOITTEIDEN OSITTAISDERIVAATAT	19
2.7	PERUSRAJOITTEIDEN TOISET AIKADERIVAATAT	21
2.8	NIVELTEN MUODOSTAMINEN PERUSRAJOITTEISTA	22
2.8.1	PALLONIVEL	22
2.8.2	KARDAANINIVEL	23
2.8.3	SARANANIVEL	23
2.8.4	SYLINTERINIVEL	24
2.8.5	TRANSLAATIONIVEL	25
3	MEKANISMIIEN DYNAMIIKAN MALLINNUSMENETELMIÄ	26
3.1	LAGRANGEN MENETELMÄ	26
3.1.1	KAPPALEEN NOPEUS JA KIIHTYVYYS	26
3.1.2	YLEISTETYT INERTIAVOIMAT	27
3.1.3	MASSAMATRIISI	28
3.1.4	NELIÖLLINEN NOPEUSVEKTORI	28
3.1.5	YLEISTETYT VOIMAT	28
3.1.6	LIIKKEYHTÄLÖIDEN MUODOSTAMINEN	29
3.2	SIOITUSMENETTELY	30
3.3	NEWTON-EULER -LIIKKEYHTÄLÖT	32
4	NUMEERISIA INTEGROINTIMENETELMIÄ	33
4.1	YKSIASKELMENETELMÄT	34
4.2	MONIASKELMENETELMÄT	35
4.3	INTEGROINNIN VIRHELÄHTEITÄ	38
5	RAJOITTEIDEN STABILOINTIMENETELMIÄ	39
5.1	BAUMGARTEN STABILOINTI	40
5.2	RANGAISTUSFUNKTIOMENETELMÄ	40
5.3	LAAJENNETTU LAGRANGEN MENETELMÄ	42
5.4	GEOMETRINEN ELIMINOINTIMENETELMÄ	42
5.5	SUORA VIRHEIDEN KORJAUSMENETELMÄ	44
6	ESIMERKKEJÄ	45
6.1	NIVELSUUNNIKAS	45
6.2	KAMPIMEKANISMI	47
7	MENETELMIEN VERTAILUA	48
7.1	LASKENTATEHOKKUUS	50
7.2	RAJOITEYHTÄLÖIDEN VIRHEET	51
7.3	ENERGIATASAPAINON SÄILYMINEN	54
8	JOHTOPÄÄTÖKSET	59
9	LÄHDELUETTELO	61

KÄYTETYT MERKINNÄT

a_i	menetelmää kuvaava vakio
\mathbf{a}_i	kappaleeseen i kiinnitetty vektori
\mathbf{a}_j	kappaleeseen j kiinnitetty vektori
\mathbf{a}_v	kiihtyvyyden normaalikomponentit, sekä nopeuden neliöstä riippuvat tangentiaalikomponentit
\mathbf{A}	kiertomatriisi
b_i	menetelmää kuvaava vakio
\mathbf{C}	rajoitevektori
\mathbf{C}^{d1}	kahden vektorin kohtisuoruusrajoite
\mathbf{C}^{d2}	kahden vektorin kohtisuoruusrajoite
\mathbf{C}^{p1}	kahden vektorin yhdensuuntaisuusrajoite
\mathbf{C}^{p2}	kahden vektorin yhdensuuntaisuusrajoite
\mathbf{C}^s	kahden pisteen yhtenevyysrajoite
\mathbf{C}_q	rajoiteyhtälöiden Jacobin matriisi
\mathbf{C}_R	rajoiteyhtälön osittaisderivaatta translaatiomuuttujien suhteen
\mathbf{C}_π	rajoiteyhtälön osittaisderivaatta rotaatiomuuttujien suhteen
\mathbf{C}_{qt}	rajoiteyhtälöiden Jacobin matriisin aikaderivaatta
\mathbf{C}_t	rajoiteyhtälöiden aikaderivaatta
\mathbf{C}_{tt}	rajoiteyhtälöiden toinen aikaderivaatta
\mathbf{d}_{ij}	kappaleiden i ja j kahta pistettä yhdistävä vektori
E	järjestelmän kokonaisenergia
f	funktio
\mathbf{f}_i	kappaleeseen i kiinnitetty yksikkövektori
\mathbf{f}_j	kappaleeseen j kiinnitetty yksikkövektori
\mathbf{F}	voimavektori
\mathbf{g}_i	kappaleeseen i kiinnitetty yksikkövektori
\mathbf{g}_j	kappaleeseen j kiinnitetty yksikkövektori
G	kuvitteellinen Rayleghin voima
\mathbf{G}	kuvaus Eulerin parametrien nopeuksista globaaleihin kulmanopeuksiin
$\overline{\mathbf{G}}$	kuvaus Eulerin parametrien nopeuksista lokaaleihin kulmanopeuksiin
\mathbf{h}_i	kappaleeseen i kiinnitetty yksikkövektori
\mathbf{h}_j	kappaleeseen j kiinnitetty yksikkövektori
$\mathbf{I}_{\theta\theta}$	jäykän kappaleen inertia tensori
$\mathbf{k}_{1\dots 4}$	Runge-Kutta –menetelmän kerroin
m_i	kappaleen i massa
\mathbf{m}_{RR}	massamatriisin translaatiokoordinaatteihin liittyvä osa
$\mathbf{m}_{R\theta}$	massamatriisin translaatio- ja rotaatiokoordinaatteihin liittyvä osa
$\mathbf{m}_{\theta\theta}$	massamatriisin rotaatiokoordinaatteihin liittyvä osa
\mathbf{M}	massamatriisi
\mathbf{M}_g	globaali momentti
n	aika-askel
n_b	jäykkien kappaleiden lukumäärä
n_c	rajoiteyhtälöiden lukumäärä
\mathbf{q}	yleistetyt koordinaatit
\mathbf{q}_i	riippumattomat yleistetyt koordinaatit
\mathbf{q}_d	riippuvat yleistetyt koordinaatit
$\delta\mathbf{q}$	virtuaalinen siirtymä
$\Delta\mathbf{q}$	Newtonin differenssivektori
\mathbf{Q}_d	rajoitteiden ensimmäiset ja toiset osittaisderivaatat sisältävä termi

\mathbf{Q}_e	yleistetty voimavektori
\mathbf{Q}_v	neliöllinen nopeusvektori
\mathbf{r}_p	partikkelin P asema kiinteässä koordinaatistossa
$\delta\mathbf{r}$	pisteen aseman virtuaalinen muutos
\mathbf{R}	kappaleen lokaalin koordinaatiston asema
t	aika
T^*	kuvitteellinen kineettinen energia
$\bar{\mathbf{u}}$	artikkelin P paikkavektori lokaalissa koordinaatistossa
\mathbf{u}	partikkelin P paikkavektori kiinteässä koordinaatistossa
V^*	kuvitteellinen potentiaalienergia
V_i	kappaleen i tilavuus
δW	virtuaalinen työ
X, Y, Z	kiinteän koordinaatiston koordinaatit
$\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$	kappaleen lokaalin koordinaatiston koordinaatit
y	muuttuja
α	kulmakiihtyvyys
α_i	rangaistuskerroin
$\boldsymbol{\alpha}$	Baumgarten stabiloinnin kerroinmatriisi
$\boldsymbol{\beta}$	Baumgarten stabiloinnin kerroinmatriisi
ε	virhetoleranssi
λ	Lagrangen kerroin
ρ_i	kappaleen i tiheys
$\theta_{0\dots 3}$	Eulerin parametrit
μ_i	vaimennus
ψ	järjestelmän kokonaisenergian muutos
$\bar{\omega}$	lokaali kulmanopeus

Yläindeksit

-	kuvaus kappaleen lokaalissa koordinaatistossa
~	vinosymmetrinen matriisi
·	aikaderivaatta
..	toinen aikaderivaatta

Alaindeksit

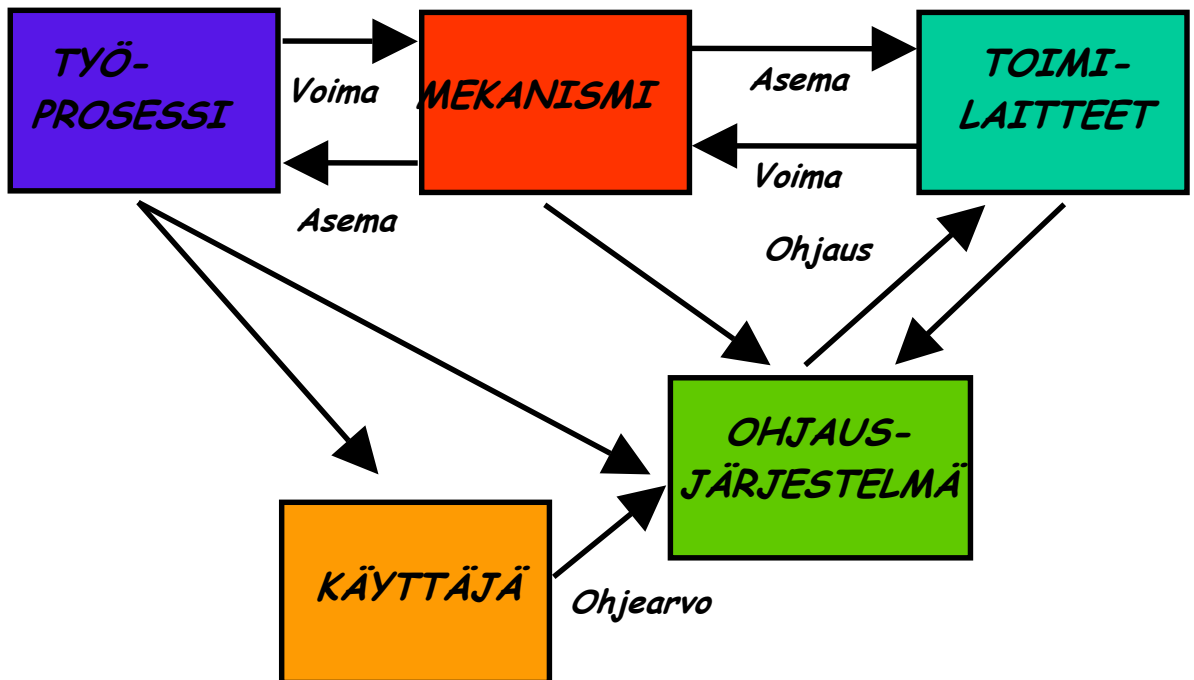
i	kappaleeseen i liittyvä
j	kappaleeseen j liittyvä
\mathbf{R}	translaatiokoordinaatteihin liittyvä
$\boldsymbol{\theta}$	Eulerin parametreihin liittyvä

1 JOHDANTO

Mekatronisen koneen mallinnus ja simulointi voidaan jakaa osa-alueisiin, joita ovat:

- erityyppisten osajärjestelmien mallinnus
- järjestelmien yhdistäminen kokonaisjärjestelmää kuvaavaksi virtuaaliprototyypiksi
- virtuaaliprototyypin numeerinen ratkaisu

Kone voidaan jakaa osajärjestelmiin esimerkiksi kuvan 1 mukaisesti. Kuvassa 1 on myös esitetty ympäristön ja käyttäjän liittyminen koneeseen.



Kuva 1. Mekatronisen koneen jako osajärjestelmiin.

Eri osajärjestelmiä on simuloitu tietokoneavusteisesti jo usean vuosikymmenen ajan. Osajärjestelmien yhdistäminen on kuitenkin uudempi ilmiö. Usein esimerkiksi mekaniismien mallinnuksessa toimilaitteen tuottama voima on kuvattu vakiona, tai ajan funktiona muuttuvana voimana. Vastaavasti toimilaitteiden analysoinnissa mekaniismin toimilaitteeseen välittämä kuormitus on kuvattu vakiovoimana, tai ajan funktiona työkiertoa kuvaavana kuormituksena.

Kun osajärjestelmät on erotettu toisistaan, on niiden välisten vuorovaikutuksien tarkastelu erittäin epätarkkaa. Samoin osajärjestelmän vaikutuksen huomioiminen koko järjestelmän

käyttäytymissä on hankalaa. Järjestelmien erottamisen taustalla on ollut mallinnusmenetelmien tutkijoiden erikoistuminen: ei ole ollut riittävästi tietoutta tai kiinnostusta tarkastella muita osajärjestelmiä. Toinen syy on ollut yritysten tuotekehityksen jakautuminen mekaniikka-, toimilaitte- ohjaus- ja säätötekniikan osastoihin, joissa oman alansa spesialisti paneutuu vain tietyn osajärjestelmän tarkasteluun. Eräs syy on myös eri osajärjestelmien analysointiin kehitettyjen ohjelmistojen suljettu rakenne, joka estää ohjelmistojen yhdistetyn käytön tai hankaloittaa käyttäjän lisäämien ominaisuuksien kehittämistä. Tällainen luonnollinen jako on toiminut viime aikoihin saakka, kunnes tuotekehitysprosessiin kohdistuvat kustannus- ja ajankäyttövaatimukset ovat kiristyneet ja koko järjestelmän toiminnan varmistaminen tuotekehityksen aikaisemmassa vaiheessa on tullut yleisemmäksi vaatimukseksi.

Toimilaitteiden ja ohjausjärjestelmien mallintamista pidetään yksinkertaisena mekanismien kinematiikan ja dynamiikan mallinnukseen verrattuna. Usein eri osajärjestelmät sisältävä yhdistetty simulointimalli koostetaankin mekanismien dynamiikan mallinnukseen tarkoitettussa ohjelmistossa, jolloin mekanismin liikeyhtälöt muodostetaan automaattisesti. Käyttäjä lisää malliin toimilaitteita ja ohjausjärjestelmää kuvaavat yhtälöt [1],[2]. Suurimpana syynä menettelyyn voidaan pitää toimilaitteiden ja ohjausjärjestelmien jakoa erillisiin komponentteihin, joiden mallintaminen on selkeää ja mahdollistaa komponenttimallin uudelleenkäytettävyyden. Suurimmat ongelmat komponenttimallien muodostamisessa liittyvät yleensä erillisten komponenttien joustavan liittämismahdollisuuden kehittämiseen [3],[4].

Mekanismien dynamiikan mallinnukseen on kehitetty erityisesti tietokoneille soveltuvia numeerisia mallinnusmenetelmiä. Useimmat menetelmistä perustuvat Lagrangen menetelmään, joka mahdollistaa vapaasti valittaviin koordinaattimuuttujiin perustuvan mallinnuksen. Tietokonesovelluksia on kattavasti esitetty lähteissä [5],[6],[7] ja [8].

Nykyisin virtuaaliprototyyppejä ratkaistaan nk. off-line -simulointina, jolloin 1 sekunnin analyysi vaatii esim. 15 s. tietokoneaikaa. Käyttäjän vasteen huomioiminen on tällöin kuitenkin vaikeaa ja perustuu parhaimmillaankin tilastolliseen tietoon. Jos tarkasteltava järjestelmä voidaan ratkaista riittävän nopeasti ja siihen voidaan lisäksi liittää käyttäjäliityntä, on mahdollista huomioida käyttäjän vaikutus järjestelmään jo suunnittelun virtuaaliprototyypivaiheessa. Tällaista simulointia kutsutaan reaaliaikaisimuloinniksi.

Reaaliaikasimuloinnissa tarkastava järjestelmä ratkaistaan siten, että järjestelmän vaste ilmenee mahdollisimman tarkasti todellisella ajanhetkellä ja 1 sekunnin analyysiin kuluu 1 s. tietokoneaikaa. Tämän vaatimuksen saavuttaminen asettaa rajoituksia simulointimallin koolle ja sen ratkaisussa käytettäville algoritmeille. Käyttämällä erityyppisiä Lagrangen menetelmästä johdettuja mallinnusmenetelmiä, on mahdollista esim. vähentää numeerisesti integroitavien koordinaattien määrää muuttamalla käytettyä koordinaattiesitystä [5],[6],[7],[8],[9],[10]. Eräs mahdollisuus on esimerkiksi käyttää koordinaattiesitystä, joka mahdollistaa esim. massatermien kuvauksen säilymisen vakiona simuloinnin aikana [11]. Jos jokin osa ratkaistavasta mallista säilyy vakiona analyysin ajan, voidaan se ratkaista kerran analyysin alussa ja näin vähentää tarvittavaa laskentaa.

Useimmat kaupalliset mekanismien dynamiikan simulointiohjelmit eivät sovellu reaaliaikaiseen simulointiin. Ohjelmistojen käyttämät integrointi- ja mallinnusmenetelmät on suunniteltu off-line simuloinnin tarpeita silmällä pitäen, jolloin ne ovat yleensä liian raskaita ja sisältävät paljon iteratiivisia virheenkorjausmenetelmiä. Kaupallisista ohjelmistoista ADAMS sekä DADS ovat selvästi off-line simulointiin tarkoitettuja. Ne sisältävät ratkaisijan, joka käsittelee esikäsittelijän muodostamaa lähtötiedostoa. SIMPACK puolestaan tarjoaa mahdollisuuden muodostaa simulointimallista FORTRAN -kielinen lähdekoodi, johon voidaan sisällyttää ratkaisija ja jonka kääntäminen reaaliaikaiseksi ohjelmaksi on mahdollista.

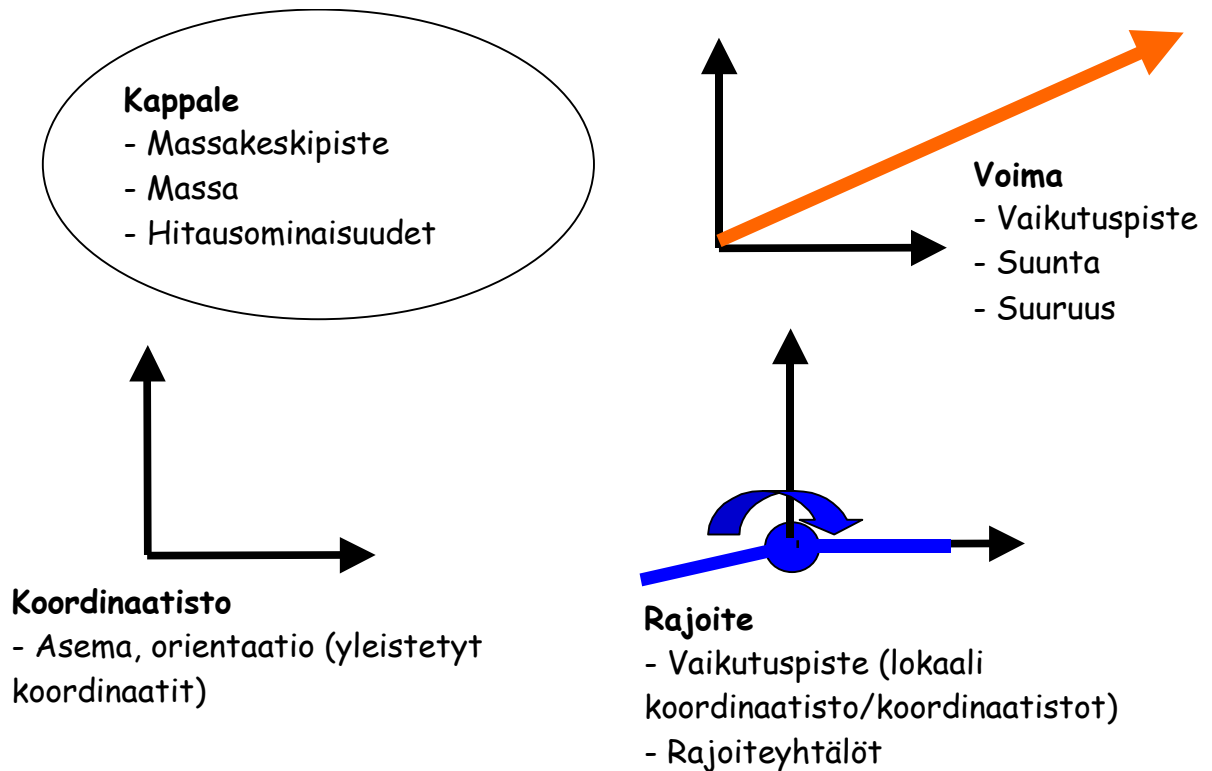
2 KINEMAATTINEN ANALYYSI

Mekanismien tarkasteluun liittyvät analyysit voidaan jaotella perustyyppeihin, joita ovat:

- Kinemaattinen analyysi
 - Käänteinen kinemaattinen analyysi
- Kineettinen analyysi
 - Staattinen analyysi
 - Dynaaminen analyysi
 - Linearisoitu dynaaminen analyysi
 - Käänteinen dynaaminen analyysi

Kinemaattiset analyysit käsittelevät kappaleiden liikkeitä geometriselta pohjalta, välittämättä kappaleisiin vaikuttavista voimista. Kineettiset analyysit puolestaan tarkastelevat kappaleisiin

vaikuttavien voimien ja niiden liiketilojen vuorovaikutusta. Kinemaattisissa analyyseissä tarkastellaan kappaleiden liikeratoja, liikenopeuksia ja kiihtyvyyksiä ajan funktiona, kun tunnetaan järjestelmän kappaleiden geometria sekä kappaleisiin kohdistuvat rajoiteyhtälöt. Molempien analyysityyppien suorittamiseksi on tarpeen hallita niissä tarvittavien peruskomponenttien ja niihin liittyvien ominaisuuksien käsittely, kuva 2.



Kuva 2. Mekanismien mallinnuksen peruskomponentit.

Mekanismien mallinnuksessa käsitellään tiettyjä peruskomponentteja, joita ovat kappaleet, niiden väliset nivelet ja kappaleisiin vaikuttavat voimat, jotka liittyvät vain kineettisiin analyyseihin. Mekanismien varret kuvataan jäykkinä tai joustavina kappaleina, joille määritellään massakeskipiste, sekä massa- ja hitausominaisuudet. Joustaville kappaleille täytyy lisäksi määrittää useita joustavuuteen vaikuttavia ominaisuuksia ja niiden käsittely onkin huomattavasti monimutkaisempaa kuin jäykkien kappaleiden. Mekanismien nivelet kuvataan nivelrajoitteina, joilla on asema, vaikutussuunta, sekä kullekin nivelelle tyypilliset rajoiteyhtälöt. Kappaleisiin vaikuttavat voimat kuvataan vaikutuspisteen, -suunnan ja suuruuden avulla. Peruskomponenttien kuvaamiseen tarvitaan koordinaatistoja, jotka kuvataan ns. yleistettyjen koordinaattien avulla.

Mekanismit koostuvat useista erillisistä kappaleista, jotka liittyvät toisiinsa nivelten välityksellä. Matemaattisessa mielessä nivelet asettavat rajoiteyhtälöitä analysoitavaan

järjestelmään. Fyysisesti on olemassa useita erityyppisiä niveliä mutta matemaattisessa analyysissä voidaan esittää muutamia perusrajoitteita, joita yhdistämällä voidaan kuvata monimutkaisiakin niveliä. Vapaasti avaruudessa liikkuvalla kappaleella on kuusi vapausastetta, kolme siirtymiin ja kolme kiertymiin liittyvää. Nivelet pienentävät järjestelmän vapausasteiden määrää riippuen nivelyyppiin liittyvien rajoiteyhtälöiden määrästä.

Perusrajoitteet koostuvat kappaleiden nivelpisteiden asemasta tai kappaleisiin liitettyjen vektoreiden kohtisuoruus- ja yhdensuuntaisuusehdoista. Yleensä vektorien avulla määritellään nivelen kierto- tai translaatioakselin ja niihin nähden kohtisuoria akseleita. Useimmiten käytetyt vektorit ovat yksikkövektoreita. Jos ennalta määritellään, että nivelen akseli on aina tietynsuuntaisen yksikkövektorin tai koordinaattiakselin suuntainen, voidaan nivelten määrittelyssä käytettäviä yhtälöitä yksinkertaistaa huomattavasti. Näin on tehty esim. ADAMS-ohjelmistossa, jossa nivelen akseli on aina niveleen liittyvän koordinaatiston Z -akselin suuntainen.

2.1 Kappaleen asema ja orientaatio avaruustapauksessa

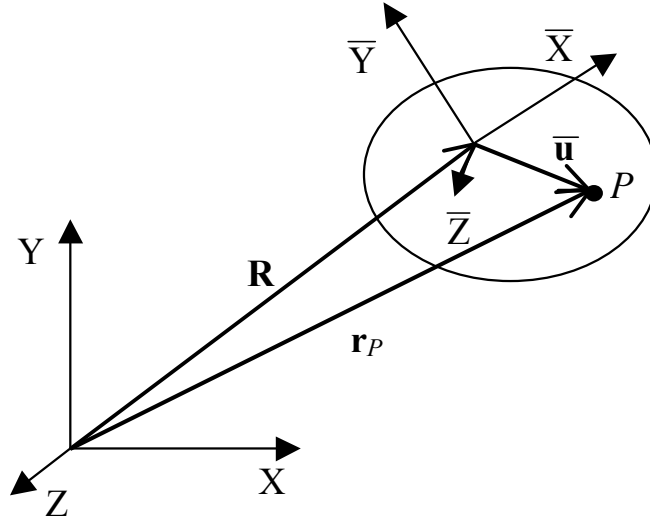
Kinematikan määrittämiseksi on ensin määriteltävä tapa, jolla kappaleiden asema ja orientaatio globaalissa eli kiinteässä koordinaatistossa määritellään. Jäykän kappaleen, jonka partikkelit eivät voi liikkua toisiinsa nähden, asema ja orientaatio voidaan määrittellä kappaleeseen kiinnitetyn lokaalin koordinaatiston avulla. Lokaali koordinaatisto siirtyy ja kiertyy kappaleen mukana ja jokaisen kappaleeseen kuuluvan partikkelin P asema \mathbf{r}_p voidaan määrittellä lokaalin koordinaatiston ja sen paikkavektorin avulla, kuva 3.

Partikkelin asema voidaan esittää yhtälömuodossa

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{R} + \mathbf{A}\bar{\mathbf{u}} \quad (1)$$

jossa \mathbf{R} on kappaleen lokaalin koordinaatiston asema kiinteässä globaalissa koordinaatistossa, \mathbf{A} on kiertomatriisi ja $\bar{\mathbf{u}}$ lokaalissa koordinaatistossa kuvattu partikkelin paikkavektori. Kiertomatriisin avulla muunnetaan paikkavektorin kuvaus lokaalista koordinaatistosta kiinteään koordinaatistoon:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{u}} \quad (2)$$



Kuva 3. Partikkelin P asema kiinteässä XYZ -koordinaatistossa.

Kiertomatriisin määrittely riippuu käytetystä kiertymäkoordinaattien kuvauksesta. Kiertymäkoordinaatteja voi olla joko kolme tai neljä kappaletta. Kolmea kiertymäkoordinaattia käytettäessä on ongelmana kiertomatriisin mahdollinen singulaarisuus, tämä ilmenee esim. Eulerin kulmia käytettäessä. Avaruustapausten analysoinnissa käytetäänkin yleensä nk. Eulerin parametriesitystä, joka koostuu neljästä kiertymää kuvaavasta muuttujasta, yhtälö 3, ja niitä yhdistävästä normalisointirajoitteesta, yhtälö 4.

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta_0 \ \theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\theta} - 1 = 0 \quad (4)$$

Rajoiteyhtälö on välttämätön järjestelmän vapausasteiden oikean määrän säilyttämiseksi. Jos rajoiteyhtälöä ei ole, kappaleiden jäykkyysehto ei toteudu ja kappaleet venyvät eri koordinaattiakseleiden suunnissa. Yhtälössä 5 on esitetty kiertomatriisi Eulerin parametrien avulla.

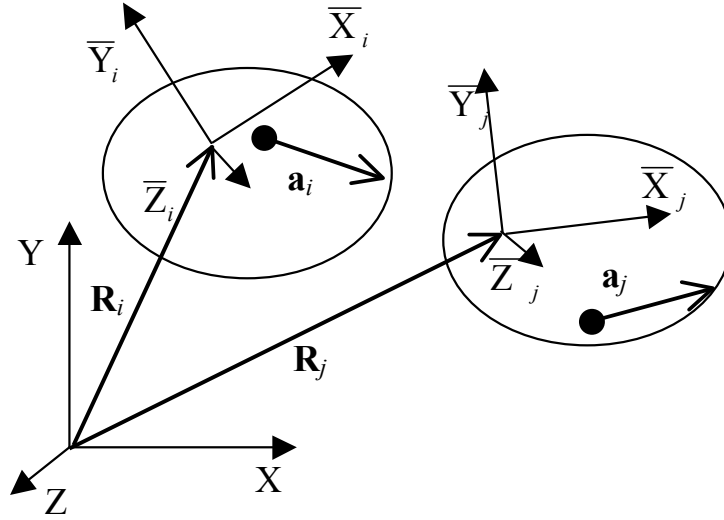
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2[(\theta_2)^2 + (\theta_3)^2] - 1 & 2(\theta_1\theta_2 - \theta_0\theta_3) & 2(\theta_1\theta_3 + \theta_0\theta_2) \\ 2(\theta_1\theta_2 + \theta_0\theta_3) & 2[(\theta_1)^2 + (\theta_3)^2] - 1 & 2(\theta_2\theta_3 - \theta_0\theta_1) \\ 2(\theta_1\theta_3 - \theta_0\theta_2) & 2(\theta_2\theta_3 + \theta_0\theta_1) & 2[(\theta_1)^2 + (\theta_2)^2] - 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Kiertomatriisin johtaminen ja sen muita esitystapoja, samoin kuin Eulerin parametrien tarkempi määrittely on esitetty esim. lähteissä [5],[6],[7] ja [8].

2.2 Kahden vektorin kohtisuorus

Kappaleisiin liittyvät nivelet sijaitsevat harvoin kappaleen tunnetuissa pisteissä, kuten massakeskipisteessä tai yleisemmin kappaleen lokaalissa koordinaatistossa tai edes kappaleen

lokaalin koordinaatiston akseleiden suuntaisesti. Tästä syystä nivelten määrittelyä varten on kappaleeseen usein määriteltävä uusi nivelkoordinaatisto, jonka suhteen nivel esitetään.



Kuva 4. Kappaleisiin i ja j kiinnitetyt vektorit \mathbf{a}_i ja \mathbf{a}_j .

Kuvassa 4 on esitetty kahden kahdessa jäykässä kappaleessa, i ja j , sijaitsevat globaalit vektorit \mathbf{a}_i ja \mathbf{a}_j , joiden välinen kohtisuuruusrajoite C^{d1} voidaan esittää niiden välisen pistetulon avulla

$$C^{d1}(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j = 0 \quad (6)$$

Kuvaamalla vektorit \mathbf{a}_i ja \mathbf{a}_j kappaleiden lokaaleissa koordinaatistoissa esitettyjen vektoreiden, sekä kiertomatriisien avulla, yhtälö 2, saadaan kohtisuuruusrajoitteeksi

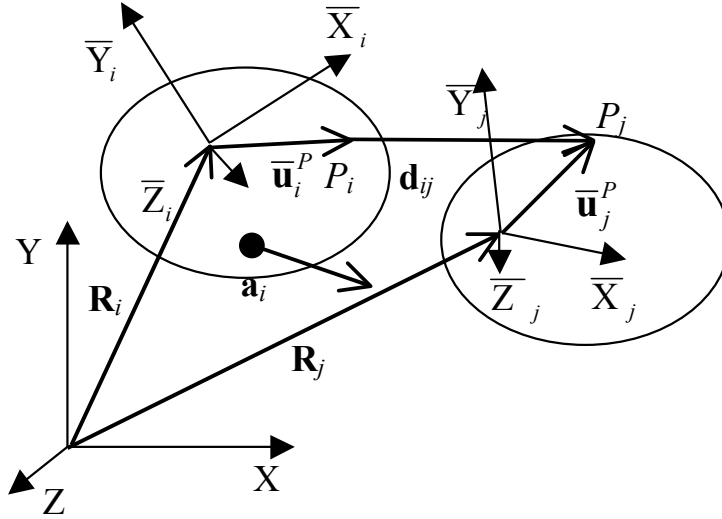
$$C^{d1}(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \bar{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{A}_i^T \bar{\mathbf{a}}_j \mathbf{A}_j = 0 \quad (7)$$

Koska rajoite on riippuvainen kummankin kappaleen kiertomatriisista, rajoittaa se kahden kappaleen välisen orientaation. Kohtisuuruusrajoitetta voidaan käyttää paitsi kahden eri kappaleeseen kiinnitetyn vektorin välisen kohtisuuruuden, myös kappaleeseen kiinnitetyn vektorin \mathbf{a}_i ja kappaleiden kahta vapaasti valittua pistettä yhdistävän vektorin \mathbf{d}_{ij} kohtisuuruuden määrittämiseen, kuva 5. Olettaen, että $\mathbf{d}_{ij} \neq 0$, rajoiteyhtälöksi saadaan

$$C^{d2}(\mathbf{a}_i, \mathbf{d}_{ij}) = \mathbf{a}_i^T \mathbf{d}_{ij} = 0 \quad (8)$$

Esittämällä \mathbf{d}_{ij} yleistettyjen koordinaattien avulla

$$\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{R}_j + \mathbf{A}_j \bar{\mathbf{u}}_j^P - \mathbf{R}_i - \mathbf{A}_i \bar{\mathbf{u}}_i^P \quad (9)$$



Kuva 5. Kappaleita i ja j yhdistävä vektori \mathbf{d}_{ij} .

saadaan toiseksi kohtisuoruusrajoitetyypiksi

$$C^{d2}(\mathbf{a}_i, \mathbf{d}_{ij}) = \bar{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{A}_i^T (\mathbf{R}_j + \mathbf{A}_j \bar{\mathbf{u}}_j^P - \mathbf{R}_i) - \bar{\mathbf{a}}_i^T \bar{\mathbf{u}}_i^P = 0 \quad (10)$$

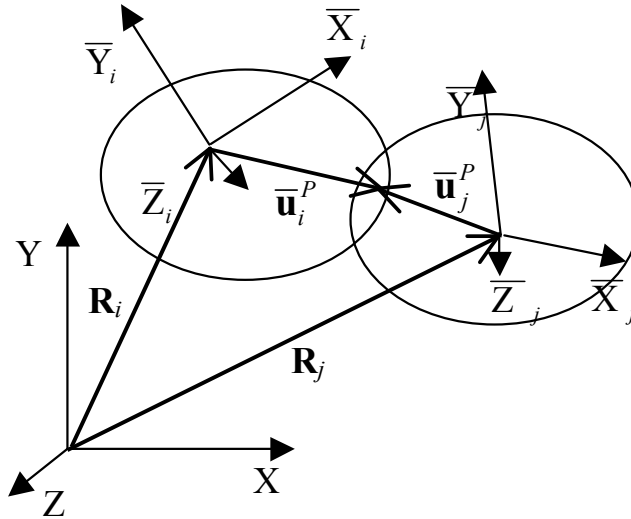
Verrattuna ensimmäiseen kohtisuoruusrajoitteeseen on erona epäsymmetrisyys. Jos rajoitetta halutaan soveltaa kappaleen j suhteen, tapahtuu se vaihtamalla keskenään indeksit i ja j . On myös huomattava, että rajoite ei ole voimassa, jos pisteet P_i ja P_j ovat yhtenevät eli vektori $\mathbf{d}_{ij} = 0$. Rajoitetta C^{d1} voidaan hyödyntää esim. kardaninivelten ja translaationivelten määrittämisessä. Rajoitetta C^{d2} puolestaan käytetään monimutkaisempien yhdistettyjen nivelten kuvaamiseen. Molempia rajoitteita sovelletaan yhdensuuntaisuusrajoitteiden määrittämisessä. Kohtisuoruusrajoitteet lisäävät järjestelmään yhden rajoiteyhtälön vaadittua kohtisuoruutta kohden.

2.3 Kahden pisteen yhtenevyys

Kahden eri kappaleissa olevan pisteen yhtenevyyttä vaaditaan esim. pallonivelen tapauksessa, jossa kappaleiden väliset kiertymät ovat sallittuja mutta siirtymät ovat estettyjä. Tällöin kuvan 65 merkintöjen mukaisesti pisteet P_i ja P_j ovat yhtenevät ja vektori $\mathbf{d}_{ij} = 0$, eli

$$\mathbf{C}^s(P_i, P_j) = \mathbf{R}_j + \mathbf{A}_j \bar{\mathbf{u}}_j^P - \mathbf{R}_i - \mathbf{A}_i \bar{\mathbf{u}}_i^P = \mathbf{0} \quad (11)$$

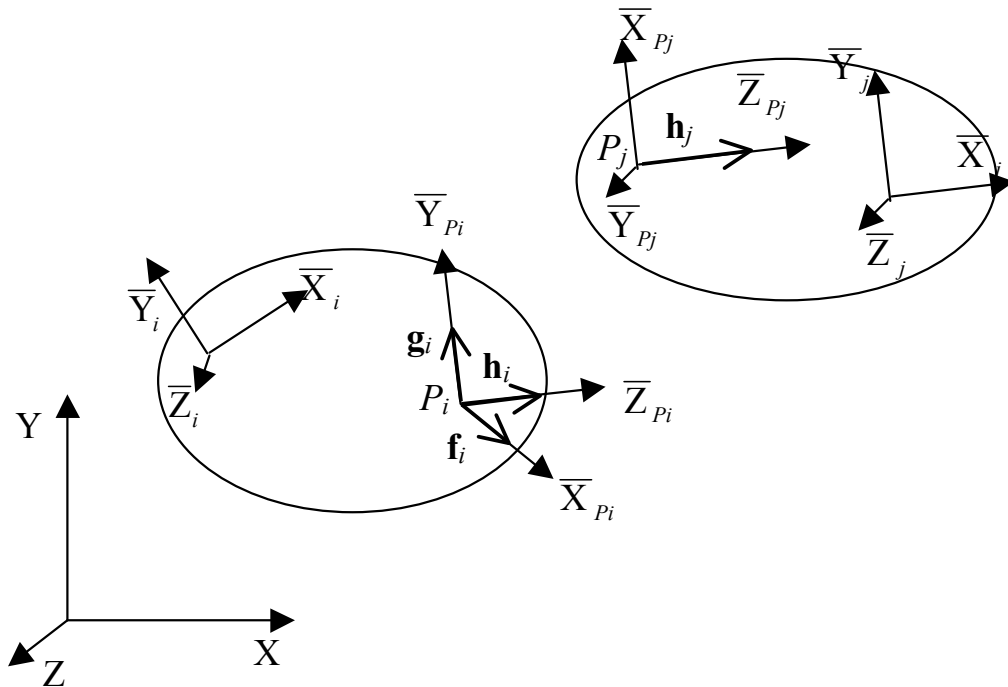
Tätä molempien kappaleiden suhteen symmetristä rajoitetta tarvitaan jo mainitun pallonivelen lisäksi mm. kardaninivelen ja sarananivelen kuvaamisessa. Rajoite lisää järjestelmään kolme rajoiteyhtälöä vaadittua pisteiden yhtenevyyttä kohti.



Kuva 6. Kappaleita i ja j yhdistävä vektori d_{ij} .

2.4 Kahden vektorin yhdensuuntaisuus

Kahden vektorin yhdensuuntaisuutta hyödynnetään mm. liuku- ja sylinterinivelissä. Yhdensuuntaisuusrajoitteet voidaan muodostaa käyttämällä aiemmin määriteltyjä kohtisuorusrajoitteita. Kahden nivelkoordinaatiston valitut akselit ovat yhdensuuntaisia, kun toisen koordinaatiston valittu akseli on kohtisuorassa ensimmäisen koordinaatiston kahteen muuhun akseliin.



Kuva 7. Kappaleisiin i ja j kiinnitetyt nivelkoordinaatistot.

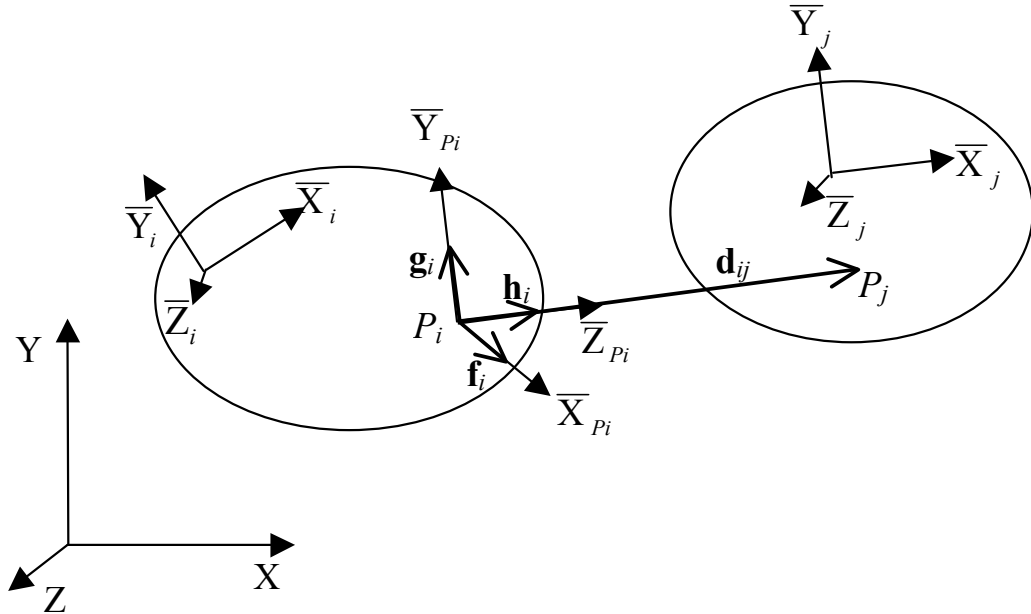
Vaaditaan kuvan 7 merkintöjen mukaisesti, että nivelkoordinaatistojen akselit \bar{Z}_{P_i} ja \bar{Z}_{P_j} ovat yhdensuuntaiset. Koska yksikkövektorit \mathbf{h}_i ja \mathbf{h}_j on määritelty kyseessä olevien koordinaattiakseleiden suuntaisesti täytyy myös niiden olla yhdensuuntaisia. Vektori \mathbf{h}_j on yhdensuuntainen vektorin \mathbf{h}_i kanssa vain ja ainoastaan silloin, kun se on kohtisuorassa yksikkövektoreihin \mathbf{f}_i ja \mathbf{g}_i nähden. Tämä rajoite voidaan ilmaista yhdistämällä kaksi vektoreiden kohtisuoruusrajoitetta.

$$\mathbf{C}^{p1}(\mathbf{h}_i, \mathbf{h}_j) = \begin{bmatrix} C^{d1}(\mathbf{f}_i, \mathbf{h}_j) \\ C^{d1}(\mathbf{g}_i, \mathbf{h}_j) \end{bmatrix} = 0 \quad (12)$$

Vastaavasti voidaan määrittää kappaleeseen kiinnitetyn nivelkoordinaatiston ja kappaleita yhdistävän vektorin yhdensuuntaisuus C^{d2} -rajoitteiden avulla.

$$\mathbf{C}^{p2}(\mathbf{h}_i, \mathbf{d}_{ij}) = \begin{bmatrix} C^{d2}(\mathbf{f}_i, \mathbf{d}_{ij}) \\ C^{d2}(\mathbf{g}_i, \mathbf{d}_{ij}) \end{bmatrix} = 0 \quad (13)$$

Yhdensuuntaisuusrajoitteet lisäävät järjestelmään kaksi rajoiteyhtälöä yhdensuuntaisuusvaatimusta kohden. Kuvassa 8 on esitetty koordinaattiakselin \bar{Z}_{P_i} ja kappaleita yhdistävän vektorin \mathbf{d}_{ij} yhdensuuntaisuus. Yhtälöiden esityksessä nivelen akseli on nivelkoordinaatiston Z-akselin suuntaisesti. Akseli voidaan sijoittaa muidenkin koordinaattiakseleiden suuntaisesti, kunhan yhtälöissä käytettävät vektorit valitaan vastaavasti.



Kuva 8. Kappaleeseen i kiinnitetty nivelkoordinaatisto ja kappaleita yhdistävä vektori.

2.5 Kinemaattisen analyysin suorittaminen

Kinemaattisessa analyysissä tarkastellaan kappaleiden liikkeitä huomioimatta niihin kohdistuvia voimia. Kinemaattinen analyysi voidaan suorittaa järjestelmälle, jonka vapausasteiden lukumäärä on nolla. Mekanismin jokaiseen vapausasteeseen, kohdistuu siis joko nivel- tai liikerajoite. Tällöin tieto mekanismin jäseniä yhdistävistä nivelistä, sekä kappaleisiin kohdistuvista kiihtyvyy-, nopeus- tai asemarajoitteista riittää kinemaattisen analyysin suorittamiseksi.

Kappaleen aseman kuvaamiseen käytetään yleistettyjä koordinaatteja, jotka kuvaavat täydellisesti kappaleeseen kuuluvan partikkelin aseman. Yleistetyt koordinaatit, \mathbf{q} , voivat koostua esim. kappaleen siirtymiä kuvaavista XYZ-koordinaateista täydennettynä kappaleen kiertymiä kuvaavilla koordinaateilla

$$\mathbf{q} = [\mathbf{R} \quad \boldsymbol{\theta}^T]^T \quad (14)$$

Yleistetyt koordinaatit ovat koordinaattimuuttujia, joiden fyysinen vastaavuus saattaa niiden määrittelystä riippuen olla vaikeasti hahmotettavissa. Yleistettyjen koordinaattien erikoisuutena on, että niiden avulla voidaan yleisesti esittää rajoiteyhtälöt, rajoiteyhtälöiden derivaattojen laskenta, sekä eri koordinaatteihin liittyvien voimakomponenttien käsittely. Yleistettyjen koordinaattien käyttö tarjoaa mallintajalle mahdollisuuden valita kyseiseen tapaukseen parhaiten sopivan koordinaattimäärittelyn ja näin minimoida ratkaistavan yhtälöryhmän koon.

Mekanismiin kuuluvia kappaleita yhdistävät nivelet eli rajoiteyhtälöt esitetään matemaattisesti muodossa

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (15)$$

sovelletaan rajoiteyhtälöihin Newton-Raphson menetelmää

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n - \mathbf{C}_q(\mathbf{q}_n)^{-1} \mathbf{C}(\mathbf{q}_n) \\ \mathbf{C}_q &= \frac{\partial \mathbf{C}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \end{aligned} \quad (16)$$

jossa \mathbf{C}_q on rajoiteyhtälöiden Jacobin matriisi ja n on aika-askel. Ratkaistaan kahden aika-askelen arvojen erotuksen suhteen

$$\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n = -\mathbf{C}_q(\mathbf{q}_n)^{-1} \mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = \Delta \mathbf{q}_n \quad (17)$$

jossa $\Delta \mathbf{q}$ on vektori, joka sisältää Newtonin differenssit. Koska kinemaattiselle järjestelmälle Jacobin matriisin oletetaan olevan ei-singulaarinen, voidaan yhtälöstä 17 ratkaista järjestelmän yleistetyt koordinaatit aika-askeleella $n+1$

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}_n \quad (18)$$

Koordinaattien päivitystä jatketaan, kunnes koordinaattien muutos tai rajoiteyhtälöiden virheiden normi on asetetun virhetoleranssin ε_1 tai ε_2 sisällä

$$|\Delta \mathbf{q}| < \varepsilon_1 \quad \text{tai} \quad |\mathbf{C}(\mathbf{q}, t)| < \varepsilon_2 \quad (19)$$

Kun rajoiteyhtälö 15 derivoidaan ajan suhteen soveltamalla derivoinnin ketjusääntöä saadaan

$$\mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_t = 0 \quad (20)$$

jossa \mathbf{C}_t on rajoiteyhtälöiden aikaderivaatta. Jos rajoitteet eivät ole ajasta riippuvia, esim. esitetyt perusrajoitteet, on vektori \mathbf{C}_t nolla. Järjestelmän nopeusvektori voidaan ratkaista yhtälöstä 20. Järjestelmän kiihtyvyys voidaan vastaavasti ratkaista derivoimalla yhtälö 20 ajan suhteen käyttämällä derivoinnin ketjusääntöä:

$$(\mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}})_q \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{tq} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{qt} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_q \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{tt} = 0 \quad (21)$$

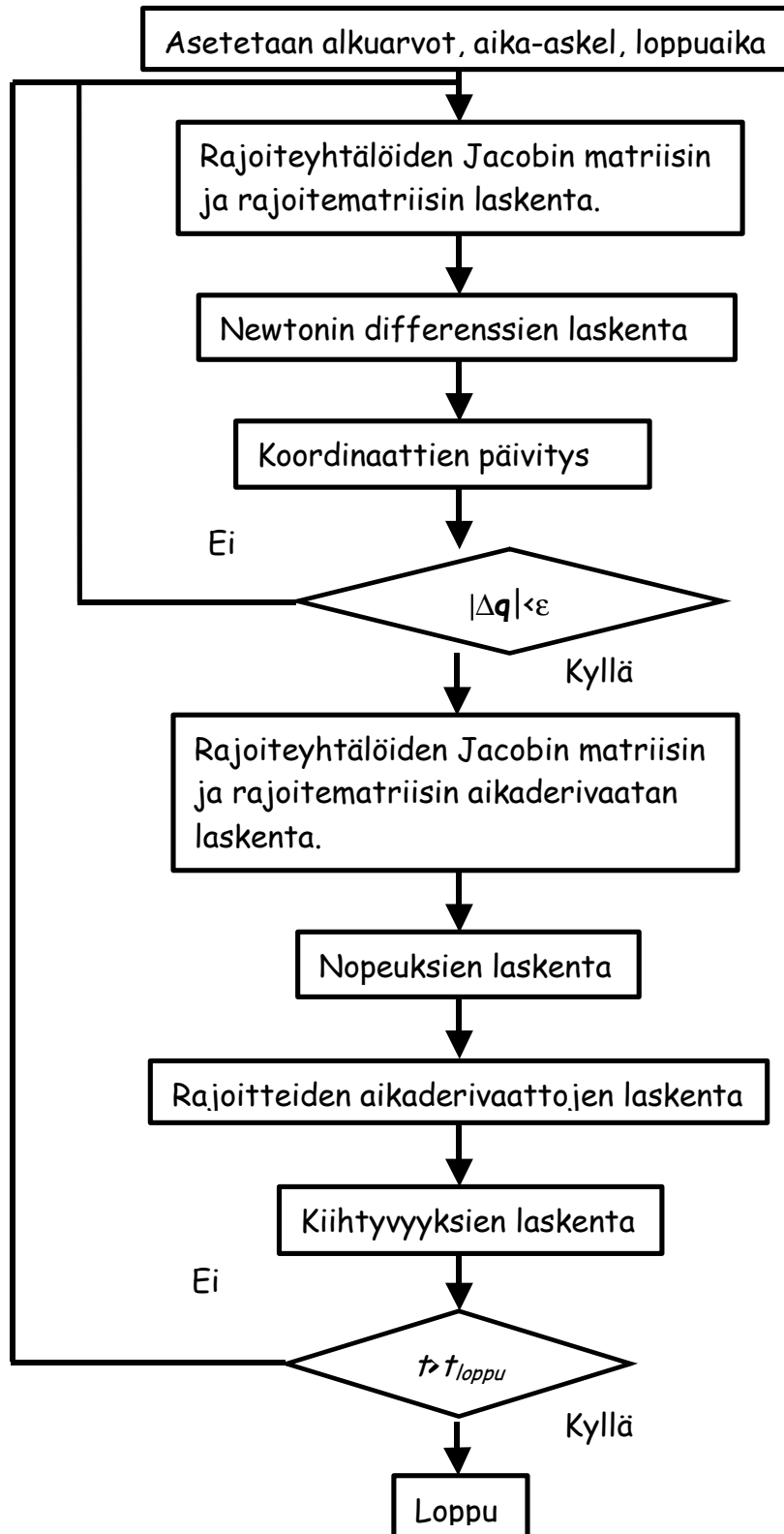
Yhtälössä alaindeksit tarkoittavat osittaisderivaattoja annettujen muuttujien suhteen. Ratkaistaan kiihtyvyydet yhtälöstä 21

$$\mathbf{C}_q \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_d \quad (22)$$

jossa

$$\mathbf{Q}_d = -(\mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}})_q \dot{\mathbf{q}} - 2\mathbf{C}_{qt} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{C}_{tt} \quad (23)$$

Kinemaattisen analyysin suurena ongelmana on riittävän tarkan alkutilan määrittäminen. Jos kappaleiden yleistettyjen koordinaattien arvoja alkutilassa ei tunneta riittävän tarkasti, on mahdollista, että algoritmi palauttaa väärän ratkaisun. Toinen ongelma on se, että järjestelmän Jacobin matriisi voi muuttua singulaariseksi, jolloin numeerinen ratkaisu ei enää ole mahdollinen. Tämä tilanne ilmenee myös silloin kun mekanisme käyttävät rajoitteet koettavat pakottaa sen asemaan, joka ei ole kinemaattisesti mahdollinen, tai mekanismien lukkiutuessa. Kuvassa 9 on esitetty algoritmi kinemaattisen analyysin suorittamiseksi.



Kuva 9. Algoritmi kinemaattisen analyysin suorittamiseksi.

2.6 Perusrajoitteiden osittaisderivaatat

Kinemaattisessa analyysissä tarvittava rajoitteiden Jacobin matriisi C_q koostuu rajoiteyhtälöiden osittaisderivaatoista yleistettyjen koordinaattien suhteen. Jacobin matriisi muodostetaan kohdistamalla rajoitteisiin virtuaalinen siirtymä

$$\mathbf{C}_q \delta \mathbf{q} = 0 \quad (24)$$

jossa

$$\mathbf{C}_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial q_1} & \frac{\partial C_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial C_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial C_2}{\partial q_1} & \frac{\partial C_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial C_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial C_{n_c}}{\partial q_1} & \frac{\partial C_{n_c}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial C_{n_c}}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (25)$$

jossa n on järjestelmän yleistettyjen koordinaattien lukumäärä ja n_c rajoiteyhtälöiden lukumäärä. Kinemaattisesti analysoitavan järjestelmän Jacobin matriisi on neliömatriisi, koska jokaiseen järjestelmän vapausasteeseen kohdistuu rajoite.

Tietokoneavusteista analyysiä varten erityyppisten rajoitteiden osittaisderivaatat yleistettyjen koordinaattien suhteen kannattaa ratkaista valmiiksi analyttisessä muodossa. Tällöin Jacobin matriisin laskenta tapahtuu sijoittamalla yleistettyjen koordinaattien ja niveltä kuvaavien parametrien arvot yhtälöihin sekä sijoittamalla tulokset rajoitteiden ja yleistettyjen koordinaattien määräämiin kohtiin matriisia. Taulukossa 1 on esitetty eri perusrajoitteiden osittaisderivaatat.

Taulukko 1. Perusrajoitteiden osittaisderivaatat [5].

Rajoite	\mathbf{C}_{R_i}	\mathbf{C}_{R_j}	\mathbf{C}_{π_i}	\mathbf{C}_{π_j}
$C^{d1}(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$-\bar{\mathbf{a}}_j^T \mathbf{A}_j^T \mathbf{A}_i \tilde{\mathbf{a}}_i$	$-\bar{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_j \tilde{\mathbf{a}}_j$
$C^{d2}(\mathbf{a}_i, \mathbf{d}_{ij})$	$-\bar{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{A}_i^T$	$\bar{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{A}_i^T$	$(\bar{\mathbf{a}}_i^T \tilde{\mathbf{u}}_i^P - \mathbf{d}_{ij}^T \mathbf{A}_i \tilde{\mathbf{a}}_i)$	$-\bar{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_j \tilde{\mathbf{u}}_j^P$
$C^s(P_i, P_j)$	$-\mathbf{I}$	\mathbf{I}	$\mathbf{A}_i \tilde{\mathbf{u}}_i^P$	$-\mathbf{A}_j \tilde{\mathbf{u}}_j^P$

Termeissä \sim -operaattori tarkoittaa vinosymmetristä matriisia, joka määritellään yhtälön 26 mukaisesti

$$\tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Taulukossa 1 kiertymien suhteen esitetyt osittaisderivaatat \mathbf{C}_{π_i} ja \mathbf{C}_{π_j} eivät ole rajoitteiden osittaisderivaattoja yleistettyjen koordinaattien kiertymien suhteen. Yleistettyjen koordinaattien kiertymämuuttujathan voidaan valita melko vapaasti. Kyseessä ovat

osittaisderivaatat kappaleen i lokaalin koordinaatiston kiertymien suhteen, joista tosin voidaan ratkaista osittaisderivaatat esimerkiksi Eulerin parametrien suhteen:

$$\mathbf{C}_{\theta_i} = \mathbf{C}_{\pi_i} \overline{\mathbf{G}}_i \quad (27)$$

jossa $\overline{\mathbf{G}}_i$ on yhtälön 28 mukainen kuvaus Eulerin parametrien nopeuksista lokaaleihin kulmanopeuksiin [8]

$$\overline{\mathbf{G}}_i = 2\overline{\mathbf{E}}_i = 2 \begin{bmatrix} -\theta_{i1} & \theta_{i0} & \theta_{i3} & -\theta_{i2} \\ -\theta_{i2} & -\theta_{i3} & \theta_{i0} & \theta_{i1} \\ -\theta_{i3} & \theta_{i2} & -\theta_{i1} & \theta_{i0} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Vastaavasti voidaan rajoitteet kuvata käyttämällä muitakin yleistettyjä kulmamuuttujia, kunhan matriisi $\overline{\mathbf{G}}_i^i$ toteuttaa vaaditun kuvauksen.

2.7 Perusrajoitteiden toiset aikaderivaatat

Jacobin matriisin ja rajoitteiden aikaderivaattojen lisäksi kinemaattisessa analyysissä on tarpeen ratkaista rajoitteiden toiset aikaderivaatat \mathbf{C}_{tt} , yhtälö 21. Näitä derivaattojen arvoja käytetään myös dynaamisessa analyysissä, jossa ne sijoitetaan voimavektoriin. Rajoitteiden Jacobin matriisin ja integroitujen Lagrangen kertoimien tulosta voidaan ratkaista nivelissä vaikuttavat rajoitevoimat, kappale 3.1. Kuten Jacobin matriisinkin osalta on tietokoneavusteisen analyysin kannalta välttämätöntä ratkaista eri rajoitetyyppien toiset aikaderivaatat valmiiksi, jolloin ohjelmassa huolehditaan yleistettyjen koordinaattien ja parametritietojen sijoittamisesta, sekä rajoitteiden toisen derivaattavektorin \mathbf{Q}_d koostamisesta.

Tasotapauksissa käytössä on vain yksi globaali kulmamuuttuja, jolloin käsittely on varsin yksiselitteistä. Avaruustapauksissa käytetään kulmanopeusmuuttujina yleistettyjen koordinaattien nopeuksien sijaan lokaaleja kulmanopeuksia

$$\overline{\boldsymbol{\omega}} = \overline{\mathbf{G}}\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (29)$$

jolloin käytettävien matriisien dimensiot saattavat pienentyä, riippuen käytetyistä yleistetyistä kulmamuuttujista. Rajoitteiden toisen derivaattavektorin \mathbf{Q}_d termit saadaan differentioimalla taulukon 1 termit. Koska useimmat termit sisältävät kiertomatriisin \mathbf{A} hyödynnetään sen aikaderivaatan ratkaisemiseksi yhteyttä

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad (30)$$

Kohtisuoruusrajoitteen C^{d1} osittaisderivaatan differentiaaliksi saadaan [5]

$$\mathbf{Q}_d^{d1} = -\tilde{\mathbf{a}}_j^T [\mathbf{A}_j^T \mathbf{A}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j \mathbf{A}_j^T \mathbf{A}_i] \tilde{\mathbf{a}}_i + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_j^T \tilde{\mathbf{a}}_j \mathbf{A}_j^T \mathbf{A}_i \tilde{\mathbf{a}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \quad (31)$$

Vastaavasti C^{d2} -rajoitteen osittaisderivaatan differentiaali [5]

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_d^{d2} = & 2\bar{\boldsymbol{\omega}}_i^T \tilde{\mathbf{a}}_i \mathbf{A}_i^T (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j) + 2\bar{\mathbf{u}}_j^{PT} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j \mathbf{A}_j^T \mathbf{A}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \bar{\mathbf{a}}_i - \bar{\mathbf{u}}_i^{PT} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \bar{\mathbf{a}}_i \\ & - \bar{\mathbf{u}}_j^{PT} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j \mathbf{A}_j^T \mathbf{A}_i \bar{\mathbf{a}}_i - \mathbf{d}_{ij}^T \mathbf{A}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \bar{\mathbf{a}}_i \end{aligned} \quad (32)$$

Yhtenevyysrajoitteen \mathbf{C}^s osittaisderivaatan differentiaali [5]

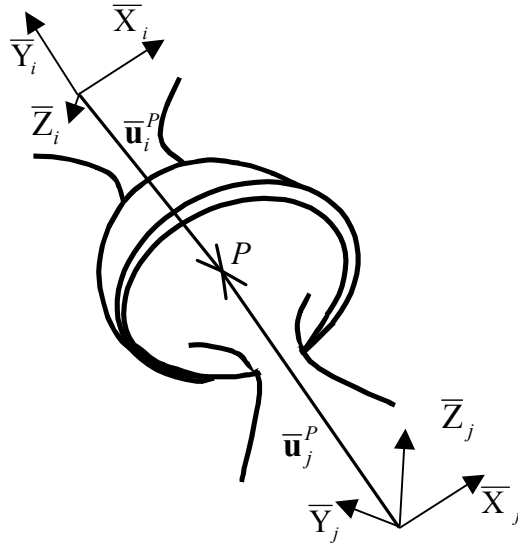
$$\mathbf{Q}_d^s = \mathbf{A}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \bar{\mathbf{u}}_i^P - \mathbf{A}_j \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j \bar{\mathbf{u}}_j^P \quad (33)$$

2.8 Nivelten muodostaminen perusrajoitteista

Perusrajoitteista ainoastaan yhtenevyysrajoite \mathbf{C}^s yksinään kuvaa fyysistä niveltä. Yhtenevyysrajoitteella voidaan nimittäin kuvata pallonivel, jossa kaikki kiertymät ovat vapaita mutta kappaleilla on yksi yhteinen piste. Monimutkaisempia niveliä muodostetaan yhdistämällä eri perusrajoitteita, jolloin saadaan eri määrän vapausasteita rajoittavia niveliä, joilla on fyysinen vastine. Seuraavassa esitetään muutamien yleisimmin käytettyjen nivelien muodostaminen rajoitteita yhdistämällä.

2.8.1 Pallonivel

Kahden kappaleen välinen pallonivel määritellään kuvan 10 mukaisesti yhtenevän pisteen P avulla.



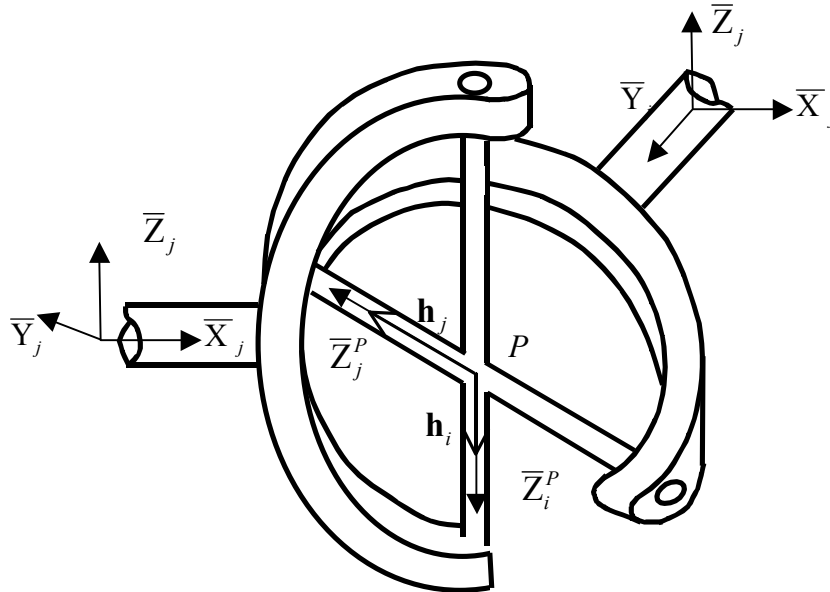
Kuva 10. Pallonivel.

Pallonivelen määrittää siis yhtälössä 11 määritelty kahden pisteen yhtenevyysrajoite:

$$\mathbf{C}^s(P_i, P_j) = \mathbf{0} \quad (34)$$

2.8.2 Kardaanimivel

Kardaanimivel, jota kutsutaan myös universaaliniiveksi tai Hookeen niveleksi, koostuu kahta kappaletta yhdistävästä ristikosta, jonka keskipiste on kiinteä molempien kappaleiden suhteen, kuva 11.



Kuva 11. Kardaanimivel.

Ristikon keskipiste pidetään paikoillaan yhtenevyysrajoitteen avulla. Ristikon varsien kohtisuoruus toisiinsa nähden varmistetaan vektoreiden \mathbf{h}_i ja \mathbf{h}_j välisellä kohtisuoruusrajoitteella C^{dl} . Kardaanimivelen rajoitteet voidaan kuvata yhtälöryhmällä

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^s(P_i, P_j) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^{dl}(\mathbf{h}_i, \mathbf{h}_j) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (35)$$

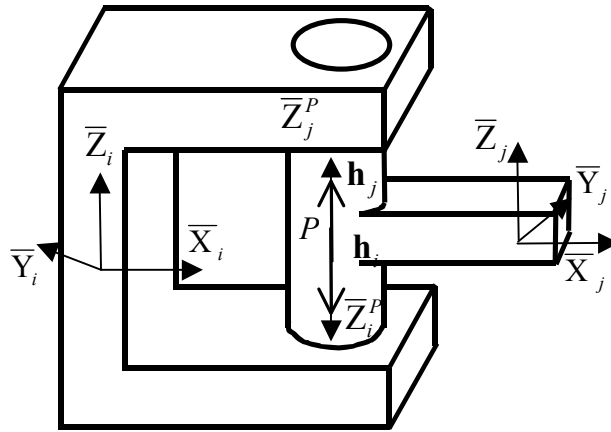
Kardaanimivel rajoittaa järjestelmästä neljä vapausastetta, kappaleiden välisen siirtymän sekä ristikon varsien välisen kiertymän.

2.8.3 Sarananivel

Sarananivel, kuva 12, sallii kahden kappaleen välisen kiertymän yhteisen akselin ympäri mutta estää siirtymän akselia pitkin. Nivelpiste P pidetään paikoillaan yhtenevyysrajoitteen avulla ja akselien yhdensuuntaisuudesta huolehditaan yhdensuuntaisuusrajoitteen \mathbf{C}^{p1} avulla. Sarananivelen rajoitteita kuvaa siten yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^s(P_i, P_j) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^{p1}(\mathbf{h}_i, \mathbf{h}_j) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (36)$$

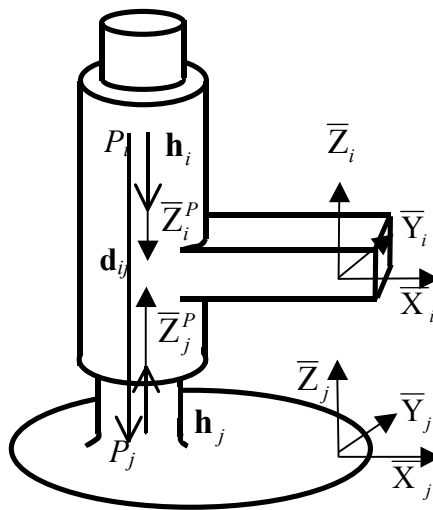
Sarananivel rajoittaa järjestelmästä viisi vapausastetta.



Kuva 12. Sarananivel.

2.8.4 Sylinterinivel

Sylinterinivel on toiminnaltaan hyvin lähellä sarananiveitä, se sallii sarananivelestä poiketen myös nivelen akselin suuntaisen siirtymän kappaleiden välillä, kuva 13. Mallinnuksen kannalta sylinterinivel eroaa sarananivelestä siinä, ettei kappaleilla on yhteistä pistettä.



Kuva 13. Sylinterinivel.

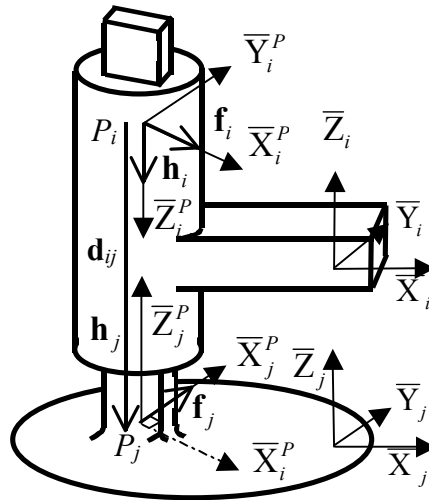
Kappaleiden välinen yhdensuuntaisuus toteutuu, kun vektorit \mathbf{h}_i ja \mathbf{h}_j ovat yhdensuuntaiset. Yhdensuuntaisuus määrätään C^{p1} -rajoitteen avulla. Tämä rajoite poistaa kaksi kappaleiden välistä kiertymää. Kappaleet voivat kuitenkin liikkua tasossa toisiinsa nähden, kunhan säilyttävät yhdensuuntaisuuden. Tämän liikkeen rajoittamiseksi vektori \mathbf{d}_{ij} on määritelty siten, että sillä on yhteisiä pisteitä vektorien \mathbf{h}_i ja \mathbf{h}_j kanssa. Kun vektorit \mathbf{h}_i ja \mathbf{d}_{ij} ovat myös yhdensuuntaiset, kappaleet voivat liikkua toisiinsa nähden ainoastaan nivelen akselin suuntaisesti. Sylinterinivel määritellään siis kahden yhdensuuntaisuusrajoitteen, C^{p1} ja C^{p2} , avulla:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{p1}(\mathbf{h}_i, \mathbf{h}_j) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^{p2}(\mathbf{h}_i, \mathbf{d}_{ij}) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (37)$$

Sylinterinivel rajoittaa järjestelmästä neljä vapausastetta.

2.8.5 Translaationivel

Translaationivel toimii kuten sylinterinivel mutta lisäksi se rajoittaa kappaleiden välisen kiertymän nivelen akselin ympäri.



Kuva 14. Translaationivel.

Translaationivelen kuvaamiseen käytetään samaa yhtälöryhmää, kuin sylinterinivelenkin kohdalla, täydennettynä kappaleiden välisen rotaation estävällä rajoitteella. Kiertymä estetään määrittämällä kappaleisiin yksikkövektorit \mathbf{f}_i ja \mathbf{f}_j , jotka ovat kohtisuorassa toisiinsa nähden, kuva 14. Kohtisuoruusehtona käytetään C^{d1} -rajoitetta. Translaationivel rajoittaa järjestelmästä viisi vapausastetta.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{p1}(\mathbf{h}_i, \mathbf{h}_j) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^{p2}(\mathbf{h}_i, \mathbf{d}_{ij}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^{d1}(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j) &= 0 \end{aligned} \quad (38)$$

Monimutkaisempien, yhdistettyjen nivelten muodostamista on käsitelty lähteissä [5],[6] ja [7]. Yhdistetyt nivelet koostuvat yleensä kahdesta eri perusnivelestä, joita yhdistävä jäykkä kappale voidaan olettaa ratkaisun kannalta merkityksettömäksi. Kappale korvataan käyttämällä sen tilalla useimmiten nivelten väliseen etäisyyteen liittyvää rajoitetta. Tällaisia yhdistettyjä niveliä ovat esimerkiksi pallo-pallo, sarana-pallo, sarana-sylinteri tai sarana-translaatio -nivelet

3 MEKANISMIEN DYNAMIIKAN MALLINNUSMENETELMIÄ

Mekanismien erityyppiset mallinnusmenetelmät ovat useimmiten johdannaisia Lagrangen menetelmästä. Numeerista ratkaisun mahdollistamiseksi menetelmän avulla muodostettua differentiaali-algebraaliyhtälöryhmää joudutaan muokkaamaan esim. derivoimalla rajoiteyhtälöitä kahteen kertaan. Menetelmän alkuperäisessä numeerisissa ratkaisuisissa kaikki mekanisme kuvaavat yleistetyt koordinaatit integroidaan jokaisella aika-askeleella. Tästä perusmenetelmästä johdetuissa menetelmissä riippumattomat yleistetyt koordinaatit joko integroidaan ja riippuvat koordinaatit ratkaistaan rajoiteyhtälöiden perusteella tai yhtälöryhmän kokoa pienennetään esim. käyttämällä nopeus- ja kiihtyvyyssanalyysissä eri kiertymäkoordinaatteja kuin asema-analyysissä. Eri menetelmiä yhdistävänä piirteenä voidaan mainita yleistettyjen koordinaattien käyttö.

3.1 Lagrangen menetelmä

Lagrangen menetelmän johtamisen peruslähtökohtana on virtuaalisen työn periaate, jonka mukaan jäykän kappaleen i inertiaivoimien tekemä virtuaalinen työ on

$$\delta W_{ii} = \int_{V_i} \rho_i \dot{\mathbf{r}}_i^T \delta \mathbf{r}_i dV_i \quad (39)$$

jossa ρ_i ja V_i ovat jäykän kappaleen tiheys ja tilavuus.

3.1.1 Kappaleen nopeus ja kiihtyvyys

Jäykän kappaleen i satunnaisen pisteen nopeus yleistettyjen koordinaattien avulla ilmaistuna saadaan derivoimalla yhtälö 1 ajan suhteen

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{R}}_i + \dot{\mathbf{A}}_i \bar{\mathbf{u}}_i + \mathbf{A}_i \dot{\bar{\mathbf{u}}}_i \quad (40)$$

Kiertomatriisin aikaderivaatta [7] voidaan lausua muodossa:

$$\dot{\mathbf{A}}_i = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{A}_i \quad (41)$$

jossa

$$\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{G}_i \dot{\boldsymbol{\theta}}_i \quad (42)$$

ja \mathbf{G}_i on yhtälön 43 mukainen kuvaus Eulerin parametrien nopeuksista globaaleihin kulmanopeuksiin [8]

$$\mathbf{G}_i = 2\mathbf{E}_i = 2 \begin{bmatrix} -\theta_{i1} & \theta_{i0} & -\theta_{i3} & \theta_{i2} \\ -\theta_{i2} & \theta_{i3} & \theta_{i0} & -\theta_{i1} \\ -\theta_{i3} & -\theta_{i2} & \theta_{i1} & \theta_{i0} \end{bmatrix} \quad (43)$$

Tämäkin kuvaus on mahdollista tehdä käyttäen muitakin kiertymäkoordinaatteja kuin Eulerin parametreja, kunhan matriisi \mathbf{G}_i toteuttaa vaaditun kuvauksen. Jäykän kappaleen tapauksessa $\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_i = 0$, jolloin yhtälö 40 saadaan muotoon:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{R}}_i + \dot{\mathbf{A}}_i \tilde{\mathbf{u}}_i = \dot{\mathbf{R}}_i + \mathbf{A}_i (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \times \tilde{\mathbf{u}}_i) = \dot{\mathbf{R}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{u}_i = \dot{\mathbf{R}}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{u}_i \quad (44)$$

Kappaleen i satunnaisen pisteen kiihtyvyys saadaan derivoimalla yhtälö 40 ajan suhteen ja huomioimalla kappaleen rakenteellinen jäykkyys, $\ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_i = 0$

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \ddot{\mathbf{R}}_i + \ddot{\mathbf{A}}_i \tilde{\mathbf{u}}_i \quad (45)$$

Differentioidaan yhtälö 41 ajan suhteen

$$\ddot{\mathbf{A}}_i = \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_i \mathbf{A}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \dot{\mathbf{A}}_i \quad (46)$$

ja huomioimalla yhtälö 41

$$\ddot{\mathbf{A}}_i = \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_i \mathbf{A}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{A}_i = \boldsymbol{\alpha}_i \mathbf{A}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^2 \mathbf{A}_i \quad (47)$$

Pisteen i kiihtyvyydeksi saadaan

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \ddot{\mathbf{R}}_i - \tilde{\mathbf{u}}_i \boldsymbol{\alpha}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^2 \mathbf{u}_i \quad (48)$$

Differentioidaan yhtälö 42 ajan suhteen

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{G}_i \ddot{\boldsymbol{\theta}}_i + \dot{\mathbf{G}}_i \dot{\boldsymbol{\theta}}_i \quad (49)$$

ja sijoitetaan tulos kiihtyvyyden yhtälöön 48

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \ddot{\mathbf{R}}_i - \tilde{\mathbf{u}}_i \mathbf{G}_i \ddot{\boldsymbol{\theta}}_i + \mathbf{a}_{iv} \quad (50)$$

jossa \mathbf{a}_{iv} sisältää kiihtyvyyden normaalikomponentit, sekä nopeuden neliöstä riippuvat tangentialikomponentit

$$\mathbf{a}_{iv} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^2 \mathbf{u}_i - \tilde{\mathbf{u}}_i \dot{\mathbf{G}}_i \dot{\boldsymbol{\theta}}_i \quad (51)$$

3.1.2 Yleistetyt inertiaivoimat

Liikkeyhtälöiden muodostamiseksi on tarpeellista tarkastella kappaleeseen kohdistuvia inertiaivoimia. Sijoittamalla inertiaivoimien virtuaalisen työn lausekkeeseen 39 kappaleen i satunnaisen pisteen aseman virtuaalinen muutos [7]

$$\delta \mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{A}_i \tilde{\mathbf{u}}_i \overline{\mathbf{G}}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{R}_i \\ \delta \boldsymbol{\theta}_i \end{bmatrix} \quad (52)$$

Saadaan

$$\delta \mathcal{W}_{ii} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}_i^T & \dot{\boldsymbol{\theta}}_i^T \end{bmatrix} \left(\int_{V_i} \rho_i \left(\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}_i \tilde{\mathbf{u}}_i \overline{\mathbf{G}}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{A}_i \tilde{\mathbf{u}}_i \overline{\mathbf{G}}_i \end{bmatrix} + \mathbf{a}_{iv}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{A}_i \tilde{\mathbf{u}}_i \overline{\mathbf{G}}_i \end{bmatrix} \right) dV_i \right) \begin{bmatrix} \delta \mathbf{R}_i \\ \delta \boldsymbol{\theta}_i \end{bmatrix} \quad (53)$$

joka voidaan esittää muodossa

$$\delta \mathcal{W}_{ii} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{M}_i - \mathbf{Q}_{iv}^T \end{bmatrix} \delta \mathbf{q}_i \quad (54)$$

jossa \mathbf{M}_i on kappaleen i massamatriisi

$$\mathbf{M}_i = \int_{V_i} \rho_i \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{A}_i \tilde{\mathbf{u}}_i \bar{\mathbf{G}}_i \\ \text{symmetrinen} & \bar{\mathbf{G}}_i^T \tilde{\mathbf{u}}_i \tilde{\mathbf{u}}_i \bar{\mathbf{G}}_i \end{bmatrix} dV_i \quad (55)$$

Neliöllinen nopeusvektori \mathbf{Q}_{iv} sisältää nopeuksien neliöistä riippuvat inertiaivoimat

$$\mathbf{Q}_{iv} = -\int_{V_i} \rho_i \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\bar{\mathbf{G}}_i^T \tilde{\mathbf{u}}_i \mathbf{A}_i^T \end{bmatrix} \mathbf{a}_{iv} dV_i = \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_{iv})_{\mathbf{R}} \\ (\mathbf{Q}_{iv})_{\theta} \end{bmatrix} \quad (56)$$

3.1.3 Massamatriisi

Jäykän kappaleen i massamatriisi \mathbf{M}_i voidaan esittää muodossa

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{iRR} & \mathbf{m}_{iR\theta} \\ \mathbf{m}_{i\theta R} & \mathbf{m}_{i\theta\theta} \end{bmatrix} \quad (57)$$

jossa

$$\mathbf{m}_{iRR} = m_i \mathbf{I} \quad (58)$$

$$\mathbf{m}_{iR\theta} = \mathbf{m}_{i\theta R}^T = -\mathbf{A}_i \left[\int_{V_i} \rho_i \tilde{\mathbf{u}}_i dV_i \right] \bar{\mathbf{G}}_i \quad (59)$$

$$\mathbf{m}_{i\theta\theta} = \bar{\mathbf{G}}_i^T \bar{\mathbf{I}}_{i\theta\theta} \bar{\mathbf{G}}_i \quad (60)$$

m_i on kappaleen i massa ja $\bar{\mathbf{I}}_{i\theta\theta}$ on jäykän kappaleen inertiatensori

$$\bar{\mathbf{I}}_{i\theta\theta} = \int_{V_i} \rho_i \tilde{\mathbf{u}}_i^T \tilde{\mathbf{u}}_i dV_i \quad (61)$$

3.1.4 Neliöllinen nopeusvektori

Neliöllinen nopeusvektori saadaan helpommin ratkaistavaan muotoon sijoittamalla yhtälöön 56 yhtälön 51 kiihtyvyysskomponentit määriteltynä lokaalissa koordinaatistossa

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}_{iv})_{\mathbf{R}} &= -\mathbf{A}_i \int_{V_i} \rho_i \left[\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^2 \tilde{\mathbf{u}}_i - \tilde{\mathbf{u}}_i \dot{\bar{\mathbf{G}}}_i \dot{\boldsymbol{\theta}}_i \right] dV_i \\ (\mathbf{Q}_{iv})_{\theta} &= \bar{\mathbf{G}}_i^T \int_{V_i} \rho_i \left[\tilde{\mathbf{u}}_i^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^2 \tilde{\mathbf{u}}_i - \tilde{\mathbf{u}}_i^T \tilde{\mathbf{u}}_i \dot{\bar{\mathbf{G}}}_i \dot{\boldsymbol{\theta}}_i \right] dV_i \end{aligned} \quad (62)$$

jotka voidaan edelleen hyödyntämällä inertiatensorin määritelmää esittää muodossa [7]

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}_{iv})_{\mathbf{R}} &= -\mathbf{A}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^2 \left[\int_{V_i} \rho_i \tilde{\mathbf{u}}_i dV_i \right] + \mathbf{A}_i \left[\int_{V_i} \rho_i \tilde{\mathbf{u}}_i dV_i \right] \dot{\bar{\mathbf{G}}}_i \dot{\boldsymbol{\theta}}_i \\ (\mathbf{Q}_{iv})_{\theta} &= \bar{\mathbf{G}}_i^T \left[\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \times (\bar{\mathbf{I}}_{i\theta\theta} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i) + \bar{\mathbf{I}}_{i\theta\theta} \dot{\bar{\mathbf{G}}}_i \dot{\boldsymbol{\theta}}_i \right] \end{aligned} \quad (63)$$

3.1.5 Yleistetyt voimat

Yleistetyillä voimilla tarkoitetaan yleistettyihin koordinaatteihin kohdistuvia voimia. Yleistettyjen voimien periaatteen avulla voidaan kappaleen pisteessä vaikuttavat ulkoiset

voimat ja momentit kohdistaa kappaleen yleistettyihin koordinaatteihin. Menetelmän johtamiseksi tarkastellaan kappaleeseen i vaikuttavan voiman tekemää virtuaalista työtä, joka on voimavektorin ja voiman vaikutuspisteen virtuaalisen siirtymän pistetulo

$$\delta W_{ie} = \mathbf{F}_i^T \delta \mathbf{r}_{iP} \quad (64)$$

Sovelletaan pisteen P aseman virtuaaliseen siirtymään yhtälöä 52, jolloin virtuaaliseksi työksi saadaan

$$\delta W_{ie} = \mathbf{F}_i^T \delta \mathbf{R}_{iP} - \mathbf{F}_i^T \bar{\mathbf{u}}_{iP} \mathbf{G}_i \delta \boldsymbol{\theta}_i \quad (65)$$

Yhtälö 65 voidaan esittää muodossa

$$\delta W_{ie} = \mathbf{F}_{iR}^T \delta \mathbf{R}_{iP} + \mathbf{F}_{i\theta}^T \delta \boldsymbol{\theta}_i \quad (66)$$

jossa

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{iR} &= \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_{i\theta} &= -\mathbf{G}_i^T \bar{\mathbf{u}}_{iP}^T \mathbf{F}_i \end{aligned} \quad (67)$$

$\mathbf{F}_{i\theta}$ kuvaa voimakomponentin siirrosta lokaaliin koordinaatistoon aiheutuvaa momenttivaikutusta. Kappaleeseen vaikuttavien globaalien momenttien \mathbf{M}_{ig} kuvaus yleistetyissä koordinaateissa on

$$\mathbf{F}_{i\theta} = \mathbf{G}_i^T \mathbf{M}_{ig} \quad (68)$$

vastaavasti lokaalissa koordinaatistossa kuvattujen momenttien kuvaus yleistetyissä koordinaateissa

$$\mathbf{F}_{i\theta} = \mathbf{G}_i^T \mathbf{A}_i \bar{\mathbf{M}}_{il} \quad (69)$$

Jos kappaleeseen vaikuttaa useita ulkoisia voimia ja momentteja voidaan yhtälö 66 esittää muodossa

$$\delta W_{ie} = (\mathbf{Q}_{ie})_R^T \delta \mathbf{R}_{iP} + (\mathbf{Q}_{ie})_\theta^T \delta \boldsymbol{\theta}_i \quad (70)$$

jossa $(\mathbf{Q}_{ie})_R$ ja $(\mathbf{Q}_{ie})_\theta$ ovat yleistettyihin siirtymä- ja kiertymäkoordinaatteihin liittyviä yleistettyjä voimia

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}_{ie})_R &= \sum_{j=1}^{n_f} \mathbf{F}_{ij} \\ (\mathbf{Q}_{ie})_\theta &= \mathbf{G}_i^T \left[\sum_{j=1}^{n_m} \mathbf{M}_{igj} + \sum_{j=1}^{n_m} \mathbf{A}_i \bar{\mathbf{M}}_{ilj} + \sum_{k=1}^{n_f} (\mathbf{u}_{ik} \times \mathbf{F}_{ik}) \right] \end{aligned} \quad (71)$$

3.1.6 Likeyhtälöiden muodostaminen

Nivelettömän dynaamisen järjestelmän likeyhtälöt voidaan muodostaa soveltamalla D'Alembertin periaatetta. D'Alembertin periaatteesta voidaan johtaa dynamiikan virtuaalisen

työn periaate, jonka mukaan jäykän kappaleen i inertiaivoimien tekemän virtuaalisen työn ja kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien tekemän virtuaalisen työn on oltava yhtäsuuria

$$\delta W_{ii} = \delta W_{ie} \quad (72)$$

Kun yhtälöön 72 sijoitetaan virtuaalisen työn lausekkeet saadaan rajoitteettoman kappaleen i liikeyhtälöksi

$$[\mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{Q}_{iv}]^T \delta \mathbf{q}_i = \mathbf{Q}_{ie}^T \delta \mathbf{q}_i \quad (73)$$

Koska rajoitteettomassa tapauksessa yleistetyt koordinaatit ovat riippumattomia, voidaan yhtälö esittää muodossa

$$\mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{Q}_{ie} - \mathbf{Q}_{iv} \quad i = 1, 2, \dots, n_b \quad (74)$$

ja edelleen matriisimuodossa jaoteltuna siirtymä- ja kiertymäkoordinaatteihin

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_{iRR} & \mathbf{m}_{iR\theta} \\ \mathbf{m}_{i\theta R} & \mathbf{m}_{i\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{R}}_i \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_{ie})_R \\ (\mathbf{Q}_{ie})_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_{iv})_R \\ (\mathbf{Q}_{iv})_\theta \end{bmatrix} \quad (75)$$

jossa n_b on jäykkien kappaleiden lukumäärä. Liikerajoitteet voidaan huomioida Lagrangen kertoimien avulla

$$\mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_{ie} + \mathbf{Q}_{iv} \quad i = 1, 2, \dots, n_b \quad (76)$$

Mekanismin liikeyhtälön numeerisesti ratkaistava muoto saadaan, kun huomioidaan rajoiteyhtälöiden toiset aikaderivaatat, yhtälö 21

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C}_q^T \\ \mathbf{C}_q & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_v \\ \mathbf{Q}_d \end{bmatrix} \quad (77)$$

Yhtälöstä voidaan ratkaista yleistettyjen koordinaattien kiihtyvyydet sekä Lagrangen kertoimet, joiden avulla voidaan ratkaista yleistetyt rajoitevoimat $\mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda}$. Saadun numeerisen ratkaisun täytyy toteuttaa yhtälö 22. Menetelmällä muodostetut liikeyhtälöryhmät sisältävät kaikki yleistetyt koordinaatit ja liikerajoitteet ja ovat siten suuria.

3.2 Sijoitusmenettely

Sijoitusmenettely poikkeaa alkuperäisestä Lagrangen menetelmän numeerisesta ratkaisusta rajoiteyhtälöiden käsittelyn osalta. Menetelmän tarkoituksena on pienentää numeerisesta ratkaisusta aiheutuvaa rajoiteyhtälöihin kohdistuvaa virhettä. Menetelmässä integroidaan ainoastaan riippumattomia koordinaatteja ja riippuvat koordinaatit ratkaistaan rajoiteyhtälöiden perusteella [9]. Tällöin yhtälön 15 toteutuminen varmistetaan kaikilla aika-askelilla. Sijoitusmenettelyssä järjestelmän yleistetyt koordinaatit jaetaan ennen analyysiä riippuviin \mathbf{q}_d ja riippumattomiin \mathbf{q}_i koordinaatteihin.

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i^T & \mathbf{q}_d^T \end{bmatrix} \quad (78)$$

Riippumattomia koordinaatteja on järjestelmän vapausasteiden lukumäärän ($n_b - n_c$) ja riippuvia koordinaatteja rajoiteyhtälöiden lukumäärän n_c verran. Sijoittamalla koordinaattien jaottelu Jacobin matriisiin yhtälöön 24 saadaan

$$\mathbf{C}_{q_i} \delta \mathbf{q}_i + \mathbf{C}_{q_d} \delta \mathbf{q}_d = 0 \quad (79)$$

jossa \mathbf{C}_{q_d} on valittu siten, että se on $n_c \times n_c$ ei-singulaarinen matriisi. Riippuvien koordinaattien virtuaalinen siirtymä voidaan ratkaista

$$\delta \mathbf{q}_d = -\mathbf{C}_{q_d}^{-1} \mathbf{C}_{q_i} \delta \mathbf{q}_i \quad (80)$$

tai

$$\delta \mathbf{q}_d = \mathbf{C}_{di} \delta \mathbf{q}_i \quad (81)$$

jossa

$$\mathbf{C}_{di} = -\mathbf{C}_{q_d}^{-1} \mathbf{C}_{q_i} \quad (82)$$

Yleistettyjen koordinaattien virtuaalinen siirtymä voidaan esittää riippumattomien koordinaattien muutoksena

$$\delta \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q}_i \\ \delta \mathbf{q}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{C}_{di} \end{bmatrix} \delta \mathbf{q}_i \quad (83)$$

Rajoiteyhtälöt voidaan sijoittaa rajoitteettomaan liikeyhtälöön

$$\left[\mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{Q}_{iv} - \mathbf{Q}_{ie} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{C}_{di} \end{bmatrix} \right] = 0 \quad (84)$$

Yhtälön integrointi on hankalaa, koska yleistettyjen koordinaattien kiihtyvyyksvektori sisältää kaikkien koordinaattien kiihtyvyydet. Ongelma ratkaistaan soveltamalla koordinaattien jaottelua yhtälöön 23

$$\ddot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{C}_{di} \ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_d \quad (85)$$

jossa

$$\mathbf{C}_d = -\mathbf{C}_{q_d}^{-1} \left[(\mathbf{C}_{q_i} \dot{\mathbf{q}})_q \dot{\mathbf{q}} + 2\mathbf{C}_{q_i} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{ii} \right] \quad (86)$$

Yleistettyjen koordinaattien kiihtyvyydet voidaan lausua koordinaattien jaottelun avulla

$$\ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_i \\ \ddot{\mathbf{q}}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_i \\ \mathbf{C}_{di} \ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{C}_{di} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_i + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{C}_d \end{bmatrix} \quad (87)$$

merkitsemällä $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{C}_{di} \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{C}_d \end{bmatrix}$ saadaan liikeyhtälö lausuttua muodossa

$$\mathbf{B}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_v - \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_e = 0 \quad (88)$$

ja edelleen

$$\mathbf{B}^T \mathbf{M} \mathbf{B} \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{B}^T \mathbf{M} \mathbf{D} - \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_v - \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_e = 0 \quad (89)$$

Menetelmän ongelmina ovat monimutkaiset, erittäin epälineaariset riippuvien koordinaattien sekä rajoitteiden kuvaukset. Lisäksi koordinaattien valinnasta riippuen on olemassa numeerisen singulariteetin mahdollisuus. Singulariteetin tapauksessa koordinaattien jaottelua täytyy vaihtaa, muunnosmatriisit muodostaa uudestaan ja ratkaisua jatkaa valituilla koordinaateilla. Koordinaattien automaattiseen jaotteluun soveltuvia algoritmeja on esitetty lähteissä [6] ja [9].

3.3 Newton-Euler -liikeyhtälöt

Newton-Euler -menetelmä [5],[6],[7],[8],[10] poikkeaa Lagrangen menetelmästä kappaleen lokaalin koordinaatiston sijoittamiseen liittyvien oletusten sekä kiertymien käsittelyn osalta. Lagrangen menetelmässä kiertymien asema, -nopeus- ja kiihtyvyyssanalyysissä käsitellään yleistettyjä koordinaatteja. Newton-Euler -menetelmässä kappaleiden kiertymien asema, -nopeus- ja kiihtyvyyssanalyysissä käytetään globaaleja kulmanopeuksia. Menetelmässä oletetaan, että jäykän kappaleen lokaali koordinaatisto on sijoitettu sen massakeskipisteeseen, jolloin menetelmä ei enää sovellu esim. joustavien kappaleiden käsittelyyn. Lokaalin koordinaatiston sijoittaminen jäykän kappaleen massakeskipisteeseen huomioidaan yhtälöissä 59 ja 63 jolloin

$$\mathbf{m}_{iR\theta} = 0, \quad \mathbf{m}_{i\theta R}^T = 0, \quad (\mathbf{Q}_{iv})_R = 0 \quad (90)$$

liikeyhtälö 75 yksinkertaistuu muotoon

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_{iRR} & 0 \\ 0 & \mathbf{m}_{i\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{R}}_i \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_{ie})_R \\ (\mathbf{Q}_{ie})_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (\mathbf{Q}_{iv})_\theta \end{bmatrix} \quad (91)$$

Lisäksi käytettäessä kiertymien kuvauksessa globaaleja kulmanopeuksia voidaan osoittaa [8], että

$$\mathbf{I}_{i\theta\theta} \boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{F}_{i\theta} - \boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{I}_{i\theta\theta} \boldsymbol{\omega}_i) \quad (92)$$

jossa $\boldsymbol{\alpha}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}}_i$, jolloin yhtälö 91 voidaan esittää muodossa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_{iRR} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{i\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{R}}_i \\ \boldsymbol{\alpha}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_{ie})_R \\ \mathbf{F}_{i\theta} - \boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{I}_{i\theta\theta} \boldsymbol{\omega}_i) \end{bmatrix} \quad (93)$$

Rajoitteet huomioidaan kappaleeseen vaikuttavina ulkoisina voimina, joten voimavektorien muodostaminen on monimutkaisempaa. Numeerisen ratkaisun varmistamiseksi kiertymien numeerinen analyysi tehdään yleensä Eulerin parametrien avulla, tällöin integroitavien koordinaattimuuttujien määrä kasvaa $n_b \times 11$:sta $n_b \times 12$:a, verrattuna globaalien kulmien käyttöön. Alkuperäisessä Lagrangen menetelmässä koordinaattimuuttujien lukumäärä on $n_b \times$

14. Eulerin parametreihin liittyvät normalisointirajoitteet käsitellään erillisinä rajoitteina. Newton-Euler –menetelmää on mahdollista soveltaa myös Lagrangen kertoimien avulla, jolloin rajoitteet lisätään liikeyhtälöön yhtälön 76 mukaisesti. Tällöin rajoiteyhtälöiden Jacobin matriisiin ja toisten aikaderivaattojen termit eivät ole taulukon 1 ja yhtälöiden 31,32 ja 33 mukaisia vaan niiden Lagrangen menetelmään verrattuna yksinkertaisempi muoto on esitetty esim. lähteessä [6].

4 NUMEERISIA INTEGROINTIMENETELMIÄ

Numeerista integrointia tarvitaan mekanismien dynamiikkaa kuvaavien differentiaali-algebraalisyhtälöiden (DAE) ratkaisuun ajan funktiona. Useimmat integrointimenetelmät on alun perin tarkoitettu differentiaaliyhtälöiden (ODE) ratkaisuun jolloin yhtälöryhmään liitetyt niveliä kuvaavat algebraaliset rajoiteyhtälöt saattavat aiheuttaa ongelmia. Ratkaisua varten mekanismia kuvaava yhtälöryhmä onkin muokattava differentiaaliyhtälöiksi käyttämällä rajoiteyhtälöiden differentointia. Mekaanisen systeemin suoraa dynamiikkaa kuvaava yhtälöryhmä voidaan numeerisesti ratkaista kolmella eri periaatteella:

- Integroidaan suoraan liikeyhtälöä ja toivotaan numeerisen integroinnin olevan niin tarkka, ettei rikota rajoitteita.
- Yhtälön yleistetyt koordinaatit jaetaan riippuviin ja riippumattomiin koordinaatteihin, eli käytetään sijoitusmenettelyä. Integrointi kohdistetaan ainoastaan systeemin riippumattomiin koordinaatteihin, jonka jälkeen riippuvat koordinaatit ratkaistaan rajoiteyhtälöiden avulla. Integrointivirhe riippumattomissa koordinaateissa heijastuu näin suoraan riippuviin koordinaatteihin.
- Kaikki yhtälön yleistetyt koordinaatit integroidaan, jonka jälkeen tarkennetaan riippuvien koordinaattien tulosta rajoiteyhtälöiden avulla.

Tarkemmin mekanismeja kuvaavien yhtälöryhmien numeerista ratkaisua on tarkasteltu lähteissä [5], [6],[7],[10] ja [11]

4.1 Yksiaskelmenetelmät

Yksiaskelmenetelmissä ei tarvita tietoa yhtälöryhmän arvoista edellisillä aika-askeleilla. Tietokonesovellusten osalta tämä tarkoittaa algoritmin varaavan vähemmän muistia kuin moniaskelmenetelmiin perustuvat algoritmit. Yleisesti menetelmät on tarkoitettu ensimmäisen kertaluvun yhtälöryhmien ratkaisuun mutta myös toisen kertaluvun yhtälöryhmien ratkaisuun soveltuvia menetelmiä on kehitetty, esimerkkinä Runge-Kutta-Nyström –menetelmä. Mekanismin tapauksessa tämä tarkoittaa sitä, että järjestelmää ei tarvitse jakaa erikseen integroitaviin nopeuksiin ja asemiin vaan asemat saadaan ratkaistua suoraan, kun tunnetaan kiihtyvyyksien arvot.

Tarkastellaan yleisesti ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmää

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \quad (94)$$

Oletetaan että \mathbf{f} on tarkasteluvälillä jatkuvasti differentioituva ajan t ja \mathbf{y} :n suhteen, tällöin yhtälöryhmän arvoa aika-askeleella $n+1$ voidaan approksimoida Taylorin sarjakehitelmän avulla

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \Delta t \mathbf{y}'(t_n) + \frac{\Delta t^2}{2!} \mathbf{y}''(t_n) + \dots \quad (95)$$

jossa Δt on aika-askel ja

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}) \quad (96)$$

$$\mathbf{y}'' = \mathbf{f}' = \mathbf{f}_t + \mathbf{f}_y \mathbf{f} \quad (97)$$

Menetelmä on tarkka mutta sen käyttö vaatii integroitavasta funktiosta korkeampia derivaattoja, joiden ratkaisu voi olla hankalaa. Siitä onkin kehitetty edelleen menetelmiä, joissa korkeamman asteen derivaatat jätetään huomioimatta. Eulerin menetelmä approksimoi Taylorin sarjakehitelmää käyttämällä sen kahta ensimmäistä termiä, yhtälöryhmän arvoa aika-askeleella, sekä yhtälöryhmän ensimmäisen derivaatan arvoa aika-askeleella

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \Delta t \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) \quad (98)$$

Menetelmä on erittäin yksinkertainen mutta sen ongelmina ovat sen heikko tarkkuus sekä sen vaatima pieni aika-askel. Jos aika-askelta joudutaan pienentämään paljon, kasvavat pyöristysvirheet suuriksi ja tekevät menetelmästä käyttökeltottoman. Lisäksi integroinnin virhe lisääntyy järjestelmän taajuuden kasvaessa, eikä menetelmä sovellu voimakkaasti epälinearisille järjestelmille

Runge-Kutta -menetelmissä pyritään mahdollisimman lähelle Taylorin sarjakehitelmää käyttäen ainoastaan yhtälöryhmän ja sen ensimmäisten derivaattojen arvoja. Tällöin välttyään

työläältä korkeamman asteluvun derivaattojen laskennalta. Yhtälöryhmän derivaatan arvo tosin joudutaan ratkaisemaan useissa pisteissä. Menetelmää on sovellettu paljon ja algoritmina se on varsin yksinkertainen. Saadut tulokset ovat tarkempia kuin Eulerin menetelmällä saadut mutta vaadittu laskentateho on yleisimmin käytetyllä neljännen kertaluvun menetelmällä noin nelinkertainen verrattuna Eulerin menetelmään.

Toisen kertaluvun Runge-Kutta –menetelmässä, joka tunnetaan myös parannettuna Eulerin menetelmänä, Heunin menetelmänä tai muunnettuna trapetsoidimenetelmänä, yhtälöryhmän \mathbf{y} arvoa aika-askeleella $n+1$ approksimoidaan

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2) \quad (99)$$

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) \quad (100)$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(t_n + \Delta t, \mathbf{y}_n + \Delta t\mathbf{k}_1) \quad (101)$$

Neljännen kertaluvun Runge-Kutta –menetelmässä integroitavan yhtälöryhmän arvoa approksimoidaan seuraavasti

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \quad (102)$$

$$\mathbf{k}_1 = \Delta t \cdot \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) \quad (103)$$

$$\mathbf{k}_2 = \Delta t \cdot \mathbf{f}\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1\right) \quad (104)$$

$$\mathbf{k}_3 = \Delta t \cdot \mathbf{f}\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2\right) \quad (105)$$

$$\mathbf{k}_4 = \Delta t \cdot \mathbf{f}(t_n + \Delta t, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_3) \quad (106)$$

Runge-Kutta – ja Eulerin –menetelmät ovat *eksplisiittisiä* menetelmiä, koska niissä yhtälöryhmän oikea puoli ei ole riippuvainen \mathbf{y}_{n+1} :stä.

4.2 Moniaskelmenetelmät

Moniaskelmenetelmissä integrointialgoritmi vaatii tietoa yhtälöryhmän arvoista aikaisemmilla aika-askeleilla. Toisin kuin yksiaskelmenetelmät nämä eivät ole itsekäynnistyviä, vaan vaativat astelukunsa verran jollakin toisella algoritmilla laskettuja tuloksia aikaisemmilta aika-askelilta. Moniaskelmenetelmät ovat usein *implisiittisiä*, koska yhtälöryhmän oikean puolen arvo riippuu \mathbf{y}_{n+1} :stä. Implisiittiset menetelmät ovat tarkempia ja stabiilimpia kuin eksplisiittiset mutta ratkaisu vaatii iteraatiota ja sitä kautta laskennallinen tehokkuus on heikompi. Yleisesti moniaskelmenetelmät voidaan esittää yhtälön 107 mukaisesti.

$$\sum_{j=0}^{p+1} a_j \mathbf{y}_{n+1-j} + \Delta t \sum_{j=0}^k b_j \mathbf{f}(t_{n+1-j}, \mathbf{y}_{n+1-j}) = 0 \quad (107)$$

jossa a_j ja b_j ovat menetelmää kuvaavia vakioita. Jos $b_0 = 0$ on menetelmä eksplisiittinen. Mitä enemmän termejä yhtälössä 107 huomioidaan, sitä tarkempi on integroinnin tulos. Samalla vaadittu muistin määrä kasvaa ja se saattaa aiheuttaa ongelmia.

Taulukko 2. Adams-Bashforth –menetelmän kertoimia [11].

k	a_0	a_1	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
1	1	1	0	1				
2	2	2	0	-3	1			
3	12	12	0	-23	16	-5		
4	24	24	0	-55	59	-37	9	
5	720	720	0	-1901	2774	-2616	1274	-251

Eksplisiittisiä, $p=0$, Adams-Bashforth –menetelmiä kuvaavia kertoimia on esitetty taulukossa 2. Yleisimmin käytetty menetelmä on neljännen kertaluvun menetelmä

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{\Delta t}{24} (55\mathbf{f}_n - 59\mathbf{f}_{n-1} + 37\mathbf{f}_{n-2} - 9\mathbf{f}_{n-3}) \quad (108)$$

Implisiittisiä Adams-Moulton menetelmiä kuvaavia kertoimia, kun $p=0$, on esitetty taulukossa 3. Näistä iterointia vaativista menetelmistä yleisimmin käytetty on neljännen kertaluvun menetelmä

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{\Delta t}{24} (9\mathbf{f}_{n+1} + 19\mathbf{f}_n - 5\mathbf{f}_{n-1} + \mathbf{f}_{n-2}) \quad (109)$$

Taulukko 3. Adams-Moulton –menetelmän kertoimia [11].

k	a_0	a_1	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
1	1	1	-1				
2	2	2	-1	-1			
3	12	12	-5	-8	1		
4	24	24	-9	-19	5	-1	
5	720	720	-251	-646	264	-106	19

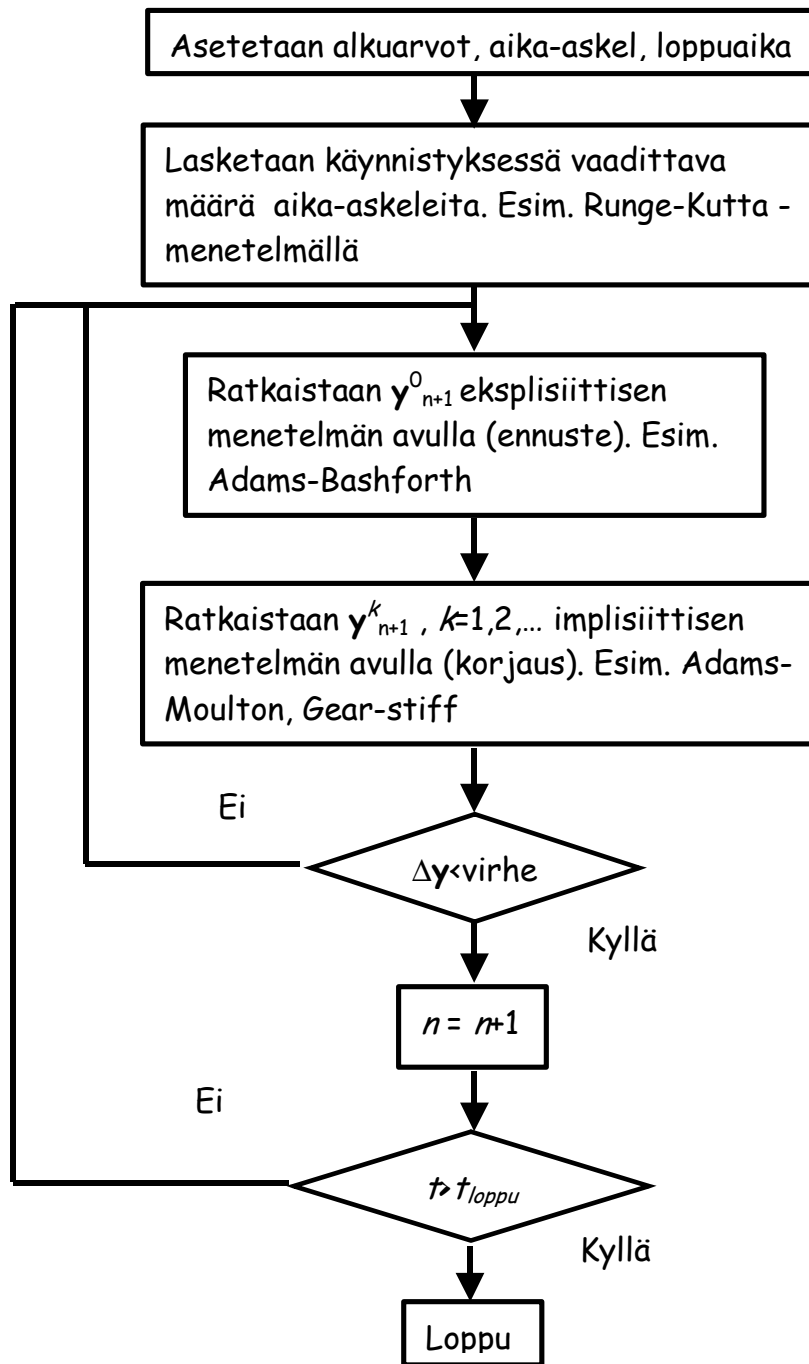
Implisiittisissä menetelmissä vaadittuja iteroinnin alkuarvoja ratkaistaan yleensä käyttämällä yhtälön 108 kuvaamaa eksplisiittistä menetelmää. Tähän käytäntöön perustuvia ennustekorjaus –menetelmiä kuvaava algoritmi on esitetty kuvassa 15. Laskennallisesti menetelmä on tehokkain, kun ennusteen asteluku on yhden alempi kuin korjauksen [11]. Implisiittisten menetelmien käyttö kannattaa, vaikka ne ovatkin laskennallisesti raskaampia kuin eksplisiittiset. Implisiittisten menetelmien katkaisuvirhe on huomattavasti pienempi kuin vastaavan aseteluvun eksplisiittisillä menetelmillä.

Dynamiikan analysoinnissa eräät mekanismit ovat ns. jäykkiä järjestelmiä, joiden ominaistajuudet ovat laajalla alueella. Tällaisia järjestelmiä joudutaan analysoimaan silloin kun kappaleiden jäykkyysominaisuuksissa on suuria eroja. Jäykkiä järjestelmiä varten on kehitetty omia integrointimenetelmiä, joista tunnetuimpia on Gear-stiff –menetelmä. Gear-stiff –menetelmää on useaa eri kertalukua mutta kaikki ne ovat moniaskelisia ja perustuvat yhtälöön 107.

Taulukko 4. Gear-stiff –menetelmän kertoimia [11].

p	b_0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
1	-1	1	-1			
2	-2	3	-4	1		
3	-6	11	-18	9	-2	
4	-12	25	-48	36	-16	3

Taulukossa 4 on esitetty Gear-stiff –menetelmän kertoimia. Jäykkien järjestelmien analysoinnissa joudutaan usein tarkastelemaan pitkiä vasteaikoja matalataajuuksien komponenttien vasteen selvittämiseksi, kun taas korkeataajuuksien komponenttien vasteen ratkaisu ja ratkaisun virhetoleranssin toteutuminen vaatii lyhyen aika-askeleen.



Kuva 15. Ennuste-korjaus –integrointialgoritmi.

4.3 Integroinnin virhelähteitä

Numeerisessa integroinnissa tarkkaa tulosta joudutaan aina approksimoimaan. Lisäksi tietokoneiden liukulukujen käsittelyyn liittyvät ominaisuuden, sekä käyttäjän mahdolliset virheet aiheuttavat omat epätarkkuutensa ratkaisuun. Pääasiallisia virhelähteitä ovat:

- **Katkaisuvirhe.** Laskennassa joudutaan käyttämään approksimaatioita tarkan matemaattisen prosessin sijasta. Esimerkki tällaisesta on, kun ääretön sarja typistetään

äärelliseksi jättämällä sarjan loppuosan termit huomioimatta. Virhe muodostuu toleranssista, joka määrittelee iteraatioprosessin tarkkuuden. Yleisesti voidaan todeta, että katkaisuvirhe saadaan sitä pienemmäksi, mitä pienempää laskenta-askelta käytetään.

- Pyöristysvirhe. Yhtälöiden ratkaisussa tulee olla riittävä tarkkuusvara pyöristyksille, jotta ei menetettäisi tietoa. Pyöristysvirhe aiheuttaa systeemille luonnotonta vaimennusta. Pyöristysvirhe aiheutuu siitä, että tietokoneet ja ohjelmat käsittelevät lukuja ainoastaan tietyllä tarkkuudella laskennan aikana. Sama ongelma on nähtävissä tilanteessa, jossa kaksi lähes saman suuruista lukua vähennetään toisistaan, jolloin tulos voi olla nolla tai hyvin lähellä sitä. Laskenta-askeleen lyhentäminen suurentaa pyöristysvirhettä, mikä johtuu merkitsevien numeroiden kumoutumisesta vähennyslaskussa ja lisääntyneestä laskennasta analyysin aikana.
- Numeerinen epästabiilius, joka muodostuu differentiaaliyhtälöiden, askelpituuden sekä käytetyn integrointialgoritmin ominaisuuksien yhteisvaikutuksesta. Käytetyn algoritmin tulisi olla sellainen, että pienet häiriöt lähtöarvoissa ja välituloksissa eivät aiheuta suuria muutoksia lopputulokseen. Jos pienet häiriöt eivät vaikuta lopulliseen tulokseen merkittävästi, voidaan tällöin algoritmia kutsua numeerisesti stabiiliksi.

5 RAJOITTEIDEN STABILOINTIMENETELMIÄ

Nivelrajoitteiden virheiden korjaus, stabilointi, on erittäin tärkeää mekanismien dynamiikan simuloinnin onnistumisen ja tulosten oikeellisuuden kannalta. Mallinnusmenetelmien johtamisessa käytetyn virtuaalisen työn periaatteen oletuksena nimittäin on, etteivät rajoitevoimat tee työtä, eli rajoitteiden vastaista siirtymää ei tapahdu. Varsinkaan monimutkaisten järjestelmien pidemmissä analyyseissä nivelrajoitteet eivät toteudu tarkasti. Tällöin järjestelmän energiatasapaino ei toteudu ja järjestelmään muodostuu virtuaalista energiaa, joka rikkoo virtuaalisen työn periaatetta, Tästä syystä tulokset eivät enää pidä paikkaansa.

Numeeriselta kannalta ongelma aiheutuu siitä, että rajoiteyhtälöt joudutaan derivoimaan kaksi kertaa yhtälöryhmän ratkaisun selvittämiseksi. Tällöin integroinnissa syntyvä virhe ei kohdistu itse rajoitteisiin, jotka pienellä virheellä voisivatkin edelleen toimia, vaan rajoitteiden toisiin derivaattoihin, kiihtyvyyksiin. Tämä aiheuttaa integroinnin jatkuessa

kertymää asemavirheeseen, jolloin rajoiteyhtälöt eivät tietyn ajan jälkeen enää pidä paikkaansa.

Stabilointimenetelmiä on periaatteeltaan kahta eri tyyppiä [12], ensimmäisessä järjestelmään lisätään taajuudesta ja vaimennuksen arvoista riippuvia voimia, jotka pyrkivät parantamaan nivelrajoitteiden toteutumista. Esimerkkejä tämäntyyppisestä käsittelystä ovat Baumgarten stabilointi [5],[7],[11],[13],[14], rangaistusfunktio menetelmä [11] sekä laajennettu Lagrangen menetelmä [11]. Toisessa tyypissä rajoitteiden toteutumista pyritään varmistamaan korjaustermien avulla. Tutkitaan rajoitteiden asema- ja nopeusvirheitä ja muutetaan yleistettyjen koordinaattien arvoja siten, että rajoitteet toteutuvat. Tällaisia menetelmiä ovat esim. suora rajoitteiden korjausmenetelmä [15] ja geometrinen eliminointi [16].

5.1 Baumgarten stabilointi

Baumgarten stabilointimenetelmässä rajoitteiden toiset aikaderivaatat, yhtälö 23 korvataan rajoitteiden stabiloidulla muodolla

$$\mathbf{Q}_d^* = \mathbf{Q}_d - 2\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{C}_q\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_t) - \boldsymbol{\beta}^2\mathbf{C} \quad (110)$$

jossa $\boldsymbol{\alpha}$ ja $\boldsymbol{\beta}$ ovat diagonaalimatriiseja, joiden alkioiden arvot ovat yleensä välillä 1...20. Menetelmä perustuu suljetun säätöpiirin teoriaan [5],[6],[7] ja [13]. Menetelmän etuja ovat sen yksinkertainen soveltaminen ja laskennallinen tehokkuus. Ongelmia tuottavat kertoimien valinnat siten, että algoritmi säilyy stabiilina [17] ja se, että kinemaattisen singulariteetin lähistöllä algoritmi ei kertoimien arvoista riippumatta välttämättä ole stabiili [14]. Kertoimien automaattista määrittämistä on tutkittu esim. lähteessä [18], jonka mukaan rajoitteet toteutuvat eikä numeerisia ongelmia ilmene, jos matriisien $\boldsymbol{\alpha}$ ja $\boldsymbol{\beta}$ alkiot määritellään yhtälön 111 mukaisesti.

$$\alpha_i = \frac{1}{\Delta t}, \quad \beta_i = \frac{\sqrt{2}}{\Delta t} \quad (111)$$

jossa Δt on integroinnin aika-askel.

5.2 Rangaistusfunktio menetelmä

Rangaistusfunktio menetelmässä rajoiteyhtälöiden Lagrangen kertoimet eliminoidaan liikeyhtälöistä, jolloin integroitavan yhtälöryhmän koko pienenee. Rajoitteet huomioidaan suoraan liikeyhtälössä painotetulla kertoimella, jonka suuruus määrää, kuinka hyvin rajoitteet toteutuvat. Kertoimen arvon kasvaessa rajoitteet toteutuvat tarkemmin mutta numeerisia

ongelmia saattaa ilmetä. Holonomisille järjestelmille, joiden rajoiteyhtälöt voidaan esittää ajan ja yleistettyjen koordinaattien algebraaliyhtälöinä, rangaistusfunktio menetelmä johdetaan lisäämällä Lagrangen energiayhtälöön kolme kuvitteellista termiä: kuvitteellinen potentiaalienergia

$$V^* = \sum_i \frac{1}{2} \alpha_i \omega_i^2 C_i^2 = \frac{1}{2} \mathbf{C}^T \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{C} \quad (112)$$

kuvitteellinen Rayleighin voima

$$G_i = -2\alpha_i \omega_i \mu_i \frac{dC_i}{dt} = -2\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\mu} \dot{\mathbf{C}} \quad (113)$$

ja kuvitteellinen kineettinen energia

$$T^* = \sum_i \frac{1}{2} \alpha_i \left(\frac{dC_i}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}}^T \boldsymbol{\alpha} \dot{\mathbf{C}} \quad (114)$$

joissa α_i on rangaistuskerroin, ω_i ja μ_i ovat rangaistusfunktioiden jousi-massa-vaimennin – systeemeihin liittyviä ominaistajuuksia ja vaimennuksia. Diagonaalimatriisit $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\Omega}$ ja $\boldsymbol{\mu}$ sisältävät eri rajoitteisiin liittyvät rangaistuskertoimet, ominaistajuudet ja vaimennuksen. Rangaistusermien differentiointi [11] johtaa uudelleen muotoiltuun liikeyhtälöön

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\alpha} (\ddot{\mathbf{C}} + 2\boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\mu} \dot{\mathbf{C}} + \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{C}) = \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_v \quad (115)$$

joissa vasemman puolen toinen termi kuvaa rangaistusvoimia, jotka ilmenevät, kun rajoitteita rikotaan. Itse asiassa termi $\boldsymbol{\alpha} (\ddot{\mathbf{C}} + 2\boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\mu} \dot{\mathbf{C}} + \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{C})$ on Lagrangen kertoimien approksimaatio, rajoitteiden Jacobin matriisilla kertomalla rajoitevoimat kuvataan yleistetyissä koordinaateissa. Huomioimalla yhtälön 23 mukaisesti rajoitteiden toiset aikaderivaatat, saadaan menetelmän liikeyhtälöksi

$$(\mathbf{M} + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\alpha} \mathbf{C}_q) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_v - \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\alpha} (-\mathbf{Q}_d + 2\boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\mu} \dot{\mathbf{C}} + \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{C}) \quad (116)$$

rangaistuskertoimien α_i arvoiksi esitetään noin 10^7 x suurimman massamatriisin termin arvo. Numeerisessa ratkaisussa rajoitteiden aikaderivaatta kannattaa ratkaista muodossa $\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}}$. Ominaistaajuus ja vaimennustermeillä saattaa olla Baumgarten stabiloinnin vakioihin $\boldsymbol{\alpha}$ ja $\boldsymbol{\beta}$ verrattavissa olevia stabiiliusvaikutuksia, mutta kinemaattisten singulariteettien lähellä menetelmä toimii paremmin kuin Baumgarten stabilointi. Menetelmän johto ja liikeyhtälön muotoilu ei-holonomisille järjestelmille, joiden rajoitteiden esittäminen vaatii yleistettyjen koordinaattien derivointia, on esitetty lähteessä [11].

5.3 Laajennettu Lagrangen menetelmä

Aiemmin esitetyissä stabilointimenetelmissä ongelmina ovat olleet vaadittujen kertoimien määrittäminen ja siihen liittyvä stabiilius sekä mahdolliset numeeriset ongelmat. Laajennettu Lagrangen menetelmä on iteratiivinen, joten käyttäjän ei tarvitse huolehtia kertoimien valintaan liittyvistä asioista. Menetelmä johdetaan holonomisille järjestelmille sijoittamalla liikeyhtälöön 76 yhtälön 115 mukaiset rangaistustermit, joiden arvo on nolla, jos rajoitteita ei rikota

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\alpha} (\ddot{\mathbf{C}} + 2\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\mu}\dot{\mathbf{C}} + \boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{C}) + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda}^* = \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_v \quad (117)$$

vertailemalla yhtälöitä 76 ja 117 havaitaan, että

$$\boldsymbol{\lambda} \equiv \boldsymbol{\lambda}^* + \boldsymbol{\alpha} (\ddot{\mathbf{C}} + 2\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\mu}\dot{\mathbf{C}} + \boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{C}) \quad (118)$$

Yhtälö 117 voidaan ratkaista ilman rajoiteyhtälön 15 ratkaisua, jos $\boldsymbol{\lambda}^*$ tunnetaan. Ratkaisu saadaan iteratiivisesti

$$\boldsymbol{\lambda}_{i+1}^* = \boldsymbol{\lambda}_i^* + \boldsymbol{\alpha} (\ddot{\mathbf{C}} + 2\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\mu}\dot{\mathbf{C}} + \boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{C})_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (119)$$

käyttämällä alkuarvona $\boldsymbol{\lambda}_0^* = 0$. Rangaistustermien ei tarvitse nyt olla kovin suuria, koska rajoiteyhtälöiden virhe eliminoidaan Lagrangen kertoimien avulla iteraation aikana. Rangaistusfunktio menetelmä vastaa laajennettua Lagrangen menetelmää, jossa iteraatio tehdään vain kerran. Liikeyhtälöön sovelletuksi iteraatioprosessiksi saadaan

$$\begin{aligned} (\mathbf{M} + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\alpha} \mathbf{C}_q) \ddot{\mathbf{q}}_{i+1} &= \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\alpha} (-\mathbf{Q}_d + 2\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\mu}\dot{\mathbf{C}} + \boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{C}), \quad i = 0, 1, 2, \dots \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_0 &= \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_v \end{aligned} \quad (120)$$

Iteraatio lopetetaan kun yleistettyjen koordinaattien kiihtyvyyksien muutos on alle asetetun virhetoleranssin.

5.4 Geometrinen eliminointimenetelmä

Geometrisessä rajoitteiden eliminointimenetelmässä liikeyhtälöön 76 ei tehdä muutoksia, vaan muutokset perustuvat geometrinen rajoitteiden toteuttamiseen. Tämän takia menetelmää kutsutaan geometriseksi eliminointimenetelmäksi. Jos numeerisen integroinnin tuloksena aika-askeleella i ratkaistut yleistetyt koordinaatit \mathbf{q}_i^* eivät toteuta rajoiteyhtälöä 15, täytyy yhtälön toteuttamiseksi koordinaatteihin lisätä korjaustermi $\delta\mathbf{q}_i$

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_i^* + \delta\mathbf{q}_i \quad (121)$$

siten, että

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}_i, t) = \mathbf{C}(\mathbf{q}_i^*, t_i) + \delta\mathbf{C}_i = 0 \quad (122)$$

Eli

$$\delta C_i = -C(\mathbf{q}_i^*, t_i) \quad (123)$$

Koordinaattien virheen oletetaan olevan niin pieni, että sitä voidaan approksimoida ensimmäisen differentiaalilla

$$\delta C = \frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} = C_q \delta \mathbf{q} \quad (124)$$

Aika on pidetty vakiona, koska korjaus tehdään jokaisen integrointiaskeleen jälkeen. Sijoittamalla tulos yhtälöön 123 saadaan

$$(C_q)_i \delta \mathbf{q}_i = -C(\mathbf{q}_i^*, t_i) \quad (125)$$

Yleensä mekanismin Jacobin matriisi ei ole neliömatriisi, joten yleistettyjen koordinaattien korjaustermiä $\delta \mathbf{q}$ ei voida ratkaista suoraan käänteismatriisin muodostamisen ongelmien takia. Rajoitteet ovat kuitenkin riippumattomia ja yleistetyt käänteismatriisien teorian mukaan tulon $C_q C_q^T$ käänteismatriisi on olemassa. Matriisin C_q yleistetty Moore-Penrose käänteismatriisi määritellään

$$C_q^+ = C_q^T (C_q C_q^T)^{-1} \quad (126)$$

jolloin korjaustermien ratkaisu yhtälöstä 125 voidaan esittää muodossa

$$\delta \mathbf{q}_i = -C_q^+ C_i = -(C_q)_i^T [(C_q)_i (C_q)_i^T]^{-1} C(\mathbf{q}_i^*, t_i) \quad (127)$$

sijoittamalla korjaustermi yhtälöön 121 voidaan yleistetyt koordinaatit ratkaista siten, että rajoiteyhtälöt toteutuvat. Geometristen rajoitteiden virheen eliminoinnin lisäksi menetelmä soveltuu energiarajoitteen virheen eliminointiin. Tämä tapahtuu eliminoimalla rajoitteiden nopeuksien virheet. Mekaanisen järjestelmän kokonaisenergia muutos

$$\Psi = E - E_0 \quad (128)$$

Jolloin energiarajoite voidaan määrittää

$$\Psi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \quad (129)$$

jonka variaatio on

$$\delta \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \dot{\mathbf{q}} \quad (130)$$

Koordinaattien asemien virheiden eliminointia ei ole huomioitu tässä, koska se on jo tehty aikaisemmassa vaiheessa. Katkaisuvirheen takia energiarajoite ei toteudu [16]. Rajoitteen toteuttamiseksi lisätään numeerisesti integroituihin yleistettyjen koordinaattien nopeuksiin $\dot{\mathbf{q}}_i^*$ korjaustermi $\delta \dot{\mathbf{q}}_i$

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \dot{\mathbf{q}}_i^* + \delta \dot{\mathbf{q}}_i \quad (131)$$

siten, että

$$\Psi(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) = \Psi(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i^*) + \delta\Psi_i = 0 \quad (132)$$

Eli

$$\delta\Psi_i = -\Psi(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i^*) \quad (133)$$

Yhtälöä ei voida ratkaista, koska $\delta\dot{\mathbf{q}}_i$ on tuntematon. Valitaan $\delta\dot{\mathbf{q}}_i$:n arvo nopeusavaruudesta energiarajoitteen differentiaalin suunnasta

$$\delta\dot{\mathbf{q}}_i = \dot{\mathbf{q}}_i \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)_i^T \quad (134)$$

Sijoitetaan tulos yhtälöön 130 jolloin nopeuksiksi saadaan

$$\dot{\mathbf{q}}_i = - \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)_i^T \right]^{-1} \Psi_i \quad (135)$$

ja edelleen rajoitteiden nopeuksien virheet eliminoivaksi korjaustermiksi

$$\delta\dot{\mathbf{q}}_i = \frac{-\Psi(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i^*) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)_i^T}{\left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)_i^T \right]_i} \quad (136)$$

Menetelmä vaatii järjestelmän energian laskennan yleistettyjen koordinaattien nopeuksien virheiden eliminoimiseksi. Monimutkaisen järjestelmän energian laskenta voi olla vaikeaa, tai jopa mahdotonta.

5.5 Suora virheiden korjausmenetelmä

Suorassa virheiden korjausmenetelmässä [15], yleistettyjen koordinaattien asema- ja nopeusarvoja muutetaan siten, että rajoiteyhtälöt toteutuvat. Liikkeyhtälöön 76 ei tehdä mitään muutoksia. Asemarajoitteiden virheiden korjaus tehdään tässäkin menetelmässä yhtälön 127 mukaisesti. Rajoitteiden nopeuksien virheiden korjaukseen ei kuitenkaan käytetä energian laskentaan perustuvaa menetelmää. Vastaavasti kuin rajoitteiden asemien virheiden korjaamiseksi voidaan rajoitteiden nopeuksien virheiden korjaamiseksi johtaa [15]

$$\delta\dot{\mathbf{q}}_i = -(\mathbf{C}_q)_i^T \left[(\mathbf{C}_q)_i (\mathbf{C}_q)_i^T \right]^{-1} \dot{\mathbf{C}}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i^*, t_i) \quad (137)$$

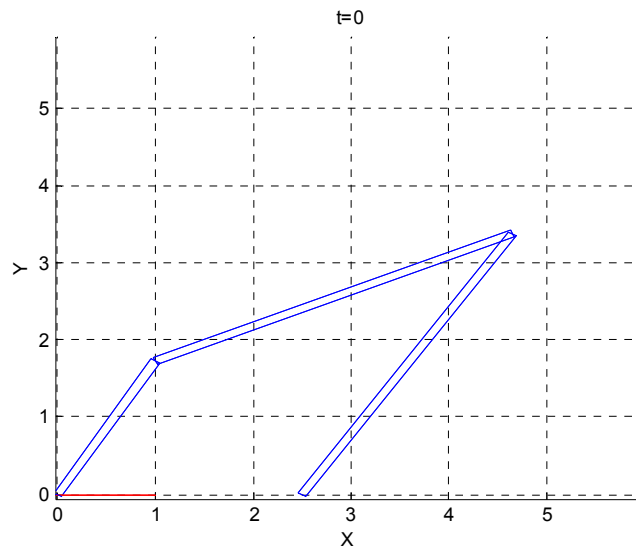
Menetelmän etuna on sen yksinkertaisuus. Haittapuolena menetelmä vaatii järjestelmän rajoitteiden Jacobin matriisin ratkaisun useaan kertaan, mikä on laskennallisesti raskasta. Lisäksi menetelmä soveltuu ainoastaan holonomisille järjestelmille.

6 ESIMERKKEJÄ

Eri mallinnus-, ratkaisu- ja stabilointimenetelmien toimintaa tarkastellaan kahden esimerkin avulla. Ensimmäinen esimerkki on perinteinen nivelsuunnikas, jota on usein käytetty mallinnusmenetelmien toiminnan tarkastelussa. Toisena esimerkkinä on kolmesta jäykästä kappaleesta kostuva kampimekanismi, joka tarjoaa mahdollisuuden käyttää useita erityyppisiä niveliä.

6.1 Nivelsuunnikas

Nivelsuunnikas, kuva 16, koostuu kolmesta jäykästä kappaleesta, joiden muodostama kinemaattinen ketju suljetaan jäykän ground-kappaleen avulla. Käyttävään varteen vaikuttaa vääntömomentti, jonka arvo on -1200 Nm . Gravitaatiokiihtyvyyden suuruus on -9.81 m/s^2 globaalin Y-akselin suunnassa. Kappaleiden parametrit on esitetty taulukossa 5 ja kappaleiden välinen nivelointi taulukossa 6. Järjestelmän vapausasteiden määrä on $(3 \times 6) - (2 \times 5) - 3 - 4 = 1$. Ensimmäisen varren pituus on 2 m, toisen ja kolmannen 4 m. Varret ovat $10 \times 5 \text{ cm}$ umpinaista neliöprofiilia. Lokaalit koordinaatit sijaitsevat homogeenisten kappaleiden massakeskipisteissä. Varsien materiaalin tiheys on 7810 kg/m^3 .



Kuva 16. Tarkasteltava nivelsuunnikas alkutilassa.

Taulukko 5. Tarkasteltavan nivelsuunnikkaan parametrit.

Kappale	ID	x	y	z	ψ	θ	ϕ	m	I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}	I_{xy}	I_{xz}	I_{yz}	\bar{u}_x	\bar{u}_y	\bar{u}_z
Varsi 1	1	0.500	0.866	0	1.047	0	0	78.1	8.14e-2	26.1	16.0	0	0	0	0	0	0
Varsi 2	2	2.824	2.553	0	0.423	0	0	156.2	0.163	208.4	208.3	0	0	0	0	0	0
Varsi 3	3	3.574	1.687	0	1.004	0	0	156.2	0.163	208.4	208.3	0	0	0	0	0	0

Jossa esitetyt kappaleiden parametrit ovat:

ID	Kappaleen järjestysnumero
x, y, z	Kappaleen lokaalin koordinaatiston alkuasema [m]
ψ, θ, ϕ	Kappaleen lokaalin koordinaatiston 313-Eulerin kulmat alkutilassa [rad]
m	Kappaleen massa [kg]
$I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$	Kappaleen hitaustensorin termit [kgm ²]
$\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z$	Kappaleen massakeskipisteen asema lokaalissa koordinaatistossa [m]

Taulukko 6. Tarkasteltavan nivelsuunnikkaan nivelöinti.

Nivel	I	T	B	B	x_1	y_1	z_1	a_1	a_2	a_3	x_2	y_2	z_2	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3	d_1	d_2	d_3
Sara1	1	3	0	1	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	-1	0	1	1	0	0			
Pallo	2	1	1	2	1	0	0				-2	0	0									
Sylin.	3	5	2	3	2	0	0	3	0	0	2	0	0	2	0	1	2	1	0	0	0	0
Sara2	4	3	3	0	-2	0	0	-1	0	0	2.5	0	0	2.5	0	1	-2	-1	0			

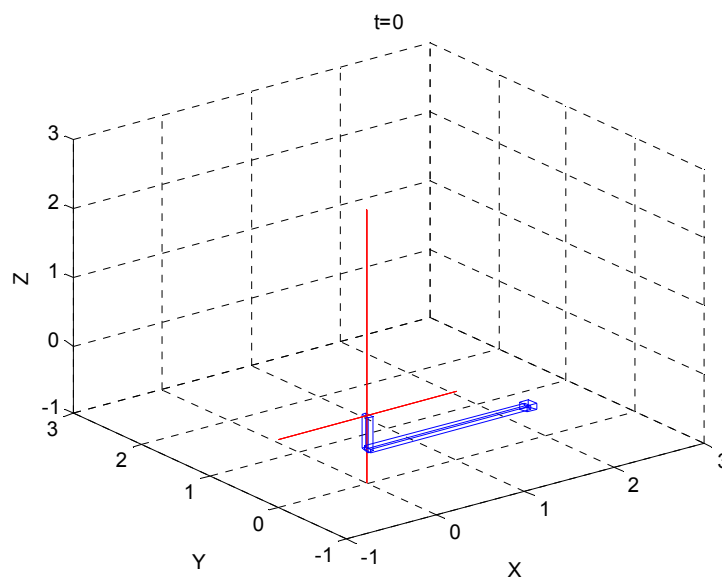
Nivelten parametrit ovat:

ID	Nivelen järjestysnumero
T	Nivelen tyyppi
	1 Pallonivel
	2 Kardaanimivel
	3 Saranimivel
	4 Translaationivel
	5 Sylinterinivel
$B1$	Ensimmäinen kappale, johon nivel liittyy (0=ground)
$B2$	Toinen kappale, johon nivel liittyy (0=ground)
x_1, y_1, z_1	Nivelen asema ensimmäisen kappaleen lokaalissa koordinaatistossa [m]

a_1, a_2, a_3	Nivelen akseliin kohtisuora suuntavektori ensimmäisen kappaleen lokaalissa koordinaatistossa (yksikkövektori) [m]
x_2, y_2, z_2	Nivelen asema toisen kappaleen lokaalissa koordinaatistossa
b_1, b_2, b_3	Nivelen akselin suuntavektori toisen kappaleen lokaalissa koordinaatistossa (yksikkövektori) [m]
c_1, c_2, c_3	Vektoreihin (a_1, a_2, a_3) ja (b_1, b_2, b_3) kohtisuorassa oleva suuntavektori ensimmäisen kappaleen lokaalissa koordinaatistossa (yksikkövektori) [m]
d_1, d_2, d_3	Vektorin (c_1, c_2, c_3) kanssa yhdensuuntainen suuntavektori toisen kappaleen lokaalissa koordinaatistossa (yksikkövektori) [m]

6.2 Kampimekanismi

Tarkasteltava kampimekanismi, kuva 17, koostuu kahdesta nivelvarresta sekä toiseen varteeseen liitetystä luistista. Mekanismi mallinnetaan siten, että lokaalit koordinaatistot on sijoitettu kappaleiden massakeskipisteisiin. Käyttävään varteeseen vaikuttaa analyysin ajan 50 Nm suuruinen vääntömomentti ja gravitaatiokiihtyvyyden suuruus on -9.81 m/s^2 globaalin Y-akselin suunnassa. Kappaleiden parametrit on esitetty taulukoissa 7, ja kappaleiden välinen nivelöinti taulukossa 8. Järjestelmän vapausasteiden määrä on $(3 \times 6) - 3 - 4 - 5 - 5 = 1$. Ensimmäisen kammien pituus on 0.5 m ja toisen 1.8 m, molemmat ovat umpinaista 10 x 5 cm neliöprofiilia. Luisti on 10 x 10 x 10 cm kuutio. Kaikkien osien materiaalin tiheys on 7810 kg/m^3 .



Kuva 17. Tarkasteltava kampimekanismi alkutilassa.

Taulukko 7. Tarkasteltavan kampimekanismin parametrit.

Kappale	ID	x	y	z	ψ	θ	ϕ	m	I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}	I_{xy}	I_{xz}	I_{yz}	\bar{u}_x	\bar{u}_y	\bar{u}_z
Kampi 1	1	0	0	-0.25	$\pi/2$	$\pi/2$	$-\pi/2$	21	2.2e-2	0.513	0.526	0	0	0	0	0	0
Kampi 2	2	0.9	0	-0.5	0	0	0	71.7	7.5e-2	20.22	20.27	0	0	0	0	0	0
Luisti	3	1.8	0	-0.5	0	0	0	7.8	1.3e-2	1.3e-2	1.3e-2	0	0	0	0	0	0

Taulukko 8. Tarkasteltavan kampimekanismin nivelöinti.

Nivel	I	T	B	B	x_1	y	z_1	a_1	a	a	x_2	y	z_2	b_1	b	b_3	c_1	c	c	d_1	d	d_3	
	D		I	2		I			2	3		2			2			2	3		2		
Pallo	1	1	1	2	0.25	0	0				-0.9	0	0										
Tran.	2	4	0	3	0	0	0	0	1	0	-1.8	0	.5	-8	0	0.5	0	0	1	-1.8	0	1.5	
Kard.	3	2	2	3	0.9	0	0	0.9	1	0	0	0	0	0	0	1							
Sara.	4	3	1	0	-0.25	0	0	-0.25	0	0	0	0	0	1	0	0	.75	0	0				

7 MENETELMIEN VERTAILUA

Esimerkkitapauksia tutkittiin lyhyiden työkiertojen avulla. Nivelsuunnikasta simuloitiin 4 ja kampimekanismia 8 sekunnin ajan. Käytetyn aika-askeleen pituus molemmilla mekanismeilla oli 0.01 s., joka on mekanismien analysointiin hieman liian suuri. Valinta tehtiin kuitenkin tarkoituksena saada rajoiteyhtälöihin ja energiatasapainoon syntymään selvää virhettä, menetelmien eroavaisuuksien selvittämiseksi. Gear-stiff –menetelmän iteraatioprosessissa vaadittavan virhetoleranssin arvo oli $1e-5$.

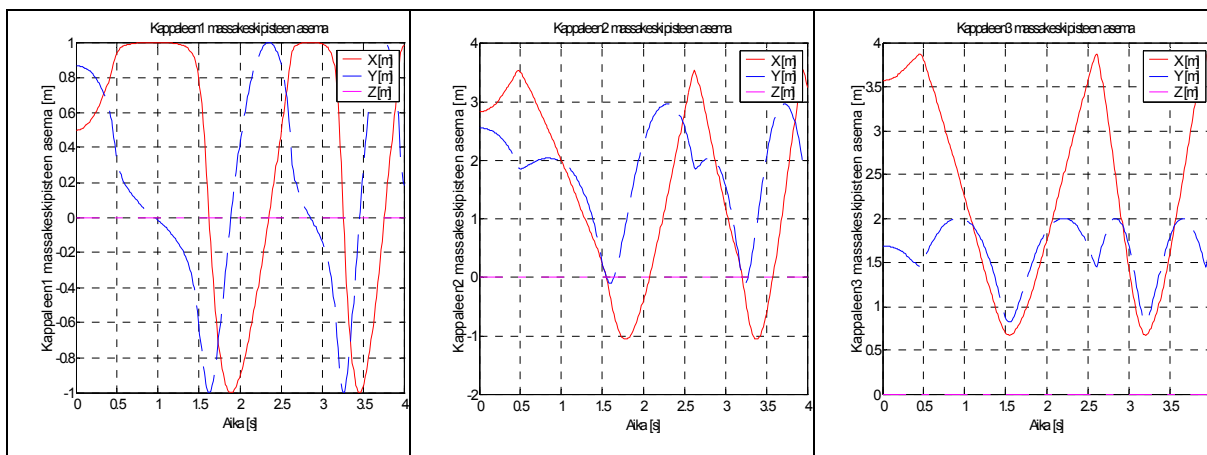
Molemmat mekanismit mallinnettiin ja analysoitiin käyttäen Lagrangen menetelmää. Analyysit ratkaistiin käyttämällä kolmea eri integrointimenetelmää: neljännen kertaluvun Runge-Kutta (RK4), neljännen kertaluvun Runge-Kutta-Nyström (RKN4) ja neljännen kertaluvun Gear-stiff –menetelmiä. Integraattoreiden osalta tarkasteltiin laskentatehokkuutta ja rajoiteyhtälöiden ja energiatasapainon virheitä tuloksissa.

Lisäksi mekanismien rajoiteyhtälöiden stabilointimenetelmien toimivuutta tarkasteltiin eri integraattoreiden yhteydessä Stabilointimenetelmien osalta kiinnostuksen kohteena olivat myöskin laskentatehokkuus ja rajoiteyhtälöiden ja energiatasapainon virheet tuloksissa. Baumgarten stabiloinnissa vaadittavien α - ja β -kertoimien arvoiksi asetettiin 5. Kertoimien arvoina testattiin myös yhtälön 111 mukaisia kertoimia, $\alpha = 100$ ja $\beta = 141.4$, mutta tulos oli huomattavasti huonompi.

Rangaistusfunktioimenetelmän ja laajennetun Lagrangen menetelmän vertailusta luovuttiin, koska ensimmäisen osalta ei stabiliteettia takaavia vaimennus- ja ominaistajuusarvoja

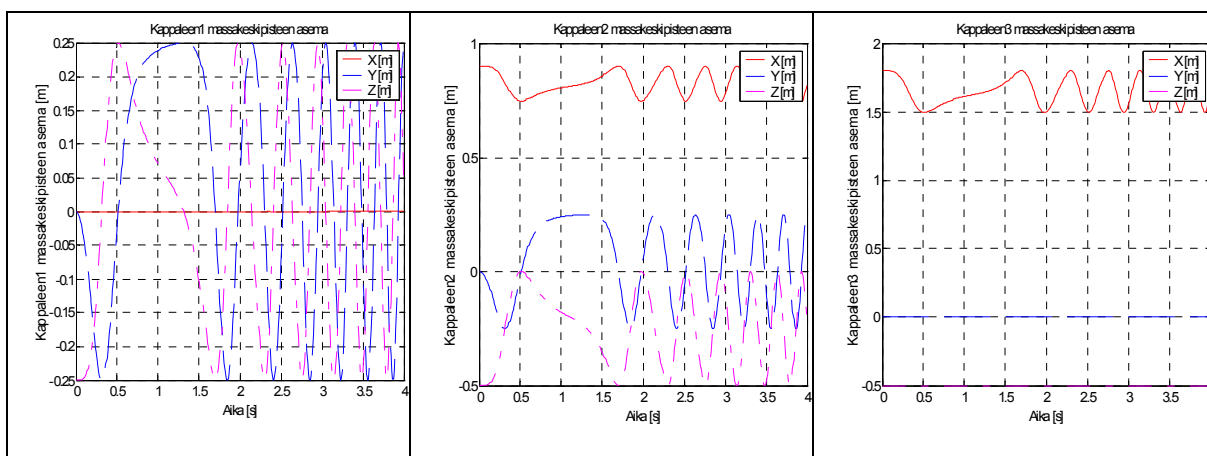
onnistuttu löytämään. Laajennetun Lagrangen menetelmän osalta laskenta kaatui ensimmäisellä aika-askeleella massamatriisin singulariteettiin.

Nivelsuunnikkaan kappaleiden massakeskipisteiden asemat analyysin aikana on esitetty kuvassa 18. Varsinkin kappaleen 1 kohdalla on havaittavissa kiihtyvä pyörimisliike, jonka vakiosuuruinen momentti aiheuttaa.



Kuva 18. Nivelsuunnikkaan kappaleiden massakeskipisteiden asemat analyysin aikana.

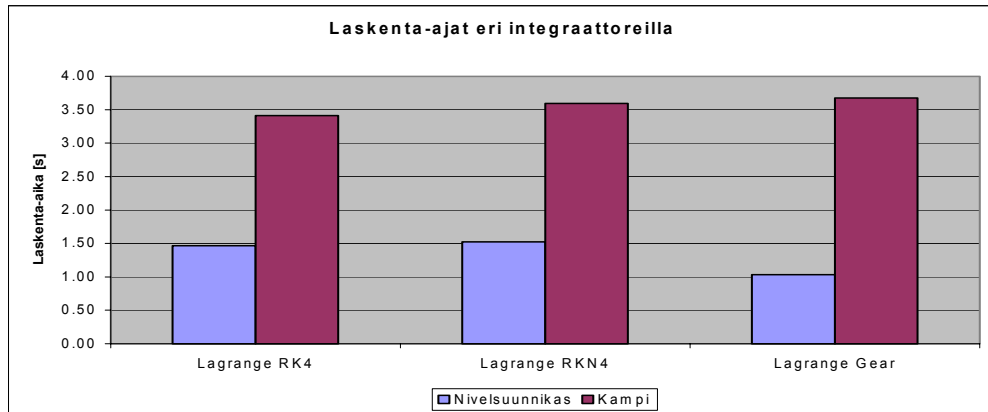
Kampimekanismin kappaleiden asemat analyysin neljän ensimmäisen sekunnin aikana on esitetty kuvassa 19. Kappaleiden kiihtyvyys on vielä selvemmin havaittavissa. Momentin suuruus riittää juuri ja juuri kiertämään kampimekanismin yläkuolokohdan yli ensimmäisellä kierroksella, jonka jälkeen se kiihdyttää liikettä nopeasti.



Kuva 19. Kampimekanismin kappaleiden massakeskipisteiden asemat analyysin aikana.

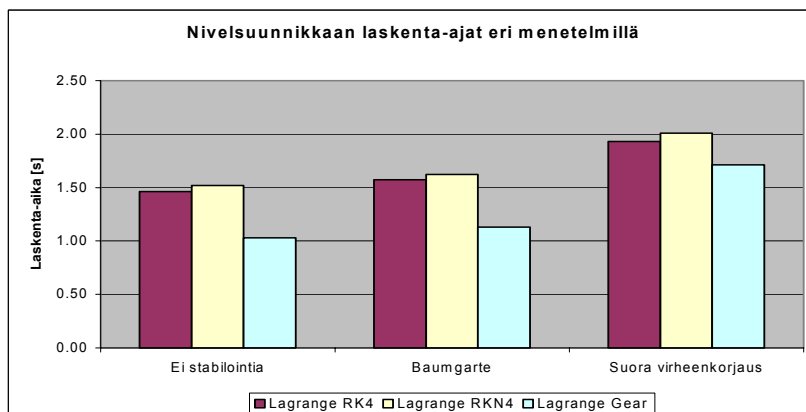
7.1 Laskentatehokkuus

Eri integrointi- ja stabilointimenetelmien laskentatehokkuutta tarkasteltiin vertailemalla työkiertojen laskentaan tarvittavia aikoja. Kuvassa 20 on esitetty esimerkkien laskentaan tarvittavat ajat, kun on käytetty neljännen kertaluvun Runge-Kutta (RK4), neljännen kertaluvun Runge-Kutta-Nyström (RKN4) ja neljännen kertaluvun Gear-stiff –integraattoria. Esitetyt laskenta-ajat on laskettu kolmen eri analyysin laskenta-aikojen keskiarvosta.

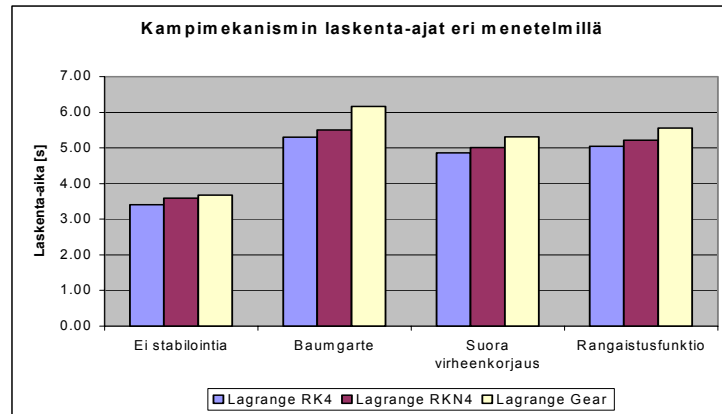


Kuva 20. Esimerkkien laskenta-ajat eri integraattoreilla.

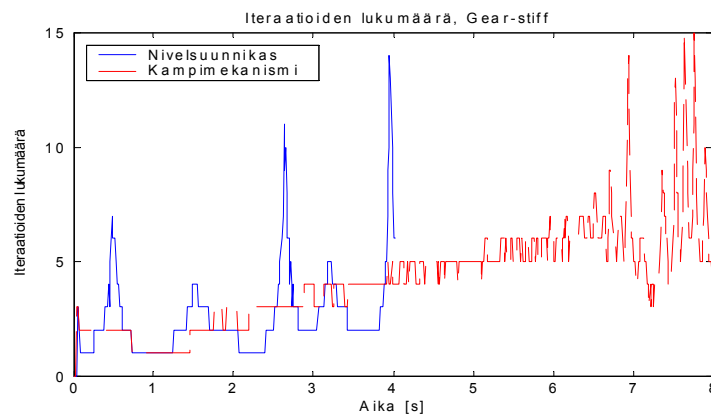
Kuvissa 21 ja 22 on esitetty eri esimerkkien laskentaan tarvittavat ajat, kun eri integraattoreiden kanssa on käytetty Baumgarten stabilointia ja suoraa virheiden korjausmenetelmää. Kuten tuloksista nähdään lisää stabilointimenetelmien käyttö laskenta-aikaa, mikä onkin luonnollista, koska menetelmät vaativat myös rajoitteiden, rajoitteiden aikaderivaatan tai Jacobin matriisin ratkaisun.



Kuva 21. Nivelsuunnikkaan laskenta-ajat eri integraattoreilla ja stabilointimenetelmillä.



Kuva 22. Kampimekanismin laskenta-ajat eri integraattoreilla ja stabilointimenetelmillä.



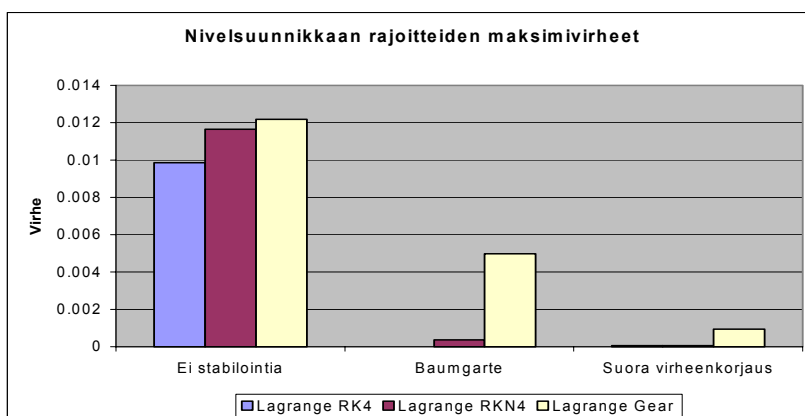
Kuva 23. Gear-stiff–menetelmän iteraatiokierrosten lukumäärät tutkituille mekanismeille.

Eri integrointimenetelmien välillä sen sijaan on melko vähän eroa, joka selittyy pitkälti menetelmien samalla kertaluvulla ja Gear-stiff menetelmän iteraatiokierrosten keskimääräisillä lukumäärillä 2.52 ja 4.46. Iteraatioiden lukumäärä eri aika-askelilla, käyttäen suoraa virheiden korjausta, on esitetty kuvassa 23. Yksinkertaisen nivelsuunnikkaan tapauksessa iteraatioiden lukumäärä säilyy pienenä, jolloin integrointialgoritmi on numeerisesti tehokas. Monimutkaisempi tapaus vaatii useampia iteraatioita, jolloin laskentatehokkuuskin heikkenee.

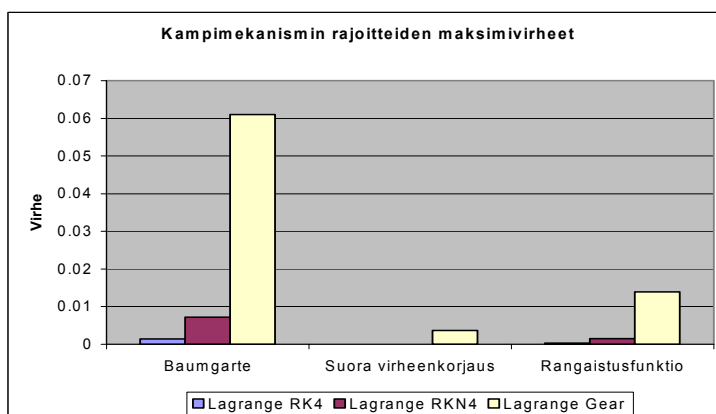
7.2 Rajoiteyhtälöiden virheet

Rajoiteyhtälöiden toteutumista tarkasteltiin hakemalla kunkin analyysin aikaiset absoluuttiset maksimivirheet ja vertailemalla niiden suuruuksia, kuvat 24 ja 25. Kuten kuvista voidaan havaita, on stabilointimenetelmillä ratkaiseva vaikutus analyysin tulosten luotettavuuteen. Jopa esimerkkien tapaisissa yksinkertaisissa mekanismeissa nivelrajoitteita rikotaan ilman

stabilointia todella voimakkaasti. Virheen yksikköä ei ole määritelty, koska rajoitteet kohdistuvat asemiin, kiertymiin ja Eulerin parametreihin, joilla kaikilla on oma yksikkönsä.



Kuva 24. Nivelsuunnikkaan rajoiteyhtälöiden maksimivirheet eri integraattoreilla ja stabilointimenetelmillä.



Kuva 25. Kampimekanismin rajoiteyhtälöiden maksimivirheet eri integraattoreilla ja stabilointimenetelmillä.

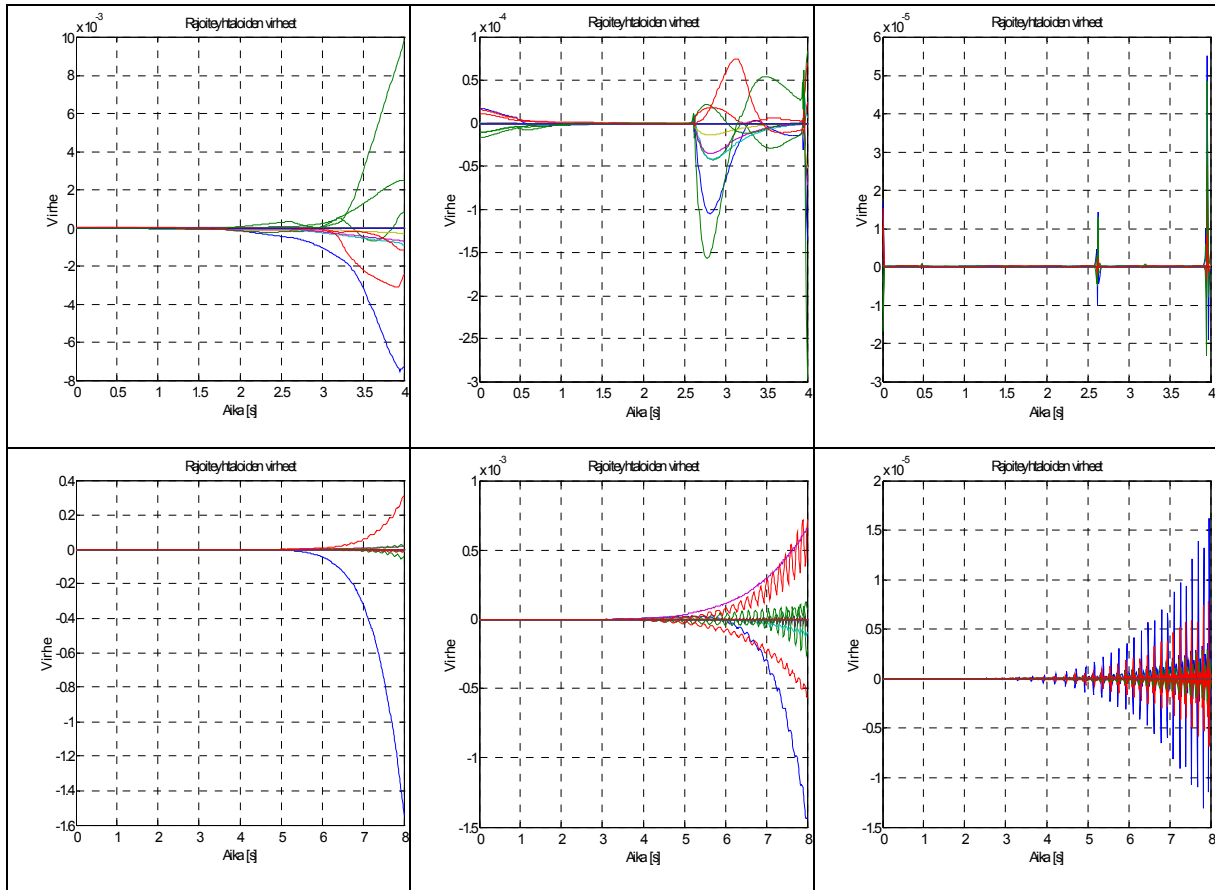
Taulukko 9. Mekanismien rajoiteyhtälöiden maksimivirheet.

Mekanismi	Rajoitteiden maksimivirhe							
	Ei stabilointia			Baumgarte			Suora virheiden	
	RK4	RKN4	Gear	RK4	RKN4	Gear	RK4	RKN4
Nivelsuunnikas	0.009848036	0.01164647	0.012178076	0.000452974	0.000363236	0.004980726	5.51388E-05	6.10E-05
Kampi	1.5435	5.502	1.0053	0.0014	0.0072	0.061	0.00001624	0.00001624

Taulukko 10. Mekanismien rajoiteyhtälöiden virheiden keskiarvot.

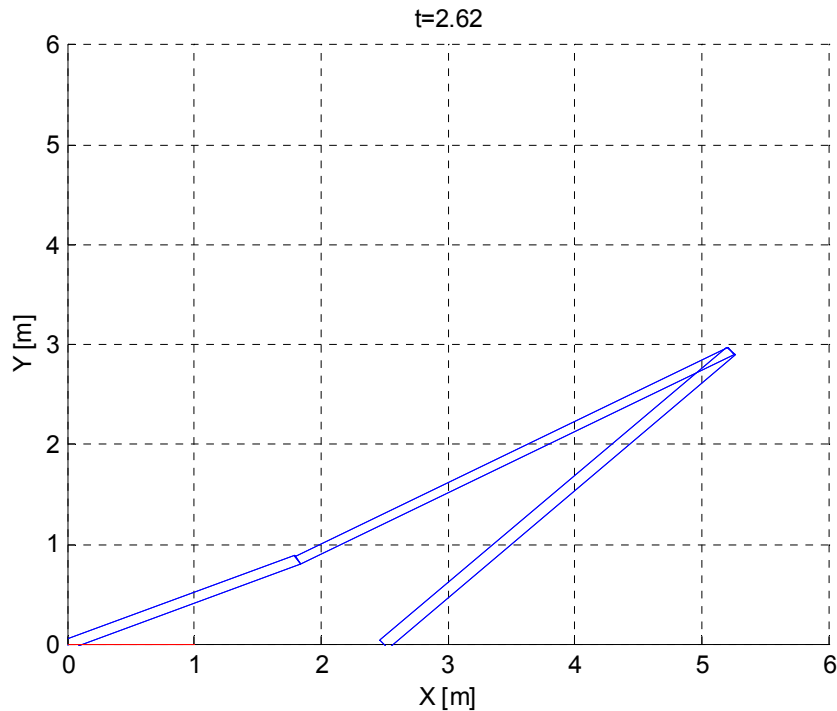
Mekanismi	Rajoitteiden absoluuttisten virheiden keskiarvo							
	Ei stabilointia			Baumgarte			Suora virheiden	
	RK4	RKN4	Gear	RK4	RKN4	Gear	RK4	RKN4
Nivelsuunnikas	2.11E-04	2.43E-04	2.36E-04	4.77E-06	4.86E-06	2.08E-05	7.44E-08	7.44E-08
Kampi	0.0092	0.0286	0.0342	0.000023372	0.00017174	0.0011	8.60E-08	8.60E-08

Kuvassa 26 on esitetty nivelsuunnikkaan ja kampimekanismin rajoiteyhtälöiden virheet ajan funktiona, kun integraattorina on käytetty RK4-menetelmää. Ylempi rivi sisältää nivelsuunnikkaan ja alempi kampimekanismin rajoiteyhtälöiden virheet. Vasemmalta katsottuna ensimmäisissä kuvaajissa ei ole käytetty stabilointia, toisessa on käytetty Baumgarten stabilointia ja kolmannessa suoraa virheiden korjausmenetelmää. Kuvissa pystyasteikkojen skaalaus vaihtelee.



Kuva 26. Mekanismien rajoiteyhtälöiden virheet ajan funktiona eri stabilointimenetelmillä.

Nivelsuunnikkaan tapauksessa on Baumgarten stabiloinnin tuloksissa havaittavissa virheen kasvua ajanhetkellä 2.6 s. Tarkastelemalla nivelsuunnikkaan asemaa tällöin, kuva 27, havaitaan sen olevan lähellä kinemaattista singulariteettia, eli tilannetta, joka kirjallisuuden perusteella saattaa aiheuttaa ongelmia ko. menetelmää sovellettaessa [14].



Kuva 27. Nivelsuunnikkaan asema ajanhetkellä 2.62 s.

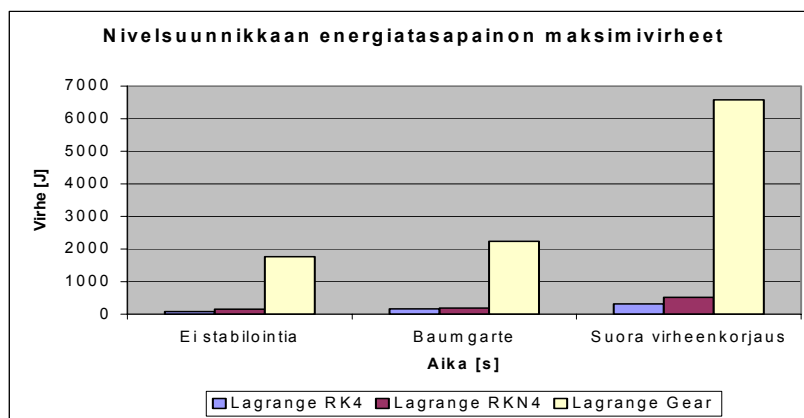
Virheissä yleisesti näkyvä eksponentiaalinen kasvu on tyypillinen piirre, koska integrointi kohdistetaan rajoitteiden toisiin derivaattoihin. Kun derivaatat integroidaan kahteen kertaan todellisen virheen selvittämiseksi, on tuloksena eksponentiaalisesti kasvava virhe. Nivelsuunnikkaan osalta suurimmat virheet ovat sarananivelen asemarajoitteissa, Eulerin parametrien normalisointirajoitteissa ja sylinterinivelen yhdensuuntaisuusrajoitteissa. Kampimekanismin tapauksessa suurimmat virheet ovat pallonivelen asemarajoitteissa ja kardaninivelen asemarajoitteissa.

Integrointimenetelmän vaikutus rajoiteyhtälöiden virheen suuruuteen on tulosten perusteella hieman yllättävä. Runge-Kutta –menetelmillä rajoiteyhtälöiden virheet ovat, sekä maksimitä keskiarvon perusteella tarkasteltuna, nimittäin pienemmät, kuin Gear-stiff –menetelmää käytettäessä. Tämä ennuste-korjaus menetelmään perustuva integraattori sisältää kuitenkin iteratiivisen sisäisen virheenkorjauksen. Baumgarten stabiloinnin käyttö yhdessä Gear-stiff –integraattorin kanssa ei pysty takaamaan rajoitteiden toteutumista. Ongelmana saattavat tosin olla Baumgarten stabiloinnin kertoimet, jotka eivät välttämättä ole stabiililla alueella.

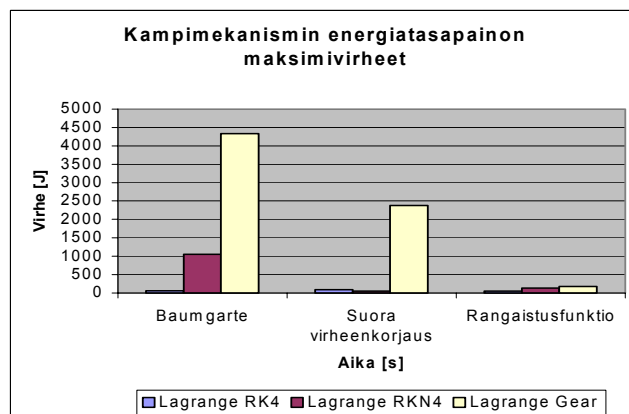
7.3 Energiatasapainon säilyminen

Järjestelmien energiatasapainon toteutumista tarkasteltiin, koska simuloinnin tulosten luotettavuus riippuu siitä erittäin paljon. Jos järjestelmään kertyy numeerisen virheen

seurauksena paljon ns. virtuaalista energiaa, saattavat kappaleiden kiihtyvyydet ja sitä kautta nopeudet ja asemat muuttua melko satunnaisesti. Energiatarkastelujen tekeminen monimutkaiselle järjestelmälle on erittäin hankalaa. Esimerkkien kaltaisissa yksinkertaisissa mekanismeissa liike- ja potentiaalienergian, sekä ulkoisten voimien tekemän työn laskeminen on kuitenkin mahdollista. Energiatasapainon virhe on laskettu summaamalla järjestelmän liike- ja potentiaalienergiat ja vähentämällä summasta ulkoisten voimien tekemä työ. Teoreettisesti oikea tulos on nolla, josta poikkeava arvo on virheen suuruus. Kuvissa 28, 29 ja taulukossa 11 on esitetty energiatasapainon maksimivirheen suuruudet eri integrointi- ja stabilointimenetelmillä.



Kuva 28. Nivelsuunnikkaan energiatasapainon maksimivirheet eri integraattoreilla ja stabilointimenetelmillä.

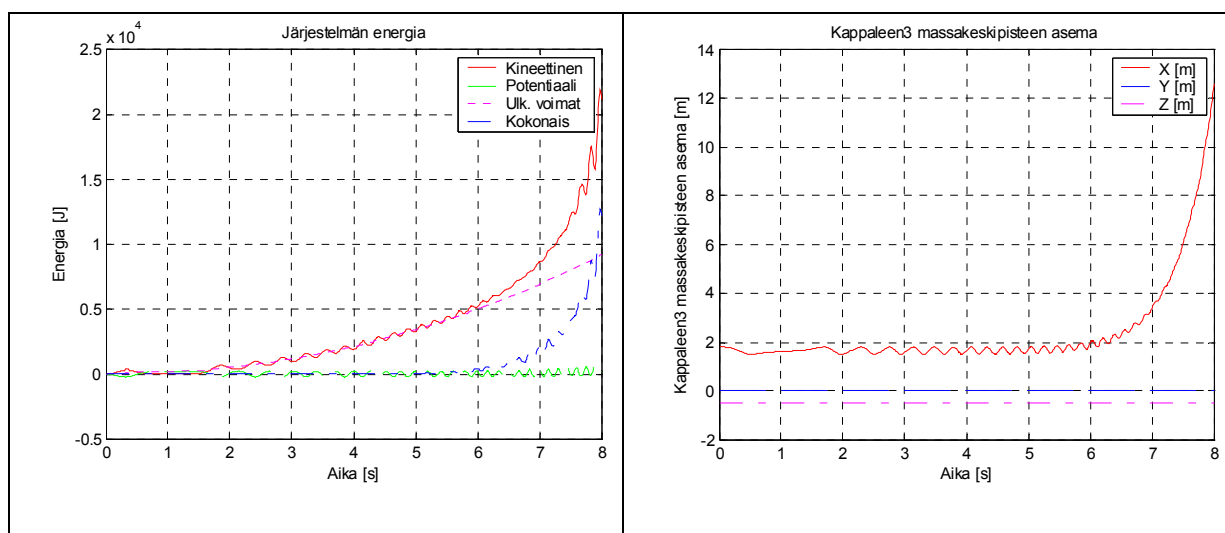


Kuva 29. Kampimekanismin energiatasapainon maksimivirheet eri integraattoreilla ja stabilointimenetelmillä.

Taulukko 11. Mekanismin energiatasapainon maksimivirheet

Mekanismi	Energiasapainon maksimivirhe [J]								
	Ei stabilointia			Baumgarte			Suora virheiden korjaus		
	RK4	RKN4	Gear	RK4	RKN4	Gear	RK4	RKN4	Gear
Nivelsuunnikas	84.84454687	149.0886473	1762.301813	166.2576949	187.7381778	2236.332335	313.185301	521.4993693	6571.980015
Kampi	3399	12700	4515.4	58.0411	1049.3	4330.7	94.3761	51.3247	2378.4

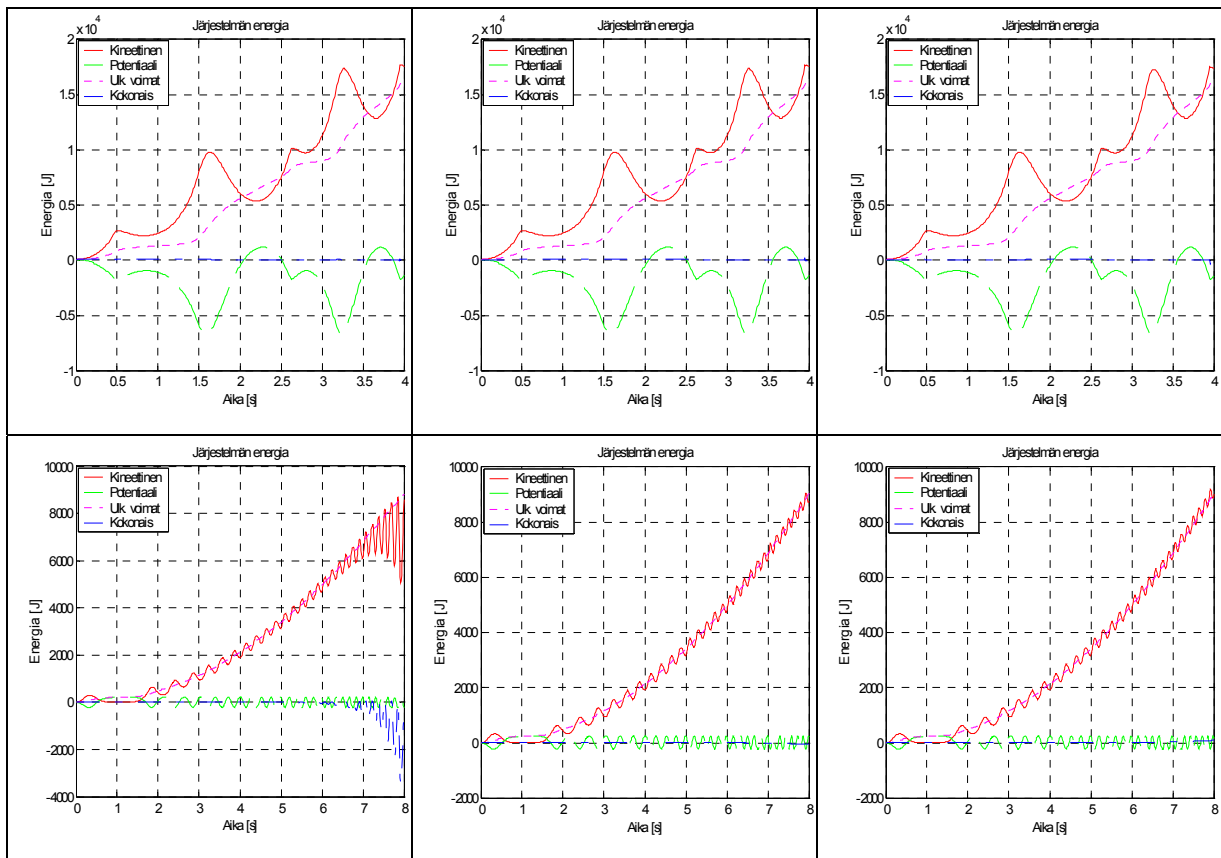
Yksinkertaisen nivelsuunnikkaan tapauksessa Gear-stiff –integraattorilla energiatasapainon virhe on suurin, riippumatta käytetystä stabilointimenetelmästä. Suoran virheiden korjausmenetelmän yhteydessä virhe on erittäin suuri. Syynä saattaa olla menetelmän hieman sopimaton käyttö vakiopituisten aika-askelen kanssa. Ennuste-korjaus –menetelmät soveltuvat paremmin muuttuvapituisten aika-askelen kanssa käytettäväksi. Kampimekanismin osalta toisen kertaluvun järjestelmien integrointiin tarkoitettua RKN4-integraattoria ilman stabilointia aiheuttaa poikkeuksellisen suuren virheen energiatasapainoon. Virhe aiheutuu nopeuksien integroinnissa tapahtuvasta virheestä, joka puolestaan johtuu liian pitkistä aika-askeleista. Kappaleiden asemat ja nopeudet eivät pidä paikkaansa kuuden sekunnin simuloinnin jälkeen, kuva 30. Aika-askelen puolittaminen poistaa ongelman lähes kokonaan mutta menetelmä näyttää olevan muita herkempi liian suurelle aika-askeleelle.



Kuva 30. Kampimekanismin energiatasapainon virheet ajan funktiona RKN4-integraattorilla ilman stabilointia.

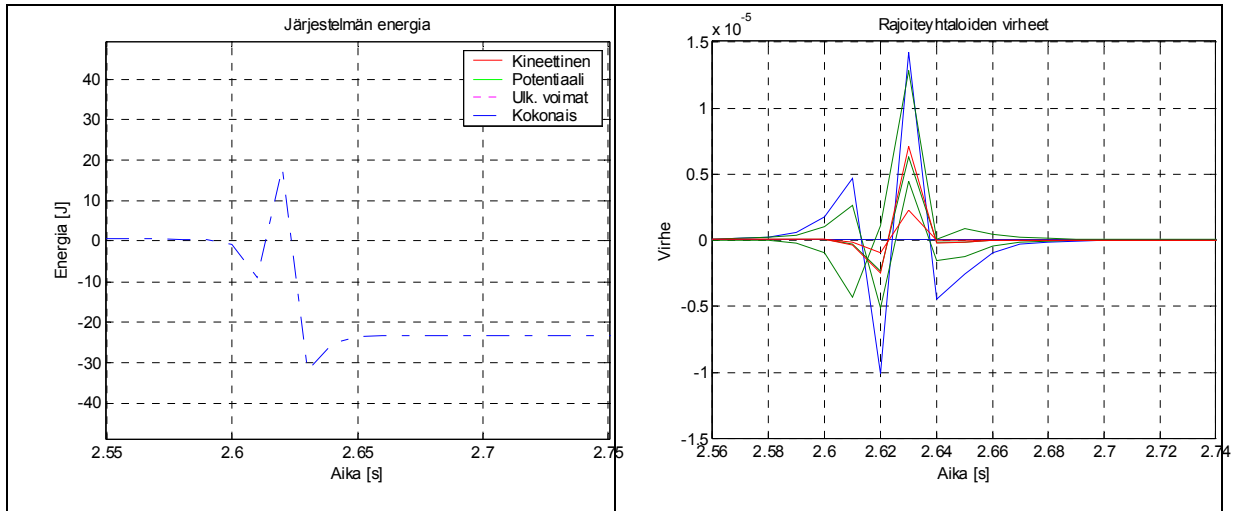
Kuvassa 31 on esitetty nivelsuunnikkaan ja kampimekanismin energia ajan funktiona, kun integraattorina on käytetty RK4-menetelmää. Ylempi rivi sisältää nivelsuunnikkaan ja alempi kampimekanismin energian. Vasemmalta katsottuna ensimmäisissä kuvaajissa ei ole käytetty stabilointia, toisessa on käytetty Baumgarten stabilointia ja kolmannessa suoraa virheiden korjausmenetelmää. Ilman stabilointia energiatasapaino ei säily kovinkaan hyvin. Suurin syy

tähänkin ongelmaan on kappaleiden nopeuksiin nähden liian suuri aika-askel. Aika-askelen puolittaminen poisti tässäkin tapauksessa ongelman lähes kokonaan. Kuuden sekunnin kohdalla kampimekanismin ensimmäisen varren kulmanopeus on lähes 2000 °/s, joten yhdellä aika-askeleella muutos on noin 20 °. Rajoiteyhtälöiden Jacobin matriisin termit eivät pidä paikkaansa noin suuren asema- ja nopeusmuutoksen jälkeen ja analyysi täytyisi ehdottomasti suorittaa pienemmällä aika-askeleella. Stabilointimenetelmät parantavat rajoitteiden toteutumista, joten niitä käyttävissä analyyseissä virhe ei ole läheskään niin suuri. Suoraa virheiden korjausta käytettäessä energiatasapainon virheet ovat pienimmät, koska menetelmän perusajatuksena on eliminoida rajoiteyhtälöiden virheet lisäämällä ratkaistuihin yleistettyihin koordinaatteihin korjaustermit, jotka nolllaavat virheet.



Kuva 31. Mekanismin energia ajan funktiona eri stabilointimenetelmillä.

Energiatasapainon virheet liittyvät virtuaalisen työn periaatteen kautta rajoiteyhtälöiden toteutumiseen, kuten kuvasta 32 nähdään. Kuvassa 32 on esitetty nivelsuunnikkaan energiatasapaino ja rajoiteyhtälöiden virheet käyttäen RK4-menetelmää ja suoraa virheiden korjausta. Kuvasta erottuu selvästi energiatasapainon rikkominen ajanhetkellä 2.62 s. jolloin myös rajoiteyhtälöissä ilmenee virhettä. Rajoitteiden tapauksessa virhe poistuu muutamalla aika-askeleella mutta järjestelmästä häviää pysyvästi energiaa.



Kuva 32. Nivelmekanismin energiatasapainon muutos.

8 JOHTOPÄÄTÖKSET

Mekanismien dynamiikan tietokonemallinnukseen soveltuvia menetelmiä on olemassa useita erityyppisiä. Useimmat niistä perustuvat Lagrangen menetelmään ja yleistettyjen koordinaattien käyttöön. Lagrangen menetelmä tarjoaa mahdollisuuden huomioida mekaniikan niveliä, matemaattisia rajoiteyhtälöitä, useilla eri tavoilla. Eri mallinnusmenetelmien erot ovatkin suurelta osin rajoitteiden huomiointiin ja yleistettyjen koordinaattien valintaan liittyviä. Yleistettyjen koordinaattien käyttö mahdollistaa menetelmien kehittämisen varsin pitkälle ilman, että käytettävät koordinaatit täytyy valita. Koordinaattien ja koordinaatistojen tulee olla sellaiset, että kappaleiden massaominaisuudet, asemat, nopeudet, kiihtyvyydet ja kappaleisiin vaikuttavat voimat voidaan kaikki kuvata yhteisessä koordinaatistossa, jota laskennan aikana käytetään. Tämä vaatii useita kuvauksia eri koordinaatistosta toiseen ja kuvausten määrittely saattaa joissakin tapauksissa aiheuttaa ongelmia.

Nivelrajoitteiden lisääminen mekanismiin aiheuttaa ongelmia, koska numeeriset ratkaisumenetelmät on tarkoitettu differentiaaliyhtälöryhmien ratkaisuun. Rajoitteiden huomioiminen lisää kuitenkin yhtälöryhmään algebraaliyhtälöitä, jotka on joko derivoitava kaksi kertaa tai ne on poistettava yhtälöryhmästä sijoitusmenettelyn avulla. Rajoitteiden derivointi aiheuttaa varsinaisiin rajoitteisiin eksponentiaalisesti kasvavaa virhettä. Sijoitusmenettelyllä saatavat yhtälöryhmät ovat pienempiä mutta yhtälöt ovat voimakkaasti epälineaarisia ja riippumattomien koordinaattien valintaan voidaan joutua päivittämään analyysin aikana.

Rajoitteisiin syntyvän virheen hallinta vaatii rajoiteyhtälöiden stabilointia. Stabilointiin on kehitetty useita erityyppisiä menetelmiä, joiden käyttö lisää ratkaisun vaatimaa laskenta-aikaa. Ilman stabilointia analyysien tulokset ovat kuitenkin käyttökelvottomia jo yksinkertaisiinkin järjestelmiin lyhyissä analyyseissä kertyvän huomattavan virheen takia. Rajoiteyhtälöiden rikkominen aiheuttaa myös järjestelmän energiatasapainoon virhettä, jolloin kappaleiden kiihtyvyydet ja sitä kautta nopeudet ja asemat eivät pidä paikkaansa.

Mekanismien dynamiikan numeeriseen ratkaisuun soveltuvat menetelmät voidaan jaotella useilla eri tavoilla. Eräs selkeä jaotteluperuste on aikaisemmilta aika-askelilta käytettävän tiedon mukainen jaottelu. Yksiaskelmenetelmät, kuten Runge-Kutta –menetelmään perustuvat

algoritmit, eivät käytä aikaisempien aika-askelten tuloksia, vaan pyrkivät määrittämään yhtälöryhmän derivaattojen arvot ratkaisemalla ne useassa pisteessä kahden ajanhetken välillä. Moniaskelmenetelmissä aikaisemman laskennan tietoa käytetään hyväksi ja kehittyneemmissä ennuste-korjaus –menetelmissä virheen suuruutta voidaan kontrolloida iteratiivisen korjauksen avulla. Laskentatehon kannalta perinteisten menetelmien käyttämä aika on helpommin ennustettavissa, iteraatiokierrosten lukumäärä, ja samalla vaadittu laskenta-aika, kun saattaa vaihdella rajustikin ennuste-korjaus -menetelmässä.

Tässä tutkimuksessa on tarkasteltu erityyppisiä mekanismien mallinnukseen ja numeeriseen ratkaisuun soveltuvia menetelmiä ja vertailtu niiden laskentatehokkuutta ja rajoitteiden ja energiatasapainon toteutumista yksinkertaisten esimerkkien avulla. Tulosten perusteella ei voi antaa yleispäteviä ohjeita ratkaisualgoritmien tai mallinnusmenetelmien valintaan. Selvää kuitenkin on, että ilman rajoitteiden stabilointia ei analyysien tuloksiin voi luottaa. Yksinkertaisten esimerkkitapausten kohdalla perinteiset yksiaskelintegrointimenetelmät toimivat hyvin. On kuitenkin luultavaa, että järjestelmien koon kasvaessa ja käytettäessä muuttuvapituista aika-askelta päästään ennuste-korjaus –menetelmällä tehokkaampaan laskentaan ja tarkempaan tulokseen. Eri stabilointimenetelmien sovellettavuuden välillä on erittäin suuria eroja. Baumgarten stabilointi kärsii numeerisesta epästabiiliudesta kinemaattisten singulariteettien lähistöllä. Laajennettu Lagrangen menetelmä ja rangaistusfunktiomenetelmä vaativat onnistuneet arvaukset rangaistuskertoimille tai ne ovat numeerisesti epästabiileja. Suora virheiden korjausmenetelmä osoittautui toimivaksi ja laskennallisesti tehokkaaksi tavaksi varmistaa rajoitteiden toteutuminen.

Avaruusmekanismien tapauksessa kiertymien kuvaaminen aiheuttaa paljon ongelmia. Numeeristen singulariteettien välttämiseksi käytetään kiertymäkoordinaatteina esim. Eulerin parametreja. Eri muuttujien käyttö kuitenkin kasvattaa ratkaistavan yhtälöryhmän kokoa ja vaatii kuvauksia parametreista toisiin. Tällä hetkellä suurin kiinnostus mallinnusmenetelmien puolella liittyykin menetelmiin, joissa kiertymien kuvaus voitaisiin yksinkertaistaa ja sitä kautta parantaa laskentatarkkuutta ja –tehokkuutta. Myös rajoitteiden stabilointimenetelmiä kehitetään ja differentiaali-algebraalihtälöryhmien ratkaisuun soveltuvia integrointimenetelmiä tutkitaan. Tavoitteena on parantaa mekanismien dynamiikan numeerisen ratkaisun tehokkuutta ja pienentää ratkaisun numeerista virhettä.

9 LÄHDELUETTELO

- 1 **Rouvinen A., Mikkola A., Handroos H.**, Coupled Simulation of a Hydromechanical System, -10th European ADAMS Users' Conference. Frankfurt/Niederrad, Germany, November 14th-15th, 1995.
- 2 **Rouvinen A., Mikkola A., Handroos H.**, Simulation of Hydraulics in Mechanism Dynamics Simulation Program, International Workshop 1999 on Computer Software on for Design, Analysis and Control of Fluid Power Systems, February 1999, Trondheim, Norway.
- 3 **Rouvinen A.**, Hydraulijärjestelmien mallintaminen ADAMS-ohjelmistossa, Diplomityö, LTKK 1995.
- 4 **Pessi P.**, Pneumatiikkajärjestelmien mallinnusmenetelmien vertailu, Diplomityö, LTKK 2002.
- 5 **Haug, E.J.**, Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems, Volume I: Basic Methods, Allyn and Bacon, Massachusetts, 1989.
- 6 **Nikravesh, P.E.**, Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems, Prentice Hall, New Jersey, 1988.
- 7 **Shabana, A.A.**, Computational dynamics, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994.
- 8 **Shabana, A.A.**, Dynamics of Multibody Systems, Second Edition, Cambridge University Press, 1998.
- 9 **Wehage, R.A., Haug, E.J.**, Generalized Coordinate Partitioning for Dimension Reduction in Analysis of Constrained Dynamic Systems, ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 104, January 1982, s. 247-255.
- 10 **Haug, E.J., Deyo, R.C.**, editors, Real-Time Integration Methods for Mechanical System Simulation, NATO ASI Series, Series F: Computer and System Sciences, Vol. 69, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- 11 **Garcia De Jalon, J.**, Bayo, E., Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems- The Real-Time Challenge, Springer-Verlag, 1994.
- 12 **Wojciech B.**, Elimination of Constraint Violation and Accuracy Aspects in Numerical Simulation of Multibody Systems, Multibody System Dynamics 7, 2002, s. 265-284.
- 13 **Baumgarte J.**, Stabilization of Constraints and Integrals of Motion in Dynamical Systems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 1, 1972, s. 1-16.
- 14 **Yoon, S., Howe, R.M., Greenwood, D.T.**, Stability and Accuracy Analysis of Baumgarte's Constraint Violation Stabilization Method. ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 117, September 1995, s. 446-453.

-
- 15 **Yu, Q., Chen, I.-M.**, A Direct violation correction method in numerical simulation of constrained multibody systems. *Computational Mechanics* 26, 2000, s. 52-57.
 - 16 **Yoon, S., Howe, R.M., Greenwood, D.T.**, Geometric Elimination of Constraint Violations in Numerical Simulation of Lagrangian Equations. *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 116, December 1994, s. 1058-1064.
 - 17 **Lin, S.-T., Hong, M.-C.**, Stabilization Method for Numerical Integration of Multibody Mechanical Systems. *ASME Journal Journal of Mechanical Design*, Vol. 120, December 1998, s. 565-572.
 - 18 **Zhenkuan, P., et al.**, An Automatic Correction Method for Position and Velocity Constraint Equations Violations in Multibody Systems. In Hong J., Shuhui J., editors, *Dynamics of Multibody Systems and Control*, 31-35, Beijing Technological University Press, 1996.