

**Lappeenrannan teknillinen yliopisto**  
**LUT Metalli**  
**Konetekniikka/Konstruktiotekniikka**

## **RASITUSTEN ÄLYKÄS SEURANTA**

**Työn tekijä:**  
**1. Tarkastaja**  
**2. Tarkastaja**

**Ins. (AMK) Elias Altarriba**  
**Prof. Aki Mikkola**  
**TkT. Kimmo Kerkkänen**

## **ALKUSANAT**

Tämä diplomityö on tehty Lappeenrannan teknillisen yliopiston konetekniikan osaston virtuaalisuunnittelun tutkimusryhmän professorin Aki Mikkolan toimeksiannosta. Haluan kiittää häntä sekä mielenkiintoisen aihealueen toimeksiannon johdosta että erinomaisesta ohjauksesta, avusta ja henkisestä tuesta diplomityön työstämisen aikana. Kiitokset myös työn toiselle tarkastajalle, TKT Kimmo Kerkkäselle, sekä virtuaalisuunnittelun tutkimusryhmän nuoremmalle tutkijalle DI Tuomas Rantalaiselle laadukkaan välipalautteen antamisesta työn prosessoinnin aikana. Englanninkielisen tiivistelmän kieliasun tarkastuksesta kiitokset M.Eng. Scott Semkenille.

Kiitokset myös perheelleni, puolisololleni Anne-Marille ja pojalleni Antonille, mukana elämisestä ja henkisestä tuesta.

Lappeenrannan Skinnarilassa 11.11. kello 11 vuonna 2010.

Elias Altarriba

## **TIIVISTELMÄ**

Lappeenrannan teknillinen yliopisto  
Teknillinen tiedekunta  
Konetekniikan koulutusohjelma

Elias Altarriba

### **Rasitusten älykäs seuranta**

Diplomityö

2010

79 sivua, 4 kuvaa, 3 taulukkoa, 2 liitettä

Tarkastajat: Professori Aki Mikkola  
TKT Kimmo Kerkkänen

Hakusanat: Monikappaledynamiikka, jännitys, siirtymä, optimointi, osarakennetekniikka, joustavat kappaleet

Tässä diplomityössä käsitellään monikappalesysteeminä mallinnetun toimilaitteen tai mekaanisen systeemin kappaleissa vaikuttavien rasitusten, siirtymien ja jännitysten laskentamenetelmiä. Työhön sisällytettyjen menetelmien valinta on toteutettu 2000-luvulla virtuaalisuunnittelua käsittelevissä tiedelehdissä julkaistujen artikkelien pohjalta. Työn tarkoituksena on muodostaa kirjallisuuskatsaus uusien laskentamenetelmien ominaisuuksista ja metodiikasta, mitä voidaan tarvittaessa soveltaa virtuaalisuunnittelun tarpeisiin.

Kaksi esiteltävistä menetelmistä on optimointimenetelmiä (RBDO ja ESL). Muissa menetelmissä käsitellään muun muassa venymien rekonstruointia ja hankauskitkasta komponentteihin kohdistuvia jännityksiä. Moving frame-menetelmässä sovelletaan kelluvan koordinaatiston periaatetta, yksi menetelmistä perustuu selkeästi osarakennetekniikkaan ja yhdessä kappaleiden joustokäyttäytymistä mallinnetaan muotofunktioiden avulla. Lisäksi on kolme soveltavaa esimerkkiä rasitusten seurannasta teollisuuskoneissa.

Laskentamenetelmät ovat luonteeltaan ja sovelluskelpoisuudeltaan erilaisia. Optimointimenetelmät ovat parhaimmillaan rakenteiden jatkokehitystyössä, siinä missä muut menetelmät soveltuvat joko olemassa olevien rakenteiden mallintamiseen tai kokonaan uusien systeemien suunnittelutyökaluiksi. Tätä eroavuutta voidaan pitää hyvänä asiana, jotta voidaan valita parhaiten omiin tarkoituksiin soveltuva menetelmä.

## **ABSTRACT**

Lappeenranta University of Technology  
Faculty of Technology  
Degree Programme in Mechanical Engineering

### **Intelligent Monitoring of Stresses and Strains**

Master's thesis

2010

79 pages, 4 pictures, 3 tables, 2 appendices

Examiners: Professor Aki Mikkola  
D.Sc. (Tech) Kimmo Kerkkänen

Keywords: Multibody dynamics, stress, strain, optimization, component mode synthesis, flexible bodies

New multibody system dynamics methods for the virtual modeling of stresses and strains are the theme of this master's thesis. The calculation methods considered were introduced by papers published in the 2000's in international journals on virtual design. The main objective of this literature analysis is to collect information about the new calculation methods, so researchers from the virtual design group of the Lappeenranta University of Technology can apply it in their work.

Two of the methods considered are clearly optimization methods (RBDO and ESL); another calculates stresses by the reconstruction of strains; yet another deals with the calculation of stresses caused by friction. Considered also; one method applies the theory of a moving frame, another method is application of component mode synthesis and one method applies the theory of shape functions. Finally, three examples are given of monitoring stresses in industrial machines.

Each calculation method has unique features that make it suitable for specific applications. The optimization methods are most appropriate in the development of structures and machines, while the other methods can be applied to the modeling of existing structures or as part of the process to design completely new systems. The diversity of the methods and their applications is a benefit to the designer, who can select from them the most appropriate tool for the task at hand.

## SISÄLLYS

<b>1</b>	<b>JOHDANTO</b>	<b>1</b>
1.1	Työn tarkoitus	1
1.2	Työn rajaus	3
1.3	Työn tavoitteet ja toteutusmenetelmät	5
<b>2</b>	<b>RASITUSTEN LASKENTAMENETELMIEN MATEMAATTINEN TARKASTELU</b>	<b>6</b>
2.1	ESL-optimoinnin laskentaprosessi	7
2.2	RBDO-optimoinnin laskentaprosessi	11
2.3	Venymien rekonstruointimenetelmän laskentaprosessi	14
2.4	Kitkan aiheuttamien rasitusten laskentaprosessi	16
2.5	Moving frame-laskentaprosessi	18
2.6	Laskentaprosessi rasitusten määrittelemiseksi osarakennetekniikalla	24
2.7	Joustavien kappaleiden muotofunktiomallintamisen laskentaprosessi	27
2.8	Kokoonpanorobotin rasitusten analysoinnin soveltava esimerkki	30
<b>3</b>	<b>RASITUSTEN LASKENTAMENETELMIEN OMINAISUUKSIEN KÄSITTELY</b>	<b>33</b>
3.1	ESL-optimointi	33
3.2	RBDO-optimointi	36
3.3	Venymien rekonstruointimenetelmä	41
3.4	Kitkan aiheuttamien rasitusten mallinnusmenetelmä	44
3.5	Moving frame-laskentamenetelmä	47
3.6	Rasitusten määrittäminen osarakennetekniikalla	50
3.7	Joustavien kappaleiden mallintaminen muotofunktioiden avulla	52
3.8	Soveltavia robottilaitteiden rasitusten analysointiesimerkkejä	56
3.8.1	<i>LCD-näyttöjen laseja siirtävän robotin analysointi</i>	56
3.8.2	<i>Kiskokuljettimen pyörien väsymisanalyysi</i>	57
3.8.3	<i>Kiskokuljettimen rungon väsymisanalyysi</i>	60
<b>4</b>	<b>PÄÄTELMÄT RASITUSTEN LASKENTAMENETELMIEN OMINAISUUKSISTA</b>	<b>63</b>
4.1	Menetelmien ominaisuusmatriisi	63
4.2	Lisähuomioita menetelmien ominaisuuksista	65
4.3	Menetelmien jatkokehitysmahdollisuudet	72
<b>5</b>	<b>YHTEENVETO</b>	<b>75</b>
	<b>LÄHDELUETTELO</b>	<b>78</b>
LIITE 1	ESL-laskentaprosessikaavio	
LIITE 2	RBDO-laskentaprosessikaavio	

## SYMBOLILUETTELO

Latinalaiset aakkoset

<b>A</b>	Kiertomatriisi
<b>b</b>	Suunnitteluparametrivektori
<b>C</b>	Jacobian-matriisi
<b>C</b>	Rajoitevektori
<b>D</b>	Vaimennusmatriisi
<b>F</b>	Voimavektori
<b>I</b>	Inertiamatriisi
<b>K</b>	Jäykkyydsmatriisi
<b>M</b>	Massamatriisi
<b>n</b>	Lukumäärä
<b>p</b>	Modaalikoordinaattivektori
<b>q</b>	Yleistettyjen koordinaattien vektori
<b>Q</b>	Voimamatriisi
<b>r</b>	Asemavektori
<b>R</b>	Lokaalin koordinaatiston asemavektori
<b>t</b>	Aika
<b>T</b>	Vääntömomenttivektori
<b>u</b>	Partikkelin asema lokaalissa koordinaatistossa
<b>v</b>	Nopeusvektori

## Kreikkalaiset aakkoset

$\delta$  Virtuaalinen siirtymä/kiertymä

$\theta$  Kiertymävektori

$\phi$  Muotomatriisi

$\psi$  Muotomatriisi

$\rho$  Tiheys

$\omega$  Kulmanopeusvektori

## Alaindeksit

A Vaikuttava voima

C Rajoittava voima

V Nopeus

e Yleistetty voima, elastinen siirtymä

## Lyhenteet

CFD Computational fluid dynamics

ESL Equivalent static loads

FEM Finite element method

FORM First order reliability methods

MBS Multibody system

PMA Performance measure approach

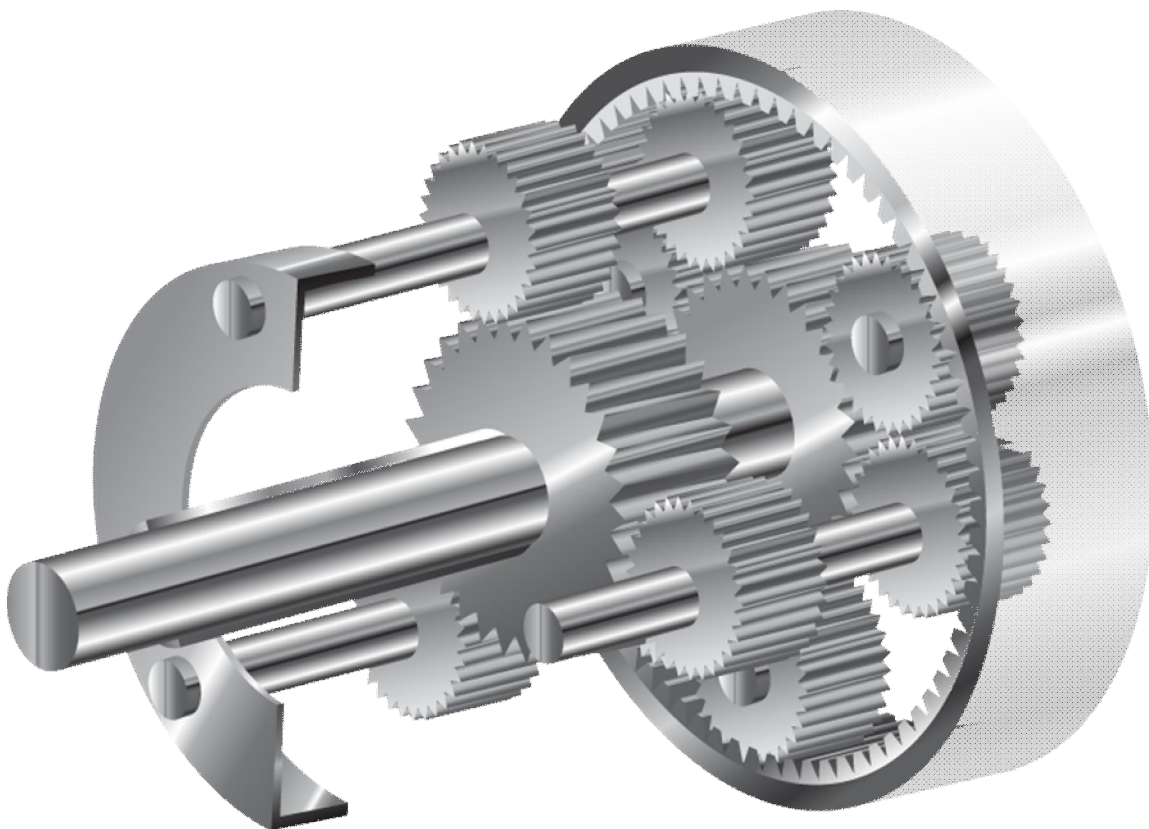
RBDO Reliability based design optimization

RIA Reliability index approach

## 1 JOHDANTO

### 1.1 Työn tarkoitus

2000-luvun ensimmäisen vuosikymmenen aikana Lappeenrannan teknillisen yliopiston virtuaalisuunnittelun ja monikappaledynamiikan tutkimusryhmät ovat tehneet lukuisia tutkimusprojekteja liittyen erityyppisten robottien ja toimilaitteiden virtuaalisuunnitteluun, mallintamiseen ja dynamiikan simulointiin [1]. Kuvassa 1 on nähtävissä esimerkki planeetta-pyörästöstä, minkä suunnitteluun ja ominaisuuksien simulointiin voidaan soveltaa monikappaledynamiikkaa. Suoritetuista tutkimuksista huolimatta rasitusten vaikutuspiirissä olevien robotti- ja toimilaitesysteemien mallintamisessa ilmenee edelleen haasteita erityisesti simuloitaessa monimutkaisia rakenteita tai niissä usein tilastollisesti ilmeneviä väsymisvaurioita. Suurimmaksi ongelmaksi nousee kuitenkin yleensä simulointitarkkuuden ja tarvittavan laskentatehon välinen suhde, jonka optimointi ei ole lainkaan yksiselitteinen asia.



Kuva 1: Ravigneaux-vaihteisto on dynaaminen monikappalesysteemi (Kia Motors Co., K-Step)



Länsimaisen teollisuuden kilpailukyky perustuu enenevässä määrin teollisuus- ja kokoonpanolaitoksien tuotantolinjojen kasvavaan automaatioasteeseen /2/. Tuotannossa ja kokoonpanolinjoilla käytössä olevien robottien ominaisuuksien on mahdollistettava toiminta suhteellisen suurella työkentällä ja toisaalta niiden rakenteellinen jäykkyys on oltava riittävä, jolloin niitä voidaan hyödyntää myös tarkkuutta vaativien työtehtävien suorittamisessa, kuten komponenttien asentamistyössä, hitsauksessa tai metallityöstössä, sekä elektroniikkateollisuuden kasvavissa tarpeissa. Kokoonpanolinjojen edellyttämien työtehtävien suorittamisen aikana robotti on jatkuvasti vuorovaikutuksessa ympäristönsä kanssa. Osa vuorovaikutuksesta tapahtuu ohjaajan kanssa. Ohjaaja voi olla joko ihminen tai keskusyksikkö, tai monissa tapauksissa molemmat voivat toimia ohjaajina. Jotta ohjausprosessi voitaisiin suorittaa mahdollisimman tarkoituksenmukaisesti ja samalla myös taloudellisessa mielessä tehokkaasti, ensiarvoisen tärkeää on tarjota ohjaajalle mahdollisimman reaaliaikainen palaute robotin tai toimilaitteen vallitsevasta olotilasta. Tämän palautteen tasoa parantamalla voidaan kehittää niin ohjaajan ja robotin kuin robotin ja työtehtävän välistä vuorovaikutusta.

Toimilaitteen ja ohjaajan välisen takaisinkytkennän simulointi on teoriassa suhteellisen helppoa. Mikäli toimilaitte toimisi aina ideaalisesti, voitaisiin palautetta antavan takaisinkytkennän sisältämä informaatio jo suunnitteluvaiheessa approksimoida hyvällä tarkkuudella toimilaitteen käytön optimoimiseksi. Käytännössä ideaaliset robotit ovat kuitenkin mahdottomia toteuttaa, minkä vuoksi toiminnaltaan tarkkoja robotteja simuloitaessa on huomiotava myös takaisinkytkentäsignaaliin kumuloituvat epätarkkuudet. Osa signaalin epätarkkuuksista johtuu voimalaitteiden, kuten hydrauliiikka-, pneumatiikka- ja sähköjärjestelmien, toiminnan epätarkkuuksista ja tarkoituksettomista viiveistä, osa taas on peräisin toimilaitteen komponenttien muodonmuutoksista eli deformaatioista.

Mitä suurempaa tarkkuutta toimilaitteelta edellytetään, sitä keskeisemmäksi nousee käytön aikana ilmenevistä rasituksista seuraavien toimintaa haittaavien epätarkkuuksien huomioiminen systeemiä ohjattaessa. Erityisen merkittäväksi ongelma kehittyy systeemeissä, mitkä sisältävät suuria inertiaivoimia ja suuria kiihtyvyyksiä, ja joiden toiminnan tulisi kuitenkin olla tarkkaa ja yksityiskohtaista. Tuolloin rasituksista aiheutuvien systeemin kappaleiden deformoitumisten määrittämisestä tulee oleellinen asia jo suunnitteluvaiheessa systeemin virheettömän toiminnan takaamiseksi. Myös systeemin kestävyyttä erityisesti väsymisen suhteen arvioitaessa on rasitusten mallintaminen keskeisellä sijalla. Tässä työssä tarkoituksena on perehtyä tarjolla oleviin rasitusten laskentamenetelmiin, joiden avulla voidaan simuloida robottien ja muiden toimilaitteiden toimintaa tarkemmin ilman, että simulointiin kuluva laskenta-aika kasvaisi kohtuuttomaksi.

## 1.2 Työn rajaus

Robottien ja muiden toimilaitteiden epätarkkuudet voivat johtua monista eri tekijöistä. Tässä työssä tarkoituksena on kuitenkin tarkastella ainoastaan dynamiikasta aiheutuvia systeemin eri komponentteihin kohdistuvia rasituksia ja niiden seurauksena aiheutuneita muodonmuutoksia eli deformaatioita. Rasitusten vaikutusten simuloinnilla voidaan määrittää myös rakenteen mahdolliset heikot kohdat tai yllirasittumiset jo suunnitteluvaiheessa, sekä tarkastella rakenteen käyttäytymistä mahdollisissa oletettavissa olevissa erikoistilanteissa. Näitä erikoistilanteita ovat esimerkiksi yllättävä ylikuormitus tai jonkin komponentin vaurioituminen. Erikoistilannesimuloinnilla voidaan täten jo suunnitteluvaiheessa parantaa merkittävästi systeemin turvallisuutta ja kestävyyttä.

Systeemin komponenttien rasituksilla tarkoitetaan niissä vaikuttavia sisäisiä rasituksia, jotka ovat seurausta ulkoisten voimien ja dynaamisten ilmiöiden vaikutuksista. Ulkoisilla voimilla tarkoitetaan esimerkiksi painovoimaa ja komponenttiin kohdistuvia yleensä erilaisen toimilaitteiden aiheuttamia ulkoisia kuormituksia, sekä systeemin muiden kappaleiden tutkittavaan komponenttiin nivelien välityksillä aiheuttamia rasituksia. Dynaamisia ilmiöitä ovat kiihtyvyyksien lisäksi muun muassa inertia- ja keskipakovoimien vaikutukset. Kuormittavien tekijöiden seurauksena kappaleeseen muodostuu sisäisiä jännityksiä, jotka voivat aiheuttaa kappaleessa elastisia tai plastisia siirtymiä vallitsevien jännitysten voimakkuuksista tai kappaleen materiaaliominaisuuksista riippuen. Deformoitumisilmiöllä on aina vaikutusta systeemin käytettävyyteen, tarkkaan ohjaamiseen ja komponenttien kestoikään.

Älykäs seuranta on käsitteenä varsin laaja ja monimerkityksinen, minkä johdosta sen tarkempi määrittely on tarpeellista. Rasitusten seurannassa seurannan älykkyys voidaan nähdä kahdesta näkökulmasta. Käytönaikaisena älykkäänä seurantana tarkoitetaan järjestelmää, jossa mitataan käytönaikaisia rasituksia esimerkiksi venymäliuskojen tai muiden empiiristen antureiden avulla. Antureiden lähettämä informaatio muunnetaan digitaaliseen muotoon, minkä jälkeen sitä käytetään yhtenä tietolähteenä, jonka perusteella systeemin elektroninen ohjainlaite välittää käyttölaitteille ohjaussignaaleja ja ohjaa näin systeemin toimintaa pitäen sen turvallisella ja tarpeenmukaisella tasolla. Järjestelmä mahdollistaa myös rasituksista mitatun digitaalisen signaalin tallentamisen, jolloin tätä informaatiota voidaan käyttää myöhemmin tietolähteenä analysoitaessa esimerkiksi systeemin toimintahistoriaa kyseisen robotin tai toimilaitteen tuotekehitysprosessin tarpeisiin. Tässä työssä rasitusten empiiristä seurantaa ei kuitenkaan käsitellä kevyttä sivuamista lukuun ottamatta.

Tässä työssä älykkäällä seurannalla tarkoitetaan virtuaalimaailmassa matemaattisin mallien suoritettavaa todellisten systeemien rasiusten analysointia. Tarkoituksena on perehtyä uusiin menetelmiin, joiden avulla rasiuksien voimakkuutta ja niiden kehittymistä voidaan simuloida mahdollisimman todenmukaisesti huomioimalla samalla tietokoneiden laskentatehon rajallisuus ja simuloinnin realistisuustason tarpeenmukaisuus. Simulaatio-prosessi mahdollistaa myös simulaation aikana lasketun rasiushistorian tallentamisen myöhempää käsittelyä varten, jolloin voidaan tarkastella rasiusten käyttäytymistä ja ilmenemistä erilaisten dynaamisten kuormitusten ja muiden käyttötilanteiden aikana. Tarvittaessa tätä simuloitua rasiushistoriaa voidaan verrata myös empiirisesti mittaamalla saatuun rasiushistoriaan, jolloin mallin oikeellisuus ja tarkkuus voidaan varmistaa.

Systeemien dynamiikan simulointi toteutetaan mallintamalla rakenne monikappalesysteeminä erityisesti, mikäli systeemi koostuu useista nivelillä toisiinsa liitetyistä komponenteista. Monikappalemallissa systeemien dynamiikan mallintaminen ja mahdollisesti komponenttien keskinäiset suuretkin kiertymät voidaan laskea ilman suunnittelijan omaan intuitioon perustuvia oletuksia tai ratkaisumalleja, joiden määrittäminen tietokoneavusteisessa laskennassa on erittäin haastavaa, ellei useissa tapauksissa jopa täysin mahdotonta. Monikappaledynamiikan yhtälöiden käsittely symbolisella tasolla on helppoa, niiden rakenne soveltuu tietokonepohjaiseen laskentaan ja monikappalemalli mahdollistaa tarvittaessa myös elementtimenetelmän yhdistämisen esimerkiksi jonkin yksittäisen komponentin malliin, mikä lisää mahdollisuuksia tavoitella realistisia tuloksia ja valita laskentamenetelmä erityistarpeiden mukaan.

Kaikki tässä työssä käsiteltävät menetelmät soveltuvat tarkasteltavaksi otettavan kappaleen tai systeemin simulointiin siten, että kappaleen joustavuus otetaan huomioon mallinnuksessa. Tähän rajaukseen on päädytty kahdesta syystä. Ensinnäkin toiminnaltaan tarkkuutta vaativien toimilaitteiden tai robottien suunnittelu ja mallintaminen vaativat yleensä kappaleiden mallintamisen joustavana, jotta mahdolliset dynaamiset epävakaudet voidaan havaita jo suunnitteluvaiheessa ja systeemin todellinen dynaaminen käyttäytyminen tunnettaisiin mahdollisimman tarkkaan. Toisaalta systeemien mallintamisessa joudutaan aina tekemään approksimaatioita, joiden vaikutusta lopputuloksiin ei voida kiistää, minkä takia todellisuudessa joustavien kappaleiden mallintaminen jäykkänä yksityiskohtaisessa suunnittelutyössä ei ole mielekäästä. Käytännössä täysin joustavana mallinnettavasta sistemistä voi useissa tapauksissa tulla tuloksien tarkkuuteen nähden laskennallisesti tarpeettoman raskas, minkä seurauksena yleensä joustavana mallinnetaan ainoastaan sellaiset komponentit, jotka ovat itsessään joko erityistarkastelun kohteena tai joiden joustavuudella on suuri vaikutus tarkasteltavana olevan systeemin käyttäytymiseen.

### 1.3 Työn tavoitteet ja toteutusmenetelmät

Monikappaledynamiikassa rasiusten laskenta voidaan toteuttaa useilla toisistaan poikkeavilla menetelmillä, joiden tarkkuus, soveltamiskelpoisuus ja laskentatehon tarve vaihtelevat. Jos pohditaan ideaalisen rasiusten laskentamenetelmän luonnetta, tulisi menetelmän sisältää kaikki rasiuksiin vaikuttavat muuttujat, muodostuvien yhtälöryhmien tulisi olla mahdollisimman yksinkertaisia ja niiden ratkaiseminen mahdollisimman tehokasta ja yksinkertaista ilman suuria numeerisia approksimaatioita. Menetelmän tulisi soveltua yhtä lailla systeemien alkusuunnitteluun kuin olemassa olevien rakenteiden optimointiin tai ominaisuuksien virtuaaliseen tutkimiseen. Lisäksi menetelmän tulisi sisältää mahdollisimman vähän sarjassa tehtäviä itsenäisiä analyysejä ja tuloksien olisi oltava laadukkaita ja soveltamiskelpoisia. Nämä ehdot täyttävää menetelmää ei toistaiseksi ole vielä kehitetty, minkä johdosta rasiuksia on laskettava erilaisiin tilanteisiin soveltuvilla erityyppisillä menetelmillä, joiden tarkkuus, soveltamiskelpoisuus, laskentatehokkuus ja monet muut yksityiskohdat vaihtelevat menetelmittäin, mikä tekee menetelmän valinnasta joskus yksiselitteistä ja joskus haastavaa.

Koska monikappaledynamiikan voidaan olettaa olevan yleisesti tunnettu teoria /3/, ei sen perusteiden tarkkaa käsittelyä katsota tarpeelliseksi, vaan huomio keskitetään uusimpien laskentamenetelmien metodiikan, luonteen ja soveltamiskyvyn selvittämiseen erilaisten systeemien toiminnan tarkastelemiseksi. Näiden menetelmien kartoitus suoritetaan tutustumalla kansainvälisten monikappaledynamiikkaa käsittelevien tiedelehtien artikkeleissa viime aikoina tehtyihin julkaisuihin, jotka käsittelevät venymien tai rasiusten laskentaa systeemin komponenteissa. Ensisijaisesti tarkoituksena on etsiä mahdollisimman uusia asiaa käsitteleviä artikkeleita vuosilta 2005–2010, mutta myös hieman vanhemmat, 2000-luvun vaihteen tienoilta olevat artikkelit huomioidaan tutkimusmateriaaliksi.

Rasiusten älykästä seuranta käsittelevien artikkelien etsintä perustuu hakusanoihin monikappaledynamiikka (mbs ja multibody system), jännitykset (stress) ja venymät (strain). Vaikka monikappaledynamiikkaa käsitteleviä artikkeleita on tiedelehdissä julkaistu runsaasti, on rasiusten älykästä seuranta käsitteleviä julkaisuja huomattavasti vähemmän. Hakusanojen avulla hankittu otos analysoidaan tarkastelemalla artikkelien sisällön suhdetta rasiusten laskentaan, minkä perusteella valitaan tarkemmin analysoitavat artikkelit. Artikkelien perusteella tarkasteltaviksi valittujen seitsemän laskentamenetelmän esittely tapahtuu kolmessa luvussa. Menetelmien matemaattinen metodiikka käsitellään luvussa 2, yleistietoa menetelmien luonteesta, ominaisuuksista ja soveltuvuudesta on saatavissa luvusta 3, ja lukuun 4 on koottu menetelmien tärkeimmät ominaisuudet ja luonteenpiirteet niiden keskinäisen vertailun helpottamiseksi.

## 2 RASITUSTEN LASKENTAMENETELMIEN MATEMAATTINEN TARKASTELU

Tässä luvussa käsitellään rasitusten laskentamenetelmien matemaattinen metodiikka. Tarkasteltavia menetelmiä on seitsemän kappaletta. Menetelmistä kaksi on optimointimenetelmiä (ESL ja RBDO), joista ESL (equivalent static loads, luvut 2.1 ja 3.1) perustuu dynaamisten kuormitusten mallintamiseen ekvivalentteina staattisina kuormituksina ja RBDO (reliability based design optimization, luvut 2.2 ja 3.2) lähestyy optimoitavaa ominaisuutta systeemin toiminnan luotettavuuden näkökulmasta todennäköisyyslaskentaa apuna käyttäen. Venymien rekonstruointimenetelmässä (luvut 2.3 ja 3.3) rekonstruoidaan systeemin komponenteissa eri kuormitusvaiheissa ilmeneviä deformaatioita, joiden perusteella voidaan määrittää komponenteissa vaikuttavat sisäiset jännitykset. Kitkarasitusten mallintamismenetelmässä (luvut 2.4 ja 3.4) tarkastellaan kappaleiden välisestä hankaavasta kitkakontaktista aiheutuvien voimien suuruuksia ja käyttäytymistä. Moving frame-laskentamenetelmä (luvut 2.5 ja 3.5) perustuu kelluvan koordinaatiston laskentamethodiikkaan. Kyseinen menetelmä on erittäin soveltamiskelpoinen monimutkaisten systeemien rasitusten laskentaan. Osarakennetekniikkaan perustuvassa rasitusten laskentamenetelmässä (luvut 2.6 ja 3.6) hyödynnetään moodianalyysiä tarkasteltavan kappaleen joustavuuden mallintamiseksi. On huomioitava, että moodianalyysi on toki käytössä myös muussa muussakin menetelmässä sen soveltamiskelpoisuuden vuoksi. Viimeisessä esiteltävässä menetelmässä kappaleiden joustavuus ja rasitusten vaikutuksesta siihen muodostuvat deformaatiot lasketaan muotofunktioiden avulla (luvut 2.7 ja 3.7). Lisäksi luvussa 2.8 käsitellään soveltavan tehdasrobotin simulointiesimerkin laskentamethodiikka. Soveltavista esimerkeistä ja niistä tehdyistä havainnoista on saatavissa lisätietoa luvusta 3.8.

## 2.1 ESL-optimoinnin laskentaprosessi

ESL-optimoinnin (equivalent static loads) laskentaprosessi /4, s. 549...562/ on kuvattu graafisesti liitteessä 1. Prosessin aluksi luodaan simuloitavasta rakenteesta tai toimilaitteesta monikappalemalli, minkä jälkeen valitaan systeemin optimoitavat komponentit. Laskentaprosessi etenee optimointiprosesseille tyypillisellä silmukkaperiaatteella. Liitteen 1 kuvasta voidaan havaita silmukoita olevan kaksi kappaletta, värähtelyanalyysin ympärillä oleva sisäsykli ja koko optimointiprosessin sisältävä ulkosykli.

Optimointiprosessi aloitetaan määrittämällä optimoitavaa ominaisuutta kuvaavalle suunnitteluparametriverktorille ( $\mathbf{b}_p$ ) alkutilanteen arvot ( $\mathbf{b}_0$ ) ja asettamalla laskentaprosessin toistosyklar (p') määrä aluksi nolnaan yhtälön 1 /4, s. 554/ osoittamalla tavalla.

$$\begin{aligned} p' &= 0 \\ \mathbf{b}_{p'} &= \mathbf{b}_0 \end{aligned} \tag{1}$$

Systeemin kappaleet oletetaan optimointiprosessin alussa jäykiksi ja systeemille suoritetaan jäykkien kappaleiden dynaaminen analyysi. Kappaleiden sisäisten voimien oletetaan vastaavan ulkoisia voimia. Sisäiset voimat määritellään systeemiä rajoittaviksi voimiksi ja niiden laskentaan käytetään jäykkien kappaleiden liikeyhtälöä 2 (johdettu Newton-Euler) /4, s. 553/.

$$\delta \mathbf{q}^T [\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{F}_A] + \delta \boldsymbol{\theta}^T [\mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} - \mathbf{T}_A] = 0 \tag{2}$$

Yhtälössä 2  $\mathbf{M}$  on massamatriisi,  $\mathbf{q}$  on asemavektori,  $\mathbf{F}$  on voimavektori,  $\mathbf{I}$  inertiamatriisi,  $\mathbf{T}$  vääntömomenttivektori,  $\boldsymbol{\omega}$  kulmanopeusvektori ja  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$  vinosymmetrinen kulmanopeusmatriisi. Alaindeksi A määrittää voiman ja momentin olevan ulkoisesti vaikuttavia. Määriteltäessä kinemaattiset rajoitteet virtuaalisten siirtymien  $\delta \mathbf{q}$  ja kiertymien  $\delta \boldsymbol{\theta}$  suhteen rajoitematriisilla  $\mathbf{C}$ , yksinkertaistuu yhtälö muotoon (yhtälö 3) /4, s. 553/

$$\mathbf{C}_q \delta \mathbf{q} + \mathbf{C}_\theta \delta \boldsymbol{\theta} = 0, \tag{3}$$

missä  $\mathbf{C}_q$  ja  $\mathbf{C}_\theta$  ovat siirtymien ja kiertymien suhteen muodostettuja Jacobian-matriiseja.

Systeemin dynamiikka määritellään energiaperiaatteella yhtälön 2 ja Lagrangen kertoimien ( $\lambda$ ) avulla. Tuolloin yhtälö johdetaan muotoon (yhtälö 4) /4, s. 553/

$$\delta \mathbf{q}^T (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{F}_A + \mathbf{C}_q^T \lambda) + \delta \boldsymbol{\theta}^T (\mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} - \mathbf{T}_A + \mathbf{C}_\theta^T \lambda) = 0. \quad (4)$$

Yhtälö sisältää satunnaiset siirtymä- ( $\delta \mathbf{q}$ ) ja kiertymävektorit ( $\delta \boldsymbol{\theta}$ ). Jotta yhtälö toteutuisi aina, on sekä siirtymä- että kiertymävektoreiden kertoimien oltava nollia. Asettaessa näiden vektoreiden sulkeissa olevat kerrointermit nolliksi, voidaan ne kuvata yhtälöillä 5 ja 6 /4, s. 553/.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_q^T \lambda = \mathbf{F}_A \quad (5)$$

$$\mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{C}_\theta^T \lambda = \mathbf{T}_A - \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad (6)$$

Näiden yhtälöiden vasemmalla puolella olevat toiset termit kuvaavat negatiivisia rajoitevoimia. Jotta rajoitevoimien esittäminen olisi havainnollisempaa (yhtälöt 7 ja 8) /4, s. 554/, merkitään kappaletta rajoittavien voimien termiä merkinnällä  $\mathbf{F}_C$  ja rajoittavia vääntömomenteja termillä  $\mathbf{T}_C$ .

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}_A - \mathbf{C}_q^T \lambda = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_C \quad (7)$$

$$\mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{T}_A - \mathbf{C}_\theta^T \lambda - \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{T}_A + \mathbf{T}_C - \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad (8)$$

Yhtälöiden oikeanpuoleiset termit kuvaavat monikappalesysteemissä vaikuttavia sisäisiä voimia. Näiden voimien osajoukko sisältää myös tarkastelun kohteeksi otetussa kappalessa vaikuttavien ulkoisten voimien määrittelyn. Sisäiset voimat lasketaan alussa määritellyn suunnitteluparametrin  $\mathbf{b}_p$  suhteen.

Mikäli vaikuttavien voimien laskennan jälkeen toteutuu yhtälön 9 /4, s. 554/ määrittämä ehto, voidaan optimointiprosessi katsoa suoritetuksi ja laskentaprosessi päättää tähän.

$$p' > 0, \text{ ja } \sum_{i=1}^n |r^i(p') - r^i(p'-1)| < \varepsilon_1 \quad (9)$$

Yhtälössä 9  $n$  on aika-askelten lukumäärä dynaamisessa analyysissä,  $r^i(p')$  on rajoittavien reaktiivoimien vektori aika-askeleessa  $i$ , syklissä  $p'$  ja  $\varepsilon_1$  on katkaisukohdaksi määritetty numeeriselta suuruudeltaan riittävän pieni luku.

Laskentaprosessin edellä kuvattua vaihetta kutsutaan prosessin ulkosykliksi, missä määritellään kohdekappaleiden ulkoiset voimat sisäsyklissä suoritettavaa värähtelyanalyysiä varten. Näiden voimien tulee säilyä vakioina aina, myös silloin kun muuttujina olevien suunnitteluparametrivektoreiden lukuarvoja vaihdetaan optimointiprosessin edetessä. Tästä eteenpäin kuvataan värähtelyanalyysiin perustuva prosessin sisäsykli.

Laskenta-ajan säästämiseksi värähtelyanalyysi tehdään vain optimoitavalle kappaleelle. Sisäsyklille asetetaan yhtälössä 10 määritetyt alkuehdot /4, s. 554/ kuvaamaan ulkosyklin tapaan sisäsyklin järjestysnumeroa ja optimoitavan komponentin ominaisuuksia (termit erotetaan ulkosyklin termeistä jättämällä indeksipilkut pois).

$$\begin{aligned} \rho &= 0 \\ \mathbf{b}_\rho &= \mathbf{b}_{\rho'} \end{aligned} \tag{10}$$

Kappaleen dynaamiset ominaisuudet mallinnetaan differentiaaliyhtälöllä 11 /4, s. 551/ ajan  $t$  ja suunnitteluparametrivektorin  $\mathbf{b}$  suhteen jättämällä huomioimatta kappaleessa tapahtuva rakenteellinen vaimeneminen. Yhtälön 11 termi  $\mathbf{K}$  on kappaleen jäykkyyssmatriisi ja  $\mathbf{q}$  asemavektori yleistettyjen koordinaattien suhteen.

$$\mathbf{M}(\mathbf{b})\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t) \tag{11}$$

Ekvivalentit staattiset kuormitukset ratkaistaan yhtälön 12 /4, s. 551/ avulla tekemällä systeemille staattinen analyysi kertomalla lineaarinen jäykkyyssmatriisi ja siirtymävektori keskenään ja vähentämällä niiden tulo ulkoisten dynaamisten kuormitusten voimavektorista

$$\mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t) - \mathbf{M}(\mathbf{b})\ddot{\mathbf{q}}(t) \Rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}_{eq} \tag{12}$$

$$\mathbf{f}_{eq} = \mathbf{F}(t) - \mathbf{M}(\mathbf{b})\ddot{\mathbf{q}}(t) \tag{13}$$

missä  $\mathbf{f}_{eq}$  (yhtälö 13) /4, s. 551/ kuvaa ekvivalentteja staattisia kuormituksia vektorimuodossa sisältäen ulkoiset voimat ja inertiat kaikissa vapausasteissa ja määrittäen värähtelyanalyysin edellyttämät diskreetit aika-askeleet. Yhtälö ratkaistaan numeerisesti jokaista aika-askelta kohden. Näitä aika-askeleita on yhteensä  $h$ :n verran (yhtälö 14) /4, s. 551/.

$$\mathbf{f}_{eq}^h = \mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{q}_h = \mathbf{F}(t_h) - \mathbf{M}(\mathbf{b})\ddot{\mathbf{q}}_h, \quad h = 1, 2, \dots, n \tag{14}$$

Yhtälössä 14  $n$  on aika-askelten lukumäärä värähtelyanalyysissä määrätyllä tarkasteluvälillä. Käytännössä  $\mathbf{q}_h$  määrittelyn jälkeen  $\mathbf{f}_{eq}^h$  lasketaan kertomalla  $\mathbf{K}(\mathbf{b})$  ja  $\mathbf{q}_h$  keskenään.



Värähtelyanalyysin perustana on yhtälö 12 /4, s. 551/ asettamalla vektorin  $\mathbf{b}$  paikalle vektori  $\mathbf{b}_p$ . Tämän jälkeen lasketaan ekvivalentit staattiset kuormitukset jokaista aika-askelta kohden yhtälöllä 14. Näiden tulosten ja ekvivalenttien staattisten kuormitusten perusteella voidaan suorittaa lineaarisstaattisen vasteen optimointi minimoimalla vektori  $\mathbf{b}$  funktiossa  $F(\mathbf{b})$  yhtälöiden 15 ja 16 /4, s. 551/ osoittamalla tavalla

$$\mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{q}_i = \mathbf{f}_{eq}^i, (i = 1, 2, \dots, n_i) \quad (15)$$

$$g(\mathbf{b}, \mathbf{q})_j \leq 0 (j = 1, 2, \dots, n_j), \quad (16)$$

missä  $\mathbf{f}_{eq}$  on ekvivalenttien staattisten kuormitusten vektori ja  $g_j$  on  $j$ :s rajoitefunktio. Kuormitusolosuhteita on yhtä paljon kuin aika-askeliakin, joiden määrä voi kasvaa suureksi.

Yhtälön 17 /4, s. 551/ määrittämien ehtojen täytyessä staattisten vasteiden optimointi, eli prosessin sisäsykli voidaan päättää. Mikäli yhtälö ei toteudu, tehdään suunnitteluparametriin tarvittava muutos ja lisätään  $p$ :n lukuarvoon luku 1. Tämän jälkeen siirrytään tekemään uusi värähtelyanalyysi, jonka perusteella voidaan laskea ekvivalenttiset staattiset kuormitukset uudelleen.

$$p > 0, \text{ ja } \frac{|\mathbf{b}_p - \mathbf{b}_{p-1}|}{|\mathbf{b}_{p-1}|} \leq \varepsilon_2 \quad (17)$$

Kun yhtälön 17 ehto täyttyy, lisätään prosessin ulkosykliden lukumäärää yhdellä ( $p' = p + 1$ ) ja siirrytään laskentaprosessissa takaisin alkuun ja päivitetään koko systeemin monikapalemalli laskentatulosten perusteella. Yhtälön 17 katkaisukohta määritellään muuttujalla  $\varepsilon_2$ , jonka arvoksi valitaan tarpeeksi pieni lukuarvo riippuen siitä, kuinka tarkkoja tuloksia on tarkoitus tavoitella.

## 2.2 RBDO-optimoinnin laskentaprosessi

RBDO-optimointimenetelmä (reliability based design optimization) /5, s. 301...313/ on optimointiin soveltuva todennäköisyyslaskentaa hyväksikäyttävä menetelmä. Laskentaprosessi on kuvattu graafisesti liitteessä 2.

RBDO-menetelmä määritetään yhtälöllä 18 /5, s. 302/. Yhtälössä  $\mathbf{b}$  on suunnitteluparametrivektori ja  $\mathbf{X}$  on jokaisen kyseisen vektorin alkioon liittyvä satunnaismuuttujavektori.

$$\begin{aligned} \min \mathbf{b}(\mathbf{X}), \\ P(G_i \mathbf{b}(\mathbf{X})) \geq 0 - \phi(-\beta_{t,i}) \leq 0, i = 1, \dots, N_{PC}, \\ \mathbf{b}^L \leq \mathbf{b} = \mu(\mathbf{b}(\mathbf{X})) \leq \mathbf{b}^U \end{aligned} \quad (18)$$

Yhtälössä 18  $P$  määrittää todennäköisyysjakauman,  $G$  on yksi todennäköisyyssehoista,  $\phi$  on kumulatiivinen jakaumafunktio,  $\beta$  kuvaa luottamusväliä ja  $\mu$  määrittää merkitsevän arvon. Yläindeksit  $L$  ja  $U$  määrittävät suunnitteluparametrin lukualueen alarajan ja ylärajan. Sekä suunnitteluparametrivektorin alkioiden että kaikkien satunnaismuuttujien oletetaan kuuluvan reaalilukujen joukkoon.

Yhtälö määrittää siis valitun parametrin, esimerkiksi massan tai jonkin fyysisen mitan minimoimisen luotettavuuden perusteella siten, että määritellään kappaleen vaurioitumiselle todennäköisyysfunktio ja asetetaan vaaditulle luotettavuudelle reunaehdot. Valittua ominaisuutta siis minimoidaan ylittämättä vaurioitumisen todennäköisyydelle asetettua raja-arvoa. Yhtälöstä on huomioitava, että vaurion todennäköisyys riippuu tekijästä  $G(\mathbf{b}(\mathbf{X})) > 0$ . Tämä vastaa numeerisesti komponentin vaurioitumisen todennäköisyyden tiheysfunktion integraalia määritellyssä avaruudessa yli reunaehtoien määrittämän avaruuden. Tämän integraalin ratkaiseminen on usein haastavaa, eikä aina välttämättä edes mahdollista. FORM-menetelmällä (first order reliability method) voidaan tulosta kuitenkin approksimoida.

FORM-menetelmässä /5, s. 303/ satunnaismuuttujien joukko  $\mathbf{b}(\mathbf{X})$  standardoidaan normaalimuuttujavektoriksi ( $\mathbf{u}$ ). Mikäli jokaiselle normaalimuuttujalle määritellään erikseen tiheysfunktio muuttujien ollessa epäkorreloivia, niitä yhdistävä tiheysfunktio saadaan kertomalla näiden muuttujien tiheysfunktiot keskenään, minkä seurauksena normaaliavarudessa todennäköisyysjakauman muodoksi tulee  $\beta$ -säteinen pallo, minkä keskipiste sijaitsee  $u$ -avaruuden origossa.  $U$ -avaruudessa määritellään myös safe/fail-reunaehdot, jotka jakavat avaruuden luotettavuuden kannalta hyväksyttäviin ja hylättyihin pistejoukkoihin. Todennäköisyydet voidaan ratkaista käyttämällä RIA (reliability index approach)-, tai PMA (performance measure approach)-menetelmiä.

RIA-menetelmässä /5, s. 303/ suurimman todennäköisyyden piste etsitään määritellyn reunaehtokäyrän  $G(\mathbf{u})=0$  ja todennäköisyysjakauman tiheysfunktion suurimman arvon kohdalta. Geometrisesti tarkasteltuna tämä piste sijaitsee reunaehtokäyrän ja pallon origon välisen etäisyyden ollessa pienimmillään. Tämä etäisyys lasketaan ja sitä verrataan vertailukohteena määriteltyyn suurimpaan sallittuun vaurioitumisen todennäköisyyttä mallintavan muodoltaan pallomaisen tiheysfunktion säteeseen. Mikäli tämän pallon säteen pituus on suurempi kuin reunaehtokäyrän ja origon välinen pituus, ei systeemin luotettavuus ole hyväksyttävällä tasolla. Vastakkaisessa tapauksessa riittävä luotettavuustaso on saavutettu. Toisin sanoen pallon tilavuuden integraalin reunaehtokäyrän positiivisella puolella tulee olla aina nolla, mikäli systeemin toiminnallinen luotettavuus halutaan pitää tavoitetasolla.

PMA-menetelmällä /5, s. 304/ suurimman todennäköisyyden piste etsitään käänteisellä laskennalla. Tuolloin määritellään aluksi suurin sallittu vaurioitumisen todennäköisyys pallomaisen tiheysfunktiojoukon avulla. Tämän jälkeen etsitään reunaehtokäyrältä piste, mikä on mahdollisimman lähellä kyseisen pallon ulkopintaa mutta kuitenkin safe-alueella. Tuolloin vaurioitumisen todennäköisyys on reunaehtojes sisäpuolella samaan aikaan, kun optimoitavasta ominaisuudesta riippuva reunaehtokäyrä määrittää kyseisen ominaisuuden optimaaliseksi.

PMA-menetelmässä /5, s. 304/ jokaisen todennäköisyysreunaehdon tarkastelu aloitetaan ratkaisemalla yhtälön 19 /5, s. 304/ osoittama epälineaarinen optimointiongelma  $u$ -avaruudessa

$$\begin{aligned} \max G(\mathbf{u}), \\ |\mathbf{u}| = \beta_t \end{aligned} \tag{19}$$

Näiden avulla ratkaistaan suurimman todennäköisyyden piste ja siihen liittyvät reunaehdot. Optimointimenettelyssä yhtälössä 20 /5, s. 304/ on kuvattu suuntavektori,

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}_{\beta=\beta t}}{|\mathbf{u}_{\beta=\beta t}|} \tag{20}$$

mikä määritellään pallon yhtälön perusteella. PMA-menetelmä voidaan tämän jälkeen suorittaa loppuun AMV-, CMV,- tai H MV-vaihtoehtoilla.

AMV-menetelmässä (advanced mean value) /5, s. 304/ jyrkästi kasvava suuntavektori  $\mathbf{n}(\mathbf{u})$  määritetään suurimman todennäköisyyden pisteessä yhtälöllä 21 /5, s. 304/. Vektoria optimoidaan iteratiivisesti kunnes riittävä lähestyminen on saavutettu.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{AMV}^0 &= \mathbf{0} \quad \wedge \quad \mathbf{u}_{AMV}^{(k+1)} = \beta_t \mathbf{n}(\mathbf{u}_{AMV}^{(k)}), \\ \mathbf{n}(\mathbf{u}_{AMV}^{(k)}) &= -\frac{\nabla_u G(\mathbf{u}_{AMV}^{(k)})}{|\nabla_u G(\mathbf{u}_{AMV}^{(k)})|} \end{aligned} \quad (21)$$

Mikäli tarkasteltava funktio on muodoltaan kovera, AMV-menetelmä lähestyy tavoitearvoa hitaasti tai pahimmassa tapauksessa funktio divergoi. Koverien funktioiden tapauksessa käytetään CMV-menetelmää (conjugate mean value) /5, s. 304/. Tässä menetelmässä valitaan iteroinneille jyrkimmin kasvava suunta kolmen termin  $\mathbf{n}(\mathbf{u}_{CMV}^{(k-2)})$ ,  $\mathbf{n}(\mathbf{u}_{CMV}^{(k-1)})$  ja  $\mathbf{n}(\mathbf{u}_{CMV}^{(k)})$  lineaarikombinaation avulla. Menetelmä määritetään yhtälöillä 22 ja 23 /5, s. 304/

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{CMV}^0 &= \mathbf{0}, \mathbf{u}_{CMV}^{(1)} = \mathbf{u}_{AMV}^{(1)}, \mathbf{u}_{CMV}^{(2)} = \mathbf{u}_{AMV}^{(2)}, \\ \mathbf{u}_{CMV}^{(k+1)} &= \beta_t \frac{\mathbf{n}_{CMV}^{(k)} + \mathbf{n}_{CMV}^{(k-1)} + \mathbf{n}_{CMV}^{(k-2)}}{|\mathbf{n}_{CMV}^{(k)} + \mathbf{n}_{CMV}^{(k-1)} + \mathbf{n}_{CMV}^{(k-2)}|} \quad \text{kun } k \geq 2 \end{aligned} \quad (22)$$

missä

$$\mathbf{n}(\mathbf{u}_{CMV}^{(k)}) = -\frac{\nabla_u G(\mathbf{u}_{CMV}^{(k)})}{|\nabla_u G(\mathbf{u}_{CMV}^{(k)})|}. \quad (23)$$

CMV-menetelmä on AMV-menetelmään nähden ylivertainen suppenevien ja stabiilien koverien funktioiden laskentaan, mutta kuperille funktioille se on tehoton ja epäluotettava.

HMV-menetelmä /5, s. 304/ yhdistää AMV- ja CMV-menetelmät. Menetelmässä määritellään aluksi funktion pinnan muoto. Tämä tapahtuu funktion jyrkästi kasvavaan suuntaan laskettavalla kolmella peräkkäisellä iteraatiolla yhtälön 24 /5, s. 304/ osoittamalla tavalla.

$$\zeta^{(k+1)} = (\mathbf{n}^{(k+1)} - \mathbf{n}^{(k)}) (\mathbf{n}^{(k)} - \mathbf{n}^{(k-1)}) \quad (24)$$

$\Leftrightarrow \text{sign}(\zeta^{(k+1)}) > 0$  niin funktio  $\mathbf{u}_{HMV}^{(k+1)} = \mathbf{0}$  on kovera  $\mathbf{b}(\mathbf{X}) : n$  suhteen

$\Leftrightarrow \text{sign}(\zeta^{(k+1)}) \leq 0$  niin funktio  $\mathbf{u}_{HMV}^{(k+1)} = \mathbf{0}$  on kupera  $\mathbf{b}(\mathbf{X}) : n$  suhteen

Kun kohdefunktion tyyppi on selvitetty, valitaan lähestymistapa funktion tyyppin mukaan (AMV tai CMV).

### 2.3 Venymien rekonstruointimenetelmän laskentaprosessi

Venymien rekonstruointimenetelmässä systeemistä luodun monikappalemallin kappaleisiin fokusoidaan vasteita systeemin liikeyhtälöiden perusteella. Menetelmässä käytetään hyväksi kappaleen fyysisien solmukoordinaattien transformaatiota modaalikoordinaateiksi muotomatriisin avulla. Tarkoituksena on luoda malli siirtymä/venymäkentästä, jonka perusteella voidaan elementtimenetelmää apuna käyttäen laskea kappaleessa vaikuttavat jännitykset suhteellisen tarkasti.

Vaimentamaton lineaarinen systeemi voidaan kuvata yhtälöllä 25 /6/

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (25)$$

missä  $\mathbf{M}$  on kappaleen massamatriisi,  $\mathbf{K}$  jäykkyyismatriisi,  $\mathbf{q}(t)$  on aikariippuvainen  $n$ -kappaletta vapausasteita sisältävä tarkasteltavan pisteen asemavektori ja  $\mathbf{F}(t)$  on yleistettyjen aikariippuvaisten kuormitusten voimavektori.

Yhtälön fyysiset solmukoordinaatit transformoidaan modaalikoordinaateiksi muotomatriisin avulla yhtälössä 26 /6/

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{\Phi}\mathbf{p}(t), \quad (26)$$

missä  $\mathbf{p}(t)$  määrittää modaalikoordinaatit ja matriisi  $\mathbf{\Phi}$  sisältää  $n$ -kappaletta systeemin ominaisvektoreita. Vastaavalla periaatteella kuormitukset määritetään yhtälössä 27 /6/

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{M}\mathbf{\Phi}\boldsymbol{\lambda}(t), \quad (27)$$

jolloin yleistetyt liikeyhtälöt redusoidaan yhtälön 28 /6/ osoittamaan muotoon

$$\ddot{\mathbf{p}}_i(t) + \omega_i^2 \mathbf{p}_i(t) = \boldsymbol{\lambda}_i(t). \quad (28)$$

Systeemin aiheuttama vaste ja rasitusten modaalikomponentit ratkaistaan Fourierin sarjalla tarkasteltavan kappaleen ominaistajuuden  $\mathbf{f}_w$  suhteen. Näin yhtälöt muuntuvat yhtälöiden 29 ja 30 /6/ osoittamaan muotoon

$$\mathbf{p}(t) \cong \mathbf{p}_0 + \sum_{j=1}^M (\mathbf{p}_j \cos j\mathbf{f}_w t + \mathbf{r}_j \sin j\mathbf{f}_w t) \quad (29)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t) \cong \boldsymbol{\lambda}_0 + \sum_{j=1}^M (\boldsymbol{\lambda}_j \cos j\mathbf{f}_w t + \boldsymbol{\mu}_j \sin j\mathbf{f}_w t). \quad (30)$$

Systeemille tehtyjen empiiristen mittausten tulokset saadaan vertailukelpoisiksi kirjoittamalla ne yhtälön 31 /6/ osoittamaan muotoon

$$\mathbf{e}(t) \cong \mathbf{e}_0 + \sum_{j=1}^M (\mathbf{e}_j \cos j\mathbf{f}_w t + \mathbf{k}_j \sin j\mathbf{f}_w t). \quad (31)$$

Tätä algoritmia voidaan soveltaa monissa erityyppisissä tapauksissa venymien lisäksi. Mittausten ja yleistettyjen koordinaattien suhde määritetään matriisin  $\mathbf{B}$  ja siitä Moore-Penrosen säännöllä luodun käänteismatriisin  $\mathbf{B}^+$  avulla yhtälössä 32 /6/

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{B}\mathbf{p}(t), \quad \mathbf{p}(t) = \mathbf{B}^+\mathbf{e}(t). \quad (32)$$

Matriisi  $\mathbf{B}$  määritellään tehtyjen mittausten perusteella. Esimerkiksi, mikäli muuttujavektori  $\mathbf{e}_j$  määrittää mitatun venymän suuruutta pisteessä  $(x_i, y_i)$ , niin  $\mathbf{B}_{ji}$  kuvaa modaali-venymää  $j$  pisteessä  $i$ . Yhtälöiden 29, 30, 31 ja 32 /6/ perusteella johdetaan yhtälöiden 33, 34 ja 35 /6/ algebralaiset korrelaatiot rasiusten Fourierin komponenttien ja paikallisten venymien välille.

$$\boldsymbol{\lambda}_0 = \text{diag}(\boldsymbol{\omega}_i^2) \mathbf{B}^+ \mathbf{e}_0 \quad (33)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_j = \text{diag}(\boldsymbol{\omega}_i^2 - j^2 \mathbf{f}_w^2) \mathbf{B}^+ \mathbf{e}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (34)$$

$$\boldsymbol{\mu}_j = \text{diag}(\boldsymbol{\omega}_i^2 - j^2 \mathbf{f}_w^2) \mathbf{B}^+ \mathbf{k}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (35)$$

Tarkastelun lopputuloksen kannalta oleellisia ovat vain mittausaikalhistorian Fourierin komponentit.

Yhtälöiden 33, 34 ja 35 perusteella määritellään ekvivalentti kuormitusvektori (yhtälö 36) /6/, mikäli mitattujen vasteiden aikasidonnaiset Fourierin komponentit ovat suuruudeltaan lähellä modaalirasitusten Fourierin komponentteja.

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\lambda}(t) \quad (36)$$

Tämän menetelmän etuna on, että systeemin täydellisen rasiusjakauman selvittäminen ei ole tarpeellista ja lisäksi monet ulkoisista voimista voidaan määrittää modaalikuormitusten ja dynaamisen vasteen rekonstruoinnin avulla.

## 2.4 Kitkan aiheuttamien rasiusten laskentaprosessi

Tässä luvussa käsitellään monikappalesysteemin kahden komponentin fyysisen kontaktin seurauksena syntyvän kitkavoiman aiheuttamien komponenttien sisäisten rasiusten mallintamista /7, s. 205...224/. Kitkavoiman vaikutuksen laskenta aloitetaan määrittämällä jäykkien kappaleiden liikeyhtälöryhmä 37 /7, s. 206/ globaalien koordinaattien suhteen olettaen aluksi kitkan vaikutuksen olevan nolla.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{C}_q^T(\mathbf{q}, t)\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) \\ \mathbf{C}_q(\mathbf{q}, t) = 0 \end{cases} \quad (37)$$

Yhtälöryhmässä 37  $\boldsymbol{\lambda}$  on Lagrangen reaktiovoimien kertoimien vektori,  $\mathbf{q}$  on asemavektori yleistettyjen koordinaattien suhteen,  $\mathbf{v}$  on nopeusvektori,  $\mathbf{C}_q$  on Jacobian-matriisi,  $\mathbf{M}$  on massamatriisi ja  $\mathbf{Q}$  on voimavektori. Integroimalla yhtälöryhmä saadaan staattiset ja dynaamiset voimat eri muuttujiksi määrittävä yhtälöpari 38 /7, s. 207/

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{C}_q^T\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_V(\boldsymbol{\lambda}) \\ \mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = 0 \end{cases}, \quad (38)$$

missä merkintä  $\mathbf{Q}_V(\boldsymbol{\lambda})$  osoittaa kitkavoiman riippuvuuden eksplisiittisesti Lagrangen kertoimista. Alaindeksit e ja V merkitsevät yleistettyä voimaa ja nopeutta. Kitkavoiman oletetaan olevan kappaleeseen vaikuttava ulkoinen voima, joka muodostaa voimaparin kappaleeseen muodostuvan kitkan vastevoiman kanssa.

Mikäli kineettinen kitka määritetään ulkoiseksi voimaksi, voidaan staattinen kitka nähdä olevan seurausta systeemin rajoitteista, jolloin yhtälöt voidaan johtaa yhtälöryhmän 39 /7, s. 207/ osoittamaan muotoon

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{C}_q^T\boldsymbol{\lambda} - (\mathbf{C}_V)_q^T\boldsymbol{\lambda}_V + \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_V(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}_V) \\ \mathbf{C} = 0 \\ \mathbf{C}_V = 0 \end{cases}. \quad (39)$$

Yhtälöryhmässä 39 yhtälöpariin 38 on lisätty systeemin rajoitteista muodostuva staattisen kitkan vaikutus. Yhtälöryhmässä  $\boldsymbol{\lambda}_V$  kerroin liittyy staattisen kitkan reunaehtoihin. Tämä yhtälö lausutaan matriisimuodossa yhtälönä 40 /7, s. 207/.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C}_q^T \\ \mathbf{C}_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_V(\boldsymbol{\lambda}) \\ \mathbf{Q}_C \end{bmatrix}, \quad \text{missä } \mathbf{C}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}_V \end{bmatrix} \text{ ja } \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\lambda}_V \end{bmatrix} \quad (40)$$

Kitkavoiman ja sen muodostaman vasteen ollessa määritelty lasketaan kappaleessa tämän voimaparin seurauksena vaikuttavat jännitykset. Jännitysten laskenta lähtee oletamalla kappaleiden deformaatiot vähäisiksi ja määrittämällä liikeyhtälöt referenssikoordinaatiston suhteen yhtälön 41 /7, s. 209/ osoittamalla tavalla

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{rr} & \mathbf{M}_{rp} \\ \mathbf{M}_{pr} & \mathbf{M}_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_r \\ \ddot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_r \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_r \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_e)_{q_r} \\ (\mathbf{Q}_e)_{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_V)_q \\ (\mathbf{Q}_V)_p \end{bmatrix} - \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda}, \quad (41)$$

missä  $\mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda}$  on Lagrangen kertoimilla kerrottu reaktivoimavektori,  $\mathbf{Q}_e$  on joustavaan kappaleeseen kohdistuvien ulkoisten voimien vektori ja  $\mathbf{Q}_V$  on keskipakovoimien summavektori ajan ja koordinaatiston suhteen.

Vapausasteiden vähentämiseksi johdetaan yhtälö 41 yhtälöksi 42 /7, s. 209/

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{rr} & \mathbf{M}_{rp}\boldsymbol{\psi} \\ \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{M}_{pr} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_r \\ \ddot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_r \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_r \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_e)_r \\ \boldsymbol{\psi}^T (\mathbf{Q}_e)_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_V)_r \\ \boldsymbol{\psi}^T (\mathbf{Q}_V)_p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{qR}^T \\ \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{C}_{qp}^T \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}, \quad (42)$$

missä vaimennusta kuvaava matriisi  $\mathbf{D}$  voidaan määrittää differentiaalisesti osarakenne-tekniikalla.



## 2.5 Moving frame-laskentaprosessi

Moving frame-menetelmää /8, s. 147...166/ voidaan soveltaa monimutkaistenkin systeemien dynamiikan analysointiin laskentatulosten ollessa laadukkaita ja luotettavia. Menetelmän esittely aloitetaan määrittämällä satunnaisen pisteen asema tarkasteltavassa kappaleessa globaalin koordinaatiston suhteen yhtälöllä 43 /8, s. 149/

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{R} + \mathbf{A}(\mathbf{u}_o + \mathbf{u}_f), \quad (43)$$

missä  $\mathbf{u}_o$  määrittää pisteen aseman ennen deformaation tapahtumista ja  $\mathbf{u}_f$  pisteen aseman deformaation tapahtumista. Molemmat pisteet määritellään lokaalin koordinaatiston suhteen.  $\mathbf{R}$  on lokaalin koordinaatiston asemavektori ja  $\mathbf{A}$  kiertyämämatriisi. Elementtimenetelmässä vastaava elastinen siirtymä lausutaan yhtälöllä 44 /8, s. 150/

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{N}\mathbf{u}_e, \quad (44)$$

missä  $\mathbf{N}$  kuvaa interpoloitua muotofunktioita ja vektori  $\mathbf{u}_e$  määrittää solmujen elastiset siirtymät. Sijoittamalla yhtälö 44 yhtälöön 43 lausutaan satunnaisen pisteen asema yhtälöllä 45 /8, s. 150/.

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{R} + \mathbf{A}(\mathbf{u}_o + \mathbf{N}\mathbf{u}_e) \quad (45)$$

Derivoimalla yhtälö 45 ajan suhteen saadaan solmusiirtymien nopeuden määrittävä yhtälö 46 /8, s. 150/

$$\dot{\mathbf{r}}_P = \mathbf{N}\mathbf{v}, \quad (46)$$

missä vektori  $\mathbf{v}$  on solmusiirtymien nopeusvektori. Solmusiirtymien ollessa tunnettuja määritetään yhtälössä 47 /8, s. 150/ joustavan kappaleen kineettinen energia

$$E_{KIN} = \frac{1}{2} \int_V \dot{\mathbf{r}}_P^T \dot{\mathbf{r}}_P dm = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{v}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{v} dm = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{M}_{FEM} \mathbf{v}, \quad (47)$$

missä  $\mathbf{M}_{FEM}$  on elementtimenetelmällä laskettu massamatriisi.

Differentioimalla yhtälö 45 ja ratkaisemalla se nopeuden suhteen saadaan yhtälö 48 /8, s. 150/

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{u}_o + \mathbf{u}_e) + \mathbf{A}\dot{\mathbf{u}}_e \quad (48)$$

ja määrittämällä matriisin  $\mathbf{A}$  sarakkeina olevat yksikkövektorit  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  ja  $\mathbf{c}$  muodostetaan yhtälö 49 /8, s. 151/

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{a11} & \mathbf{I}_{a12} & \mathbf{I}_{a13} & \mathbf{I}_A & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\ \mathbf{I}_{an1} & \mathbf{I}_{an2} & \mathbf{I}_{an3} & \mathbf{I}_0 & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{A} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{R}} \\ \dot{\mathbf{a}} \\ \dot{\mathbf{b}} \\ \dot{\mathbf{c}} \\ \dot{\mathbf{u}}_{e(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{u}}_{e(n)} \end{array} \right\}, \quad (49)$$

missä  $n$  on kappaleen solmujen lukumäärä ja  $\mathbf{I}$  on 3x3-tyyppinen matriisi, jonka alaindeksit määrittävät yhtälöparven 50 avulla /8, s. 151/.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{11} &= \mathbf{u}_{o(x1)} + \mathbf{u}_{e(x1)}; & \mathbf{a}_{12} &= \mathbf{u}_{o(y1)} + \mathbf{u}_{e(y1)}; & \mathbf{a}_{13} &= \mathbf{u}_{o(z1)} + \mathbf{u}_{e(z1)}; \\ \mathbf{a}_{n1} &= \mathbf{u}_{o(xn)} + \mathbf{u}_{e(xn)}; & \mathbf{a}_{n2} &= \mathbf{u}_{o(yn)} + \mathbf{u}_{e(yn)}; & \mathbf{a}_{n3} &= \mathbf{u}_{o(zn)} + \mathbf{u}_{e(zn)}; \end{aligned} \quad (50)$$

Elastiset siirtymät voidaan esittää staattisten ja dynaamisten moodien superpositioina (yhtälö 51) /8, s. 150/

$$\mathbf{u}_e = \sum_{i=1}^{n_s} \boldsymbol{\Omega}_i \eta_i + \sum_{j=1}^{n_d} \boldsymbol{\Psi}_j \xi_j, \quad (51)$$

missä  $n_s$  ja  $n_d$  ovat staattisten ja dynaamisten moodien numeroita,  $\boldsymbol{\Omega}_i$  määrittää staattiset moodit,  $\eta_i$  niiden amplitudit,  $\boldsymbol{\Psi}_j$  määrittää dynaamiset moodit ja  $\xi_j$  niiden amplitudit. Joustoilmiön muuttujia ovat siis staattiset ja dynaamiset moodit, eli tarkemmin sanottuna lokaalin koordinaatiston origon  $\mathbf{R}$  sijainti, kolme lokaalia koordinaattiakselia määrittävää ortogonaalista yksikkövektoria  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  ja  $\mathbf{c}$ , ja dynaamisten ja staattisten moodien amplitudit.

Sijoittamalla yhtälö (51) yhtälöön (49) saadaan matriisiyhtälö 52 /8, s. 151/

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & b_{11}\mathbf{I} & b_{12}\mathbf{I} & b_{13}\mathbf{I} & \mathbf{A}\boldsymbol{\Omega}_1^1 & \dots & \mathbf{A}\boldsymbol{\Omega}_{ns}^1 & \mathbf{A}\boldsymbol{\Psi}_1^1 & \dots & \mathbf{A}\boldsymbol{\Psi}_{nd}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{I} & b_{n1}\mathbf{I} & b_{n2}\mathbf{I} & b_{n3}\mathbf{I} & \mathbf{A}\boldsymbol{\Omega}_1^n & \dots & \mathbf{A}\boldsymbol{\Omega}_{ns}^n & \mathbf{A}\boldsymbol{\Psi}_1^n & \dots & \mathbf{A}\boldsymbol{\Psi}_{nd}^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{R}} \\ \dot{\mathbf{a}} \\ \dot{\mathbf{b}} \\ \dot{\mathbf{c}} \\ \dot{\eta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\eta}_{ns} \\ \dot{\xi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{nd} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} \quad (52)$$

missä  $\boldsymbol{\Omega}_i^r$  sisältää staattisen moodin  $i$  solmussa  $r$ ,  $\boldsymbol{\Psi}_j^s$  sisältää dynaamisen moodin  $j$  solmussa  $s$ , ja alaindeksein tehdyt määrittelyt on nähtävissä yhtälöissä 53, 54, 55, 56, 57 ja 58 /8, s. 152/.

$$\mathbf{b}_{11} = \mathbf{u}_{o(x1)} + \sum_{i=1}^{ns} \boldsymbol{\Omega}_{ix1} \eta_i + \sum_{j=1}^{nd} \boldsymbol{\Psi}_{jx1} \xi_j \quad (53)$$

$$\mathbf{b}_{12} = \mathbf{u}_{o(y1)} + \sum_{i=1}^{ns} \boldsymbol{\Omega}_{iy1} \eta_i + \sum_{j=1}^{nd} \boldsymbol{\Psi}_{jy1} \xi_j \quad (54)$$

$$\mathbf{b}_{13} = \mathbf{u}_{o(z1)} + \sum_{i=1}^{ns} \boldsymbol{\Omega}_{iz1} \eta_i + \sum_{j=1}^{nd} \boldsymbol{\Psi}_{jz1} \xi_j \quad (55)$$

$$\mathbf{b}_{n1} = \mathbf{u}_{o(xn)} + \sum_{i=1}^{ns} \boldsymbol{\Omega}_{ixn} \eta_i + \sum_{j=1}^{nd} \boldsymbol{\Psi}_{jxn} \xi_j \quad (56)$$

$$\mathbf{b}_{n2} = \mathbf{u}_{o(yn)} + \sum_{i=1}^{ns} \boldsymbol{\Omega}_{iyn} \eta_i + \sum_{j=1}^{nd} \boldsymbol{\Psi}_{jyn} \xi_j \quad (57)$$

$$\mathbf{b}_{n3} = \mathbf{u}_{o(zn)} + \sum_{i=1}^{ns} \boldsymbol{\Omega}_{izn} \eta_i + \sum_{j=1}^{nd} \boldsymbol{\Psi}_{jzn} \xi_j \quad (58)$$

Yhtälössä 52 vektori  $\dot{\mathbf{q}}$  määrittää kappaleen nopeuden. Sijoittamalla tämä vektori energiayhtälössä nopeusvektorin  $\mathbf{v}$  paikalle saadaan kineettisen energian yhtälö johdettua yhtälössä 59 /8, s. 152/ osoitettuun muotoon

$$E_{KIN} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{M}_{FEM} \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (59)$$

ja joustavan kappaleen massamatriisi lausutaan yhtälönä 60 /8, s. 152/.

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}^T \mathbf{M}_{FEM} \mathbf{B} \quad (60)$$

Lagrangen yhtälöä soveltamalla yhtälöstä 59 johdetaan nopeusvektorin suhteen inertiaivoimien yhtälö 61 /8, s. 152/.

$$\mathbf{Q}_V = -\mathbf{B}^T \mathbf{M}_{FEM} \dot{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{q}} \quad (61)$$

Yhtälöissä 60 ja 61 määritellyt inertiaivoimat ovat huomattavasti helpompia ratkaista kuin esimerkiksi yhtälöstä 52. Monikappalesysteemin liikeyhtälöt lausutaan Lagrangen kertoimien avulla yhtälönä 62 /8, s. 153/

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_q^T \alpha \mathbf{C} + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_V + \mathbf{Q}_e, \quad (62)$$

missä  $\mathbf{C}_q$  on rajoiteyhtälöiden Jacobian-matriisi,  $\alpha$  on rangaistusvoimakerroin,  $\mathbf{C}$  on rajoitevektori,  $\boldsymbol{\lambda}$  on Lagrangen kertoimet ja  $\mathbf{Q}$  on nopeuksista riippuvat inertiaivoimat. Lagrangen kertoimet määritetään yhtälössä 63 /8, s. 153/ osoitetussa iterointiprosessissa (missä alaindeksi  $i$  merkitsee aika-askelta)

$$\boldsymbol{\lambda}_{i+1} = \boldsymbol{\lambda}_i + \alpha \mathbf{C}_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (63)$$

missä  $\boldsymbol{\lambda}_0$  oletetaan identtiseksi edellisellä aika-askeleella määritellyn termin  $\boldsymbol{\lambda}$  suhteen.

Integrointi suoritetaan soveltamalla implisiittistä yksiaskel-trapetsoidisääntöä. Nopeuksien ja kiihtyvyyksien differenssiyhtälöt 64 ja 65 /8, s. 153/ ovat muotoa

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \frac{2}{\Delta t} \mathbf{q}_{n+1} + \dot{\mathbf{q}}_n, \quad \text{missä } \hat{\mathbf{q}}_n = -\left( \frac{2}{\Delta t} \mathbf{q}_n + \dot{\mathbf{q}}_n \right) \quad (64)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} = \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{q}_{n+1} + \ddot{\mathbf{q}}_n, \quad \text{missä } \hat{\mathbf{q}}_n = -\left( \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{q}_n + \frac{4}{\Delta t} \dot{\mathbf{q}}_n + \ddot{\mathbf{q}}_n \right). \quad (65)$$

Dynaaminen tasapaino saavutetaan aika-askeleella  $n+1$  sijoittamalla differenssiyhtälöt 64 ja 65 liikeyhtälöön 62, jolloin muodostuu yhtälö 66 /8, s. 153/.

$$\frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} \mathbf{q}_{n+1} + \mathbf{C}_{qn+1}^T (\alpha \mathbf{C}_{n+1} + \boldsymbol{\lambda}_{n+1}) - (\mathbf{Q}_V + \mathbf{Q}_e)_{n+1} + \mathbf{M} \hat{\mathbf{q}}_n = 0 \quad (66)$$

Kertomalla yhtälö 66 termillä  $\frac{\Delta t^2}{4}$  saadaan yhtälö 67 /8, s. 153/

$$\mathbf{M} \mathbf{q}_{n+1} + \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{C}_{qn+1}^T (\alpha \mathbf{C}_{n+1} + \boldsymbol{\lambda}_{n+1}) - \frac{\Delta t^2}{4} (\mathbf{Q}_V + \mathbf{Q}_e)_{n+1} + \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{M} \hat{\mathbf{q}}_n = 0, \quad (67)$$

mikä voidaan lausua symbolisesti yhtälönä 68 /8, s. 153/

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}_{n+1}) = 0. \quad (68)$$

Tämä epälineaarinen systeemi (yhtälö 69) ratkaistaan Newton-Raphson-menetelmällä /8, s. 154/

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right]_i \Delta \mathbf{q}_{i+1} = -[\mathbf{f}(\mathbf{q})]_i, \quad (69)$$

mistä muodostuva jäännösvektori määritetään yhtälössä 70 /8, s. 154/

$$[\mathbf{f}(\mathbf{q})] = \frac{\Delta t^2}{4} (\mathbf{M} \hat{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_q^T \alpha \mathbf{C} + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} - (\mathbf{Q}_V + \mathbf{Q}_e)) \quad (70)$$

ja approksimoitu tangenttimatriisi yhtälössä 71 /8, s. 154/

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right] = \mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{D} + \frac{\Delta t^2}{4} (\mathbf{C}_q^T \alpha \mathbf{C}_q + \mathbf{K}), \quad (71)$$

missä matriisit  $\mathbf{D}$  ja  $\mathbf{K}$  määrittävät systeemin vaimennus- ja jäykkyysoimat.

Newton-Raphson-integroinnilla laskettujen nopeuksien ja kiihtyvyyksien sievennetyt termit  $\dot{\mathbf{q}}$  ja  $\ddot{\mathbf{q}}$  voidaan lausua yhtälöillä 72 /8, s. 154/ ja 73 /8, s. 155/

$$\left[ \mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{D} + \frac{\Delta t^2}{4} (\mathbf{C}_q^T \alpha \mathbf{C}_q + \mathbf{K}) \right] \dot{\mathbf{q}} = \left[ \mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{D} + \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{K} \right] \dot{\mathbf{q}} - \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{C}_q^T \alpha \mathbf{C}_t \quad (72)$$

nopeuksille ja

$$\left[ \mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{D} + \frac{\Delta t^2}{4} (\mathbf{C}_q^T \alpha \mathbf{C}_q + \mathbf{K}) \right] \ddot{\mathbf{q}} = \left[ \mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{D} + \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{K} \right] \ddot{\mathbf{q}} - \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{C}_q^T \alpha (\dot{\mathbf{C}}_q \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{C}}_t) \quad (73)$$

kiihtyvyyksille.

## 2.6 Laskentaprosessi rasitusten määrittelemiseksi osarakennetekniikalla

Osarakennetekniikkaan perustuvan menetelmän lähtökohtana ovat tarkasteltavan monikappalesysteemin liikeyhtälöt, jotka integroimalla johdetaan materiaalin elastisia ominaisuuksia määrittäviksi Eulerin-Lagrangen yhtälöiksi /9, s. 633...643/. Joustavuuden mallintaminen toteutetaan moodianalyysillä. Kappaleiden deformaatiot voidaan määrittää siirtymävektorilla  $\mathbf{u}$ , mikä voidaan määrittää modaalimatriisin  $\Phi$  ja yleistettyjen koordinaattien  $\mathbf{q}$  avulla yhtälössä 74 /9, s. 635/

$$\mathbf{u}(c,t) = \Phi(c)\mathbf{q}(t), \quad (74)$$

missä  $c$  on massapisteen aseman sijainti.

Moodien siirtymät kuvataan moodeittain yhtälöllä 75 /9, s. 635/ /10/

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \Phi_C & \Phi_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_C \\ \mathbf{p}_N \end{bmatrix} = \Phi_V \mathbf{p}, \quad (75)$$

missä fysikaaliset koordinaatit arvioidaan diskreetin siirtymävektorin  $\mathbf{u}$  avulla ja ne ratkaistaan kertomalla modaalimatriisi  $\Phi$  modaalivektorilla  $\mathbf{p}$ , jolloin samalla saadaan uusi yleistettyjen koordinaattien systeemi. Yhtälön 75 alaindekseistä  $B$  merkitsee rajoitetta,  $N$  vapausasteiden lukumäärää ja  $I$  sisäisiä vapausasteita. Matriisi  $\Phi_C$  määrittää staattiset korjausmoodit ja matriisi  $\Phi_N$  normaalimoodit. Vain  $\mathbf{p}$ -moodien joukko selvitetään laskemalla.

Joustavan kappaleen liikeyhtälö modaalikoordinaattien suhteen määritetään yhtälössä 76 /9, s. 635/. Analyysiä yksinkertaistetaan ortonormalisoinnilla.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}\mathbf{p} = \mathbf{f} \quad (76)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_{BB} & \mathbf{m}_{BN} \\ \mathbf{m}_{NB} & \mathbf{m}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{p}}_B \\ \ddot{\mathbf{p}}_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{BB} & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_B \\ \mathbf{p}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_B \\ \mathbf{f}_I \end{bmatrix} \quad (77)$$

Näin modaalimatriisi diagonalisoituu, jolloin joustavan kappaleen vapaata olemusta ja elastisia deformaatioita mallinnetaan samalla matriisilla. Sijoittamalla  $\Phi$  kuvaamaan modaalimatriisien siirtymiä,  $\mathbf{S}$  ortonormalisoitua transformaatiomatriisia ja  $\mathbf{q}'$  uutta yleistettyjen koordinaattien systeemiä, voidaan siirtymät lausua yhtälön 78 osoittamalla tavalla /9, s. 635/

$$\mathbf{u} = \Phi\mathbf{q}' = \Phi\mathbf{S}\mathbf{q}'. \quad (78)$$

Systeemin tasapainotila inertiavoimien suhteen riippuu kiihtyvyyksien keskinäisestä suhteesta painopisteeseen nähden, minkä perusteella voidaan kappaleen jännitykset ja venymät ratkaista, vaikka kappaleen absoluuttinen asema olisikin epäselvä. Tuolloin kaikki voimakomponentit  $\mathbf{F}_t^a$  ja momenttikomponentit  $\mathbf{F}_r^a$  asetetaan inertiavoimien suhteen tasapainoon kiihtyvyysskentässä  $\mathbf{a}'_t, \mathbf{a}'_r$  (yhtälö 79) /9, s. 638/

$$(\mathbf{F}_a)_t + \int_V \mathbf{a}'_t \rho dV = 0, \quad (\mathbf{F}_a)_r + \int_V \mathbf{R} \times (\mathbf{a}'_r \times \mathbf{R}) \rho dV = 0, \quad (79)$$

missä  $\mathbf{R}$  on komponentin lokaalin koordinaatiston asemavektori globaalin koordinaatiston suhteen ja  $\rho$  materiaalin tiheys.

Systeemin tasapainoehto määritetään yhtälössä 80 /9, s. 638/

$$(\mathbf{F}_a)_t + \mathbf{M}_t \mathbf{a}'_t = 0, \quad (\mathbf{F}_a)_r + \mathbf{M}_r \mathbf{a}'_r = 0, \quad (80)$$

missä  $\mathbf{M}_t$  on koko elementtimallin massatensori ja  $\mathbf{M}_r$  on massamomenttien ja inertiamomenttien tensori. Kiihtyvyyksivektorit  $\mathbf{a}'_t$  ja  $\mathbf{a}'_r$  voidaan määrittää näiden perusteella ja laskea venymäkentän siirtymät  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  ( $m/m$ ), jolloin havaitaan maksimivenymäalueiden sijainnit ja suuruudet.

Venymävektori määritetään osittaisderivoimalla siirtymäkenttä (yhtälöt 81 ja 82) /9, s. 639/

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{12} \ 2\varepsilon_{23} \ 2\varepsilon_{13}]^T \quad (81)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}_1 \mathbf{q} + \mathbf{L}_2 (\mathbf{q}) \mathbf{q}, \quad (82)$$

missä  $\mathbf{L}_1$  ja  $\mathbf{L}_2$  ovat muotofunktion  $\Phi$  liittyviä lineaarisesti riippuvia matriiseja. Jännitysvektori määritetään yhtälöillä 83 ja 84 Hooken lakia soveltamalla (olettaen materiaaliominaisuudet homogeenisesti lineaariselastisiksi isotrooppisiksi materiaaleiksi) /9, s. 639/.

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12} \ \sigma_{23} \ \sigma_{13}]^T \quad (83)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}^n \quad (84)$$



Yhtälö 85 määritetään yhtälöiden 83 ja 84 perusteella /9, s. 639/.

$$\Phi^{\sigma\varepsilon}(c) = \mathbf{E}\Phi(c) \quad (85)$$

Tämä yhtälö yhdistää muotomatriisiin siirtymät ja kiertymät sekä jännitykset ja venymät matriisiin  $\mathbf{E}$ , mikä on luonteeltaan lineaarinen differentiaalioperaattori. Jännitysten ja venymien linkittäminen uuteen muotomatriisiin siirtymäkentän määrittämiseen käytettyjen yleistettyjen koordinaattien avulla tapahtuu yhtälöllä 86 /9, s. 639/.

$$\sigma(c, t) = \Phi^{\sigma\varepsilon}(c)\mathbf{q}(t) \quad (86)$$

Venymät määritellään modaalimenetelmällä lineaarikombinaatiomuotoina, mitkä yhdistävät tunnetut kertoimet modaalikoordinaattien yhteydessä esitettyihin aikariippuvaisiin arvoihin.

Osarakennetekniikassa voidaan yhtälöitä 74, 75 ja 86 johtaa kuvaamaan yhtälöparin 87 suhteita /9, s. 642/

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \Phi_1^{\sigma\varepsilon} \mathbf{p} \\ \sigma_2 &= \Phi_2^{\sigma\varepsilon} \mathbf{r} = \Phi_2^{\sigma\varepsilon} \mathbf{S} \mathbf{r} \end{aligned} \quad (87)$$

missä modaalimatriisi syntetisoidaan ilmentämään samalla jännitystermiä ja  $\Phi_2^{\sigma\varepsilon}$  saadaan käyttämällä transformaatiota  $\mathbf{S}$  ortonormalisoimaan siirtymämoodit jännitysten muotomatriisiksi  $\Phi_1^{\sigma\varepsilon}$  /10/.

## 2.7 Joustavien kappaleiden muotofunktiomallintamisen laskentaprosessi

Kappaleessa tapahtuneiden deformaatioiden määrittämiseksi ajan funktiona voidaan kappaleen asema- ja nopeusmuuttujat esittää lokaalin kelluvan koordinaatiston suhteen yhtälöllä 88 /11, s. 363/ hyödyntäen Ritzin approksimaatiomenetelmää.

$$\mathbf{u}_j^i(t) = [\mathbf{u}_{j,j}^i(t)] \quad \text{ja} \quad \mathbf{u}_{i,i}^i(t) = [\mathbf{u}_{i,i,j}^i(t)] \quad j = 1, 2, \dots, n_u^i. \quad (88)$$

Mallinnettaessa jäykkiä kappaleita  $n_u^i = 6$ , joustavien kappaleiden tapauksessa  $n_u^i > 6$ .

Referenssilike (yhtälö 89) /11, s. 367/ ja deformaatiot (yhtälö 90) /11, s. 367/ määritetään kappaleen referenssikoordinaatiston suhteen ominaismuotomatriisien  $\Phi$  ja  $\Psi$  avulla

$$\mathbf{u}_{ref}^i(\mathbf{R}, t) = \Phi^i(\mathbf{R})\mathbf{q}^i(t) \quad (89)$$

$$\mathbf{u}_{def}^i(\mathbf{R}, t) = \Psi^i(\mathbf{R})\mathbf{q}^i(t) \quad (90)$$

missä

$$\mathbf{q}^i(t) = [\mathbf{q}_k^i(t)] \quad k = 1, 2, \dots, n_q^i. \quad (91)$$

Yhtälön määrittämä kappaleen asema ja nopeus lausutaan yhtälöissä 92 ja 93 /11, s. 367/

$$\mathbf{u}_j^i(t) = [\mathbf{u}_{j,j}^i(t)] = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^i(t) \\ \mathbf{A}^i(t) \\ \mathbf{q}^i(t) \end{bmatrix} \quad (92)$$

$$\mathbf{u}_{i,i}^i(t) = [\mathbf{u}_{i,i,j}^i(t)] = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^i(t) \\ \boldsymbol{\omega}^i(t) \\ \dot{\mathbf{q}}^i(t) \end{bmatrix}, \quad (93)$$

missä alaindeksi  $j = 1, 2, \dots, n_u^i$ ,  $n_u^i = 6 + n_q^i$ .

Yhtälöissä 92 ja 93  $\mathbf{R}$  on kelluvan koordinaatiston asemavektori,  $\mathbf{A}$  koordinaatiston kiertymämatrisi ja  $\mathbf{q}$  solmupisteen  $k$  asemavektori yleistettyjen koordinaattien suhteen. Vastaa- vasti  $\mathbf{v}$  on koordinaatiston nopeusvektori,  $\boldsymbol{\omega}$  kiertymän kulmanopeusvektori ja  $\dot{\mathbf{q}}$  solmu- pisteen  $k$  nopeusvektori yleistettyjen koordinaattien suhteen.

Näiden muuttujien perusteella voidaan liikkeen kinematiikka määrittää matriisiyhtälönä 94 /11, s. 367/

$$\dot{\mathbf{u}}_I^i = \mathbf{U}^i(\mathbf{u}_I^i)\mathbf{u}_I^i, \quad (94)$$

missä

$$\mathbf{U}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{k,i} \mathbf{u}^i & \tilde{\mathbf{R}}^i & 0 \\ 0 & \mathbf{U}_r^i & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}^{k,i} \mathbf{u}^i \end{bmatrix}, \quad (95)$$

missä  $\mathbf{U}_r^i$  on kulmanopeudesta ja kiertymän aikaderivaatoista riippuva 3x3-matriisi.

Kinematiikkayhtälöiden perusteella määritetään kappaleen dynamiikkaa kuvaavat yhtälöt. Dynamiikan rajoitteita määrittävät yhtälöt jaetaan kahteen joukkoon. Ensimmäisessä joukossa on kappaleiden mallien määrittelyyn erityisin analyysien luodut yhtälötyypit, toiseen joukkoon kuuluvat kappaleen solmujen ja nivelten väliset vuorovaikutusrajoitteet. Eksplisiittisesti ensimmäisen joukon määrittämät rajoitteet kaikkien pisteiden siirtymäkentässä riippuvat yhtälöiden 92 ja 93 muuttujista. Toisen joukon antamat rajoitteet ovat seurausta vain nivelistä ja niiden eksplisiittisestä muodosta mitkä esitetään yhtälöiden 92 ja 93 redundanttisina muuttujina.

Systeemin liikeyhtälöt derivoimalla saadaan virtuaalisen tehon yhtälö 96 /11, s. 368/ kappaleen nopeuksien suhteen

$$\delta \mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \delta \mathbf{u}_I^{iT} (\mathbf{M}^i \dot{\mathbf{u}}_I^i - \mathbf{F}_A^i - \mathbf{F}_C^i), \quad (96)$$

missä muuttuja  $\delta \mathbf{u}_I^i$  määrittää virtuaaliset nopeudet yleistettyjen koordinaattien suhteen lasketuista nopeuksista  $\dot{\mathbf{u}}_I^i$ ,  $\mathbf{M}$  on massamatriisi,  $\mathbf{F}_A$  on vaikuttavien voimien vektori ja  $\mathbf{F}_C$  on rajoitevoimien vektori.

Kappaleeseen vaikuttavat voimat määritellään summayhtälön 97 /11, s. 369/ perusteella

$$\mathbf{F}_A^i = \mathbf{F}_W^i + \mathbf{F}_G^i + \mathbf{F}_e^i + \mathbf{F}_p^i + \mathbf{F}_f^i, \quad (97)$$

missä alaindeksi  $W$  merkitsee inertiaivoimia referenssiliikkeen kulmanopeuden suhteen,  $G$  gravitaatiovaikutusta,  $e$  elastisista deformaatioista muodostuvia sisäisiä voimia,  $p$  jännityksistä muodostuvia ulkoisia pintavoimia, ja  $f$  voimaelementeistä solmussa  $k$ ,  $i$  syntyviä yleistettyjä voimia, mitkä ovat seurausta pisteeseen vaikuttavan resultanttivoiman ja momentin yhteisvaikutuksesta. Yhtälön 96 massamatriisi määritellään yhtälön 98 /11, s. 369/ mukaisesti

$$\mathbf{M}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu}^i & & \text{sym.} \\ \mathbf{M}_{\theta u}^i & \mathbf{M}_{\theta\theta}^i & \\ \mathbf{M}_{eu}^i & \mathbf{M}_{e\theta}^i & \mathbf{M}_{ee}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^i \mathbf{A}^{k,i} \mathbf{u}^i & & \text{sym.} \\ m^i \mathbf{c}^i & \mathbf{I}^i & \\ \mathbf{C}_u^i & \mathbf{C}_\theta^i & \mathbf{M}_e^i \end{bmatrix}, \quad (98)$$

missä alaindeksit  $u$  ja  $\theta$  määrittävät muuttujan referenssiliikkeen siirtymien ja kiertymien suhteen ja  $e$  merkitsee elastisia deformaatioita. Matriisi  $\mathbf{c}^i$  määrittää kelluvan koordinaatiston asemavektorin kappaleen  $i$  painopisteen suhteen,  $\mathbf{M}_e^i$  määrittää yleistetyt massat nopeuksien  $\dot{\mathbf{q}}^i$  suhteen,  $\mathbf{C}_u$  ja  $\mathbf{C}_\theta$  ovat matriiseja, jotka muodostavat yhteyden referenssiliikkeen ja deformaatioiden välille. Näiden matriisien avulla voidaan laskea kappaleessa vaikuttavien momenttien vaikutus kappaleen referenssiliikkeeseen ja deformaatioihin. Momenttien suuruusluokka kelluvan koordinaatiston suhteen tapahtuneiden deformaatioiden perusteella määritetään yhtälöillä 99 ja 100 /11, s. 370/.

$$\mathbf{T}_{lin}^i = \mathbf{C}_u^i \dot{\mathbf{q}}^i \quad (99)$$

$$\mathbf{T}_{ang}^i = \mathbf{C}_\theta^i \dot{\mathbf{q}}^i \quad (100)$$

## 2.8 Kokoonpanorobotin rasiusten analysoinnin soveltava esimerkki

Systeemin komponenttien joustavuuden mallintaminen voidaan toteuttaa kelluvan koordinaatiston menetelmällä ja osarakennetekniikalla. Joustavuuden mallintamisen yksi perusongelma on suuri yleistettyjen koordinaattien määrä, minkä seurauksena laskentaprosessista tulee helposti raskas erityisesti, mikäli tarkasteltava systeemi on kokoluokaltaan suuri. Yleistettyjen koordinaattien määrän vähentämiseksi mallinnetaan kappale osarakennetekniikalla ja sovelletaan modaalikoordinaatteja. Käytettäviä moodeja on kahdenlaisia, normaalimoodeja ja staattisia moodeja. Kaikki käytettävät moodit normalisoidaan ortogonalisoinnin mahdollistamiseksi, jolloin päästään eroon vapausasteiden ristivaikutuksista. Laskentamenetelmä on esitetty prosessikaaviona taulukossa 1 sivulla 32.

Koska tarkoitus on laskea systeemissä tapahtuvia siirtymiä, nimetään tarkasteltavan kappaleen satunnainen piste pisteeksi  $p$ . Tämän jälkeen kyseinen joustava komponentti diskretisoidaan suurella määrällä elementtejä ja komponentista valitun tarkasteltavan pisteen  $p$  asema määritellään globaalin koordinaatiston suhteen yhtälöllä 101 /12, s. 724/

$$\mathbf{r}_p^i = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \mathbf{u}^i = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i (\mathbf{u}_o^i + \mathbf{u}_f^i), \quad (101)$$

missä  $\mathbf{u}_o$  on pisteen  $p$  alkuasemaa kuvaava vektori ja  $\mathbf{u}_f$  on deformaation suuruutta kuvaava siirtymävektori lokaalin koordinaatiston suhteen. Vektori  $\mathbf{R}$  määrittää lokaalin koordinaatiston aseman ja  $\mathbf{A}$  on lokaalin koordinaatiston kiertymämatrisi. Siirtymävektorin suuruutta approksimoidaan deformaatiomoodien lineaarikombinaatioilla yhtälössä 102 /12, s. 724/

$$\mathbf{u}_f^i = \Phi^i \boldsymbol{\eta}^i = \sum_{j=1}^n \Phi_j^i \eta_j, \quad (102)$$

missä

$$\Phi^i = \Phi^i(x^i, y^i, z^i) = [\Phi_t^i, \Phi_r^i] \quad (103)$$

on modaalimatriisi ja  $\Phi_j$  on sitä vastaava deformaatiomoodi,  $\boldsymbol{\eta}^i$  on modaalivektori,  $\eta_j$  modaalikoordinaatit ja  $n$  määrittää modaalikoordinaattien lukumäärän. Deformaatiomoodit voivat olla normaalimoodeja, staattisia moodeja tai normaalien ja staattisten moodien yhdistelmiä. Käytettyjen moodien tulee kuitenkin olla lineaarisesti riippumattomia toisistaan.

Yhtälöiden 101 ja 102 perusteella johdetaan yhtälöt 104 ja 105 /12, s. 724/

$$\mathbf{r}_p^i = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \mathbf{u}^i = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i (\mathbf{u}_o^i + \Phi_r^i \boldsymbol{\eta}^i) \quad (104)$$

$$\delta \mathbf{u}_p^i = \mathbf{u}^i + \Phi_r^i \boldsymbol{\eta}^i, \quad (105)$$

missä  $\mathbf{u}^i$  ja kiertymisestä seurannut siirtymä  $\delta \mathbf{u}_p^i$  solmupisteelle  $p$  määritellään termin  $\Phi_r^i \boldsymbol{\eta}^i$  perusteella. Systeemin kinemaattiset reunaehdot lausutaan tasapainoyhtälöllä 106 /12, s. 724/

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = 0. \quad (106)$$

Yhtälön 106 globaalit koordinaatit määritellään yhtälössä 107 /12, s. 724/

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_r^T, \mathbf{q}_f^T]^T = [\delta \mathbf{r}^T, \delta \mathbf{u}^T, \boldsymbol{\eta}^T]^T. \quad (107)$$

Yhtälössä 106  $t$  on aikaa ja  $\mathbf{C}$  on rajoitteita kuvaavat muuttujat. Lagrangen kertoimien avulla differentiaalis-algebralliset liikeyhtälöt ja systeemin elastiset ominaisuudet määritetään matriisimuodossa yhtälössä 108 /12, s. 724/.

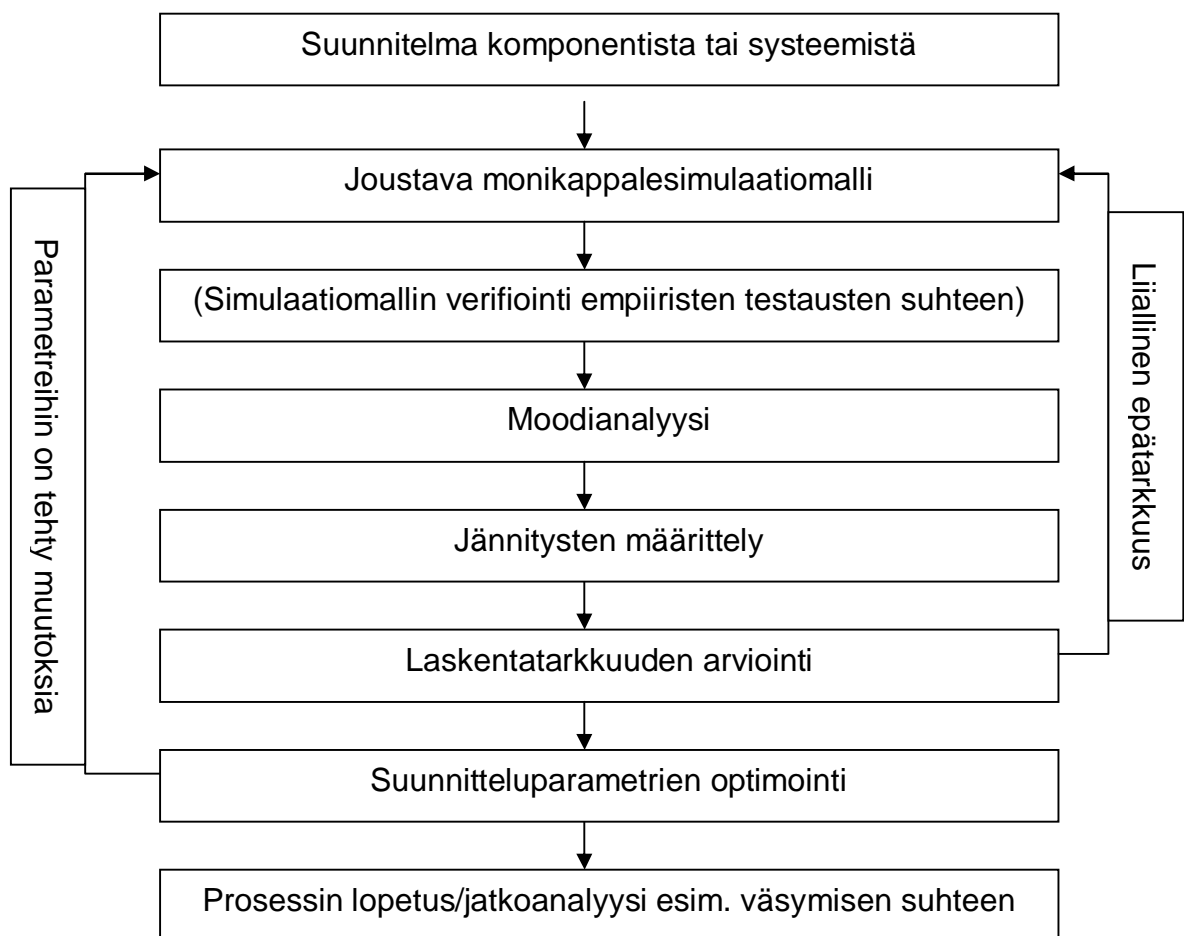
$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C}_q^T \\ \mathbf{C}_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_V \\ \mathbf{Q}_C \end{bmatrix} \quad (108)$$

Yhtälö 108 on ratkaistavissa numeerisesti. Mikäli ratkaisussa huomioidaan aika-askeleet, on yhtälöllä mahdollista laskea myös kappaleen dynaaminen jännityshistoria.

Komponenttien joustavan mallintamisen jälkeen tehdään systeemille moodianalyysi, mikä avulla voidaan tehokkaasti selvittää suurikokoisista kappaleista koostuvien systeemien pienetkin elastiset joustot. Erityinen huomio kiinnitetään huolella valittuihin pieneen järjestyksnumeron moodeihin. Jotta komponenttien moodien selvittäminen olisi mahdollista, on systeemin kinemaattiset nivelet ja voimaelementit määriteltävä mahdollisimman tarkasti. Moodianalyysin tulosten avulla selvitetään systeemin rakenteelliset heikot kohdat. Analyttiset värähtelymoodit lasketaan dynaamisesta simulaatiomallista ja niitä verrataan kokeellisiin testituloksiin tulosten oikeellisuuden varmistamiseksi.

Kun systeemissä vaikuttavat jännitykset on selvitetty, voidaan rakenteen kestävyys staattisen kuormituksen ja väsymisen suhteen laskea useilla eri menetelmillä. Mikäli lasketut tulokset havaitaan olevan suuruusluokaltaan kriittisellä alueella, päivitetään suunnitteluparametreja (esimerkiksi fyysiset mitat, materiaalivalinta, muodot) tarkoituksenmukaisesti ja suoritetaan systeemille tehtyjen muutosten jälkeen analyysiprosessi uudelleen. Näin jatketaan, kunnes tuloksien voidaan katsoa täyttävän suunnittelussa asetetut vaatimukset rakenteen kestävyys ja muiden ominaisuuksien suhteen.

Taulukko 1: Joustavan kappaleen laskentaprosessikaavio



### 3 RASITUSTEN LASKENTAMENETELMIEN OMINAISUUKSIEN KÄSITTELY

Tässä luvussa käsitellään rasitusten laskentamenetelmien ominaisuuksia pääasiassa sanallisesti. Menetelmiin liittyvät laskentaprosessit ovat kuvattu yksityiskohtaisesti luvussa 2 ja luvusta 4 on löydettävissä vertailevaa tietoa menetelmien ominaisuuksista.

#### 3.1 ESL-optimointi

Todelliset rakenteet, laitteistot ja systeemit koostuvat aina enemmän tai vähemmän joustavista komponenteista, mitkä voivat rasitusten vaikutusten alla deformoitua tai pahimmassa tapauksessa vaurioitua. Rasitusten suuruudesta ja systeemin käyttötarkoituksesta riippuen nämä ilmiöt voivat vaikuttaa paljonkin systeemin suorituskykyyn ja stabiliteettiin. Stabiiliteettiongelma voidaan monissa tapauksissa ratkaista komponenttien konservatiivisella mitoituksella, mutta sitä vastoin dynamiikasta seuraavat deformaatiot ja niiden vaikutusten määrittäminen systeemin ohjaustarkkuuden parantamiseksi edellyttävät laskennallisesti kehittyneempiä menetelmiä erityisesti kehitettäessä systeemistä myös taloudellisesti kilpailukykyisempää tuotetta.

Monikappalesysteemin joustavuuden mallintamiseen on kehitetty useita erilaisia menetelmiä, joista monet ovat kuitenkin ominaisuuksiltaan ja tulosten tarkkuudeltaan liian suurpiirteisiä, jolloin ne eivät sovellu dynaamisesti herkkien rakenteiden laskentaan. Toisena haasteena ovat aikariippuvaiset reunaehdot, joiden seurauksena ratkaistavista differentiaaliyhtälöryhmistä tulee laskennallisesti raskaita ja mahdollisesti numeerisesti epävakaita. Nämä haasteet korostuvat erityisesti, kun mallinnettavan systeemin kokoluokka ja sitä myötä kappaleiden lukumäärä kasvavat suureksi /4, s. 550/.

Näiden haasteiden ratkaisemiseksi voidaan soveltaa menetelmää, joka yhdistää joustavan monikappaledynaamisen analyysin tekniikoita /3/ /13/ /14/ ekvivalenttien staattisten kuormitusten optimointimenetelmäksi (ESL) /4, s. 549...562/. Joustava monikappalesysteemi sisältää tyypillisesti suuren määrän elastisia solmukoordinaatteja, joiden perusteella määriteltävien liikeyhtälöiden ratkaisemiseen on perinteisesti sovellettu laskennallisesti raskasta suoraa integrointia. Tuolloin laskentaa on tehostettu jakamalla rakenne erilaisiin alirakenteisiin (tai alisysteemeihin) ja tehdään moodianalyysi tutkittaville komponenteille. Tämän seurauksena laskentatarkkuus aina heikkenee jonkin verran ja systeemin yleisrakenteen tulee olla luonteeltaan sellainen, että sen jakaminen edellä mainittuihin alirakenteisiin onnistuu luontevasti.



Laskennallisen tehokkuuden ansiosta ESL-menetelmä soveltuu suuren kokoluokan systeemien ratkaisemiseen tyydyttävällä laskentatarkkuudella. Menetelmää voidaan soveltaa suunniteltaessa systeemien kineettisiä ominaisuuksia tai optimoitaessa rakenteita jännitysten ja muodonmuutosten suhteen [4, s. 550]. Menetelmä soveltuu myös suunnittelu-työn välivaiheissa suoritettavaan systeemin ominaisuuksien virtuaaliseen testaamiseen.

Laskentaprosessin alussa määritetään haluttu suunnitteluparametri, eli systeemistä valitun kappaleen optimoitava ominaisuus. Tämä ominaisuus voi olla mikä tahansa fyysinen mitta, materiaalityyppi tai muu vastaava kappaleen fysikaalisiin ominaisuuksiin vaikuttava tekijä. Suunnitteluparametrin valinnan jälkeen noudatetaan liitteessä 1 [4, s. 553] kuvatun kaavion esittämää laskentaprosessia, minkä avulla valittua ominaisuutta saadaan optimoitua.

Menetelmän perustana on systeemille tehtävä dynaaminen analyysi, missä kaikkien kappaleiden oletetaan olevan jäykkiä laskenta-ajan säästämiseksi. Dynaamisen analyysin tarkoituksena on selvittää kappaleisiin vaikuttavat aikasidonnaiset ulkoiset voimat. Tämän vaiheen laskenta on suoritettava erityisen huolellisesti, sillä menetelmän lähtöaskeleena se vaikuttaa kaikkiin menetelmässä myöhemmin suoritettaviin analyyseihin ja sitä kautta myös lopputulokseen voimakkaasti. Dynaamisen analyysin tuloksia verrataan ennalta määrättyyn katkaisukohtaan, jonka perusteella määritetään laskentaprosessin jatkamistarve. Mikäli yhtälön 9 (s. 8) ehdot täyttyvät, voidaan optimointiprosessi katsoa suoritetuksi ja laskenta päättää tähän. Muussa tapauksessa optimointiprosessia jatketaan.

Dynaamisessa analyysissä laskettujen kappaleisiin vaikuttavien ulkoisten voimien perusteella tehdään kappaleelle värähtelyanalyysi, jonka avulla määritetään kappaleessa vaikuttavat jännitykset ja niiden seurauksena tapahtuneet mahdolliset deformaatiot. Yleisen värähtelyteorian mukaan jokainen massallinen kappale sitoo itseensä kineettistä energiaa sen joutuessaan ulkoisen voiman vaikutuksen alaisuuteen. Voiman vaikutuksen loputtua kappale pyrkii potentiaalienergiansa avulla takaisin tasapainoasemaansa, minkä seurauksena syntyy yksi värähtelyamplitudi. Mikäli voiman vaikutus on toistuvaa ja jaksollista, amplitudeja tulee lisää ja kappale alkaa värähdellä. Mikäli syntyvät värähtelyvoimat laske- taan, voidaan niiden perusteella ratkaista myös kappaleessa vaikuttavat sisäiset jännitykset, minkä seurauksena värähtelyanalyysi soveltuu jännitysten laskentaan.

Ekvivalenteilla staattisilla kuormituksilla tarkoitetaan staattisia rasituksia, mitkä aiheuttavat kappaleeseen samansuuruisia deformaatioita kuin siihen kohdistuvat dynaamiset voimat aiheuttaisivat /4, s. 550/. Dynaamiset voimat ovat kuitenkin aina aikasidonnaisia ja jaksollisia, minkä seurauksena niiden ratkaiseminen on aina staattisia voimia monimutkaisempaa. Lisäksi vaikuttavien voimien perusteella laskettavien komponentin sisäisten rasitusten laskenta alati muuttuvien dynaamisten kuormitusten suhteen on huomattavasti haastavampaa verrattuna staattisten voimien perusteella suoritettavaan laskentaan. Kappaleiden deformaatioiden ollessa tunnettuja voidaan niiden perusteella laskea käänteisesti kappaleen sisäiset jännitykset edellyttäen, että kappaleen materiaaliominaisuudet tunnetaan mahdollisimman tarkasti. Siirtymien perusteella laskettavien jännitysten avulla päästään yleensä tarkempaan tuloksiin kuin jos jännityksiä lasketaan suoraan vaikuttavien voimien perusteella.

Kun kappaleen sisäiset jännitykset on laskettu, verrataan niitä asetettuihin raja-arvoihin jännitysten suhteen. Näiden raja-arvojen asettaminen on aina tapauskohtaista ja vaatii erityistä huolellisuutta riippuen koko systeemin ja kyseisen komponentin käyttötarkoituksesta ja kestävyysvaatimuksista. Suurimmillaan kyseisenä raja-arvona voi olla kappaleen myötölujuus, mutta vain erikoistapauksissa (esimerkiksi jotkin ruuvityypit). Käytännössä raja-arvot valitaan reilusti kappaleen myötölujuuden alapuolelle.

Koska kyseessä on optimointimenetelmä, verrataan laskettua optimoitavaa suunnitteluparametria edellisen syklin aikana lasketun parametrin avulla määriteltyyn katkaisukohtaan ja tämän vertailun seurauksena tehdään johtopäätös optimointiprosessin jatkamisesta. Mikäli katkaisukohta ei ole saavutettu, tehdään optimoitavaan suunnitteluparametriin tarpeenmukainen muutos, jonka jälkeen kappaleelle suoritetaan uusi värähtelyanalyysi ja ekvivalenttien staattisten kuormitusten laskenta. Mikäli katkaisukohta on saavutettu, voidaan kappaleen päivitetty ominaisuudet siirtää suoraan koko systeemin monikappalemalliin, jonka jälkeen systeemille tehdään uusi jäykkien kappaleiden dynaaminen analyysi. Sopivan katkaisukohdan määrittäminen tapahtuu aina suunnittelijan näkemyksen mukaan, käytännössä tarkoituksena on etsiä katkaisukohdalle sellainen riittävän pieni lukuarvo, jonka perustella voidaan havaita, että optimointisilmukan laskennan jatkaminen ei enää varsinaisesti paranna määritellyn suunnitteluparametrin asettamaa ominaisuutta. Käytännössä katkaisukohta on aina suunnittelijasta riippuva subjektiivinen lukuarvo.

### 3.2 RBDO-optimointi

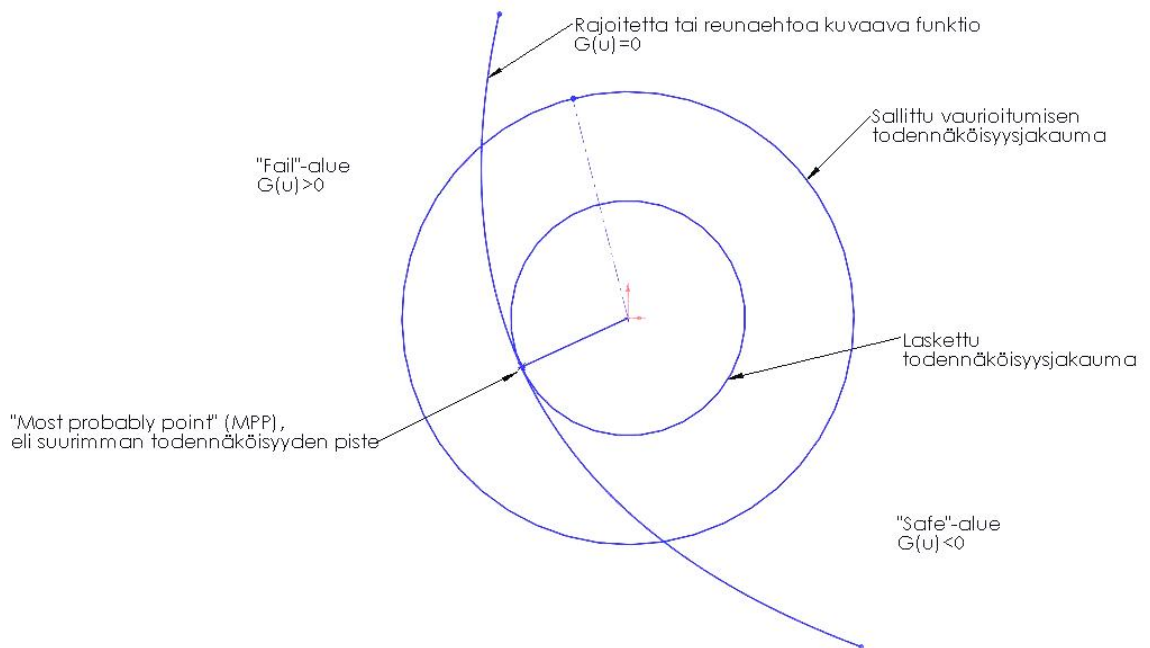
RBDO-optimointimenetelmällä (reliability based design optimization) /5, s. 301...313/ voidaan systeemin komponenttien ominaisuuksia optimoida niiden toiminnallisen luotettavuuden suhteen. Koska luotettavuus on luonteeltaan tilastollinen käsite, laskentaprosessi hyödyntää todennäköisyyslaskentaa systeemin tai komponentin suunnitellun eliniän saavuttamisen tarkastelemisessa. Tätä optimointimenetelmää on käytetty menestyksekkäästi esimerkiksi Yhdysvaltojen armeijan HMWVV-maastoajoneuvojen alustarakenteiden suunnittelussa /5, s. 301/. Kyseistä tuotekehitystyötä voidaan pitää erinomaisena koekenttänä RBDO-menetelmän ominaisuuksia arvioitaessa, sillä HMWVV-maastoajoneuvojen usein kovan rasituksen alla olevien alustarakenteiden luotettavuus hyvinkin erilaisissa olosuhteissa on tärkeää. Sotilaskäyttöön suunnitelluilla maastoajoneuvoilla voidaan joutua ajamaan hyvinkin suurella nopeudella vaikeassa maastossa ja niiden on kestävä myös taistelutoiminnan aiheuttamia kuormituksia. Maastoajoneuvojen on oltava lisäksi käytettävyydeltään ketteriä ja monikäyttöisiä. Ajoneuvon jousittamattomaan massaan kuuluvien komponenttien on ajo-ominaisuuksien parantamiseksi oltava mahdollisimman keveitä, minkä seurauksena komponenttien fyysisten mittojen optimoiminen suunnitteluvaiheessa on oleellista.

RBDO-menetelmässä hyödynnetään todennäköisyyslaskentaa approksimoitaessa systeemin eliniän aikana mahdollisesti ilmenevien vakavien vaurioiden todennäköisyyksiä /5, s. 301/. Mikäli tavoitteena on esimerkiksi selvittää, ettei tarkasteltavana olevassa komponentissa jännitys ylitä koskaan materiaalin myötölujuutta, lasketaan todennäköisyys myötölujuuden ylittymiselle ja edellytetään tämän todennäköisyyden olevan pienempi kuin suurin hyväksyttävissä oleva todennäköisyys systeemin vaurioitumiselle eliniän tai huoltovälin aikana /5, s. 302/. Menetelmän teoreettinen lähtökohta on siis varsin yksinkertainen ja yleisesti tunnettu, ongelmaksi muodostuu kuitenkin laskentamenetelmät, joiden soveltaminen ei ole aivan yksikäsitteistä.

Mikäli esimerkiksi edellä mainitun ajoneuvon tukivarsien kestävyyttä tarkasteltaisiin eri muuttujien ominaisuuksia kuvaavien tiheysfunktioiden avulla, olisi jokaiselle muuttujalle selvitettävä tiheysfunktiot erikseen, mikä olisi ensinnäkin erittäin työlästä ja lisäksi vain harvoissa tapauksissa yksiselitteistä. Lisäksi kestävyuden todennäköisyyden määrittäminen ratkaisemalla kyseinen funktioparvi esimerkiksi Monte Carlo-menetelmällä /15, s. 335...341/ olisi laskennallisesti raskasta. Tämän vuoksi tiheysfunktioiden käyttötarve kierretään FORM-menetelmällä (first order reliability methods), jolloin laskentaprosessi yksinkertaistuu huomattavasti /5, s. 302...303/.

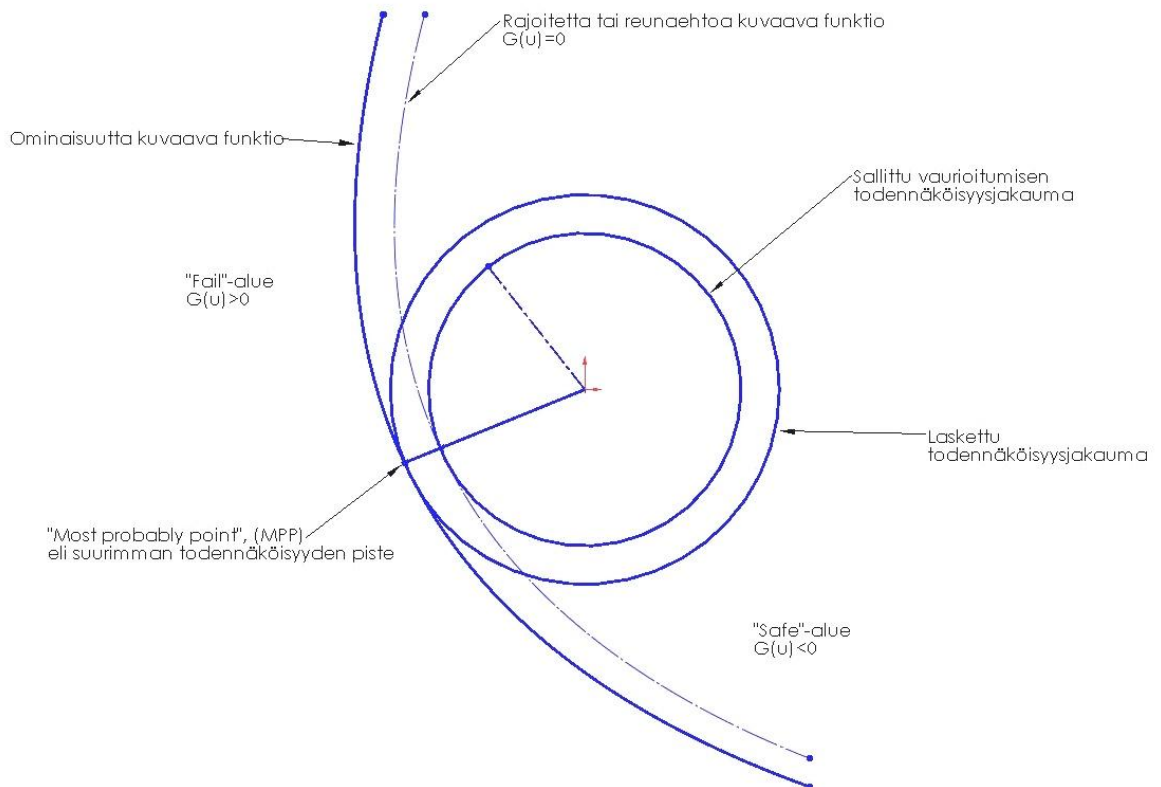
FORM-menetelmässä todennäköisyyksien ratkaiseminen tapahtuu tiheysfunktioiden sijaan rajoiteyhtälön lukuavaruuden ( $u$ -avaruus) suurimman todennäköisyyden määrittävän pisteen perusteella /5, s. 303/. Yhden kohdepisteen laskeminen säästää huomattavasti laskentaan kulunutta aikaa verrattuna koko tiheyskaalan laskentaan. Lisäksi kyseinen kohdepiste kaiken lisäksi lopulta ratkaisee rakenteen ominaisuuksien kyvyn kestää toivottu käyttöikä. FORM-menetelmässä on valittavissa kaksi erityyppistä laskentametodia, joista ensimmäistä kutsutaan RIA-lähestymistavaksi (reliability index approach, kuva 2) /5, s. 303/ ja toista PMA-lähestymistavaksi (performance measure approach, kuva 3) /5, s. 304/.

Sekä RIA- että PMA-lähestymistavoissa jaetaan  $u$ -avaruus optimoitavaa ominaisuutta kuvaavalla rajoitepinnalla kahteen osaan, niin kutsuttuihin "safe" ja "fail"-alueisiin. On syytä huomioida, että kyseisen funktion muoto on todellakin kolmiulotteinen pinta, kuvat 2 ja 3 on graafisen selvyyden vuoksi piirretty kaksiulotteisena. Rajoitepinta määritetään ominaisuutta kuvaavan funktion sellaisten pisteiden joukkona, missä funktion arvot ovat nollija. Rajoitepinnan toisella puolella funktio saa positiivisia arvoja, jolloin rajoite-ehto on ylitetty ja ollaan ominaisuuden luotettavuuden kannalta epäsuotuisalla eli "fail"-alueella. Vastavasti toisella puolella funktio saa negatiivisia arvoja, jolloin ylitystä ei ole tapahtunut ja luotettavuustaso on hyväksyttävällä "safe"-alueella. Kestävyysvaatimus kuvataan  $u$ -avaruuden origoon sijoitettavana todennäköisyysjakaumaa esittävänä muodoltaan pallomaisena pistejoukkona, jonka suhdetta rajoittavan funktion pistejoukkoon tarkastellaan.



Kuva 2: RIA-laskentamenetelmä

RIA-lähestymistavassa määritetään optimoitavaa ominaisuutta kuvaavan rajoitefunktion suurimman todennäköisyyden piste minimoimalla rajoitefunktion ja  $u$ -avaruuden origon etäisyys. Kun pienin etäisyys on selvitetty, verrataan tulosta suurinta sallittua vaurioitumisen todennäköisyysjakaumaa kuvaavan pallon säteeseen. Mikäli vaurioitumisen todennäköisyyden tiheysfunktion pallon säteen pituus on pienempi kuin rajoitefunktion etäisyys origoon, on rakenteen luotettavuus hyväksyttävällä tasolla. Vastakkaisessa tapauksessa luotettavuus ei ole riittävällä tasolla (kuten kuvassa 2). RIA-lähestymistavan ongelmana on kuitenkin optimoinnin edellyttämä tarve saada sekä säteen pituus että funktion ja origon etäisyys lukuarvallisesti mahdollisimman lähelle toisiaan, mikä on RIA-lähestymistavassa mahdollista ainoastaan toistamalla edellä kuvattua laskentaa muuttamalla syklien välillä funktion muuttujien arvoja optimaalisemmaksi. Tämänkaltainen toistoprosessi on menetelmänä laskennallisesti raskas, minkä vuoksi yleensä suositellaankin kevyemmän PMA-lähestymistavan (kuva 3) soveltamista RIA-lähestymistavan sijaan.



Kuva 3: PMA-laskentamenetelmä

PMA-lähestymistapa eroaa RIA-lähestymistavasta siten, että siinä funktion optimaalista arvoa etsitään käänteisesti /5, s. 304/. PMA-lähestymistavassa lasketaan ensin suurimman sallitun vaurioitumisen todennäköisyysjakauman pallon muotoinen pistejoukko ja määritetään tämän pallon ulkopinnan ja origon välinen pituus, minkä jälkeen etsitään tämän tiedon perusteella ominaisuutta kuvaavalle funktiolle optimaaliset muuttujien arvot, joiden avulla suurinta todennäköisyyttä määrittävän MPP-pisteen sijainti pysyy juuri ja juuri "safe"-alueella (kuvassa 3 MPP on "fail"-alueella). PMA-lähestymistapa on huomattavasti vähemmän toistosyklejä ja laskentaa vaativa menetelmä verrattuna RIA-lähestymistapaan, minkä vuoksi sen soveltaminen on suositeltavampaa.

PMA-lähestymistavassa laskennan onnistumiseksi oleellista on rajoitefunktion muodostaman pinnan muoto, joka voi olla muodoltaan kupera tai kovera. Mikäli funktion muoto tunnetaan, voidaan laskentamenetelmäksi valita suoraan joko AMV- (kupera funktio) tai CMV-menetelmä (kovera funktio) /5, s. 304/. Menetelmät ovat kuvattu tarkemmin luvussa 2.2. Funktion muodon tunteminen on tärkeää, sillä koverien funktioiden tapauksessa AMV-menetelmällä tavoitearvon laskenta on hidasta tai pahimmassa tapauksessa mahdotonta funktion divergoitessa. Vastakkaisessa tapauksessa CMV-menetelmä on tehokas, sillä tässä menetelmässä iterointisuunta valitaan kolmen lineaarikombinaation avulla. Kuperien funktioiden kohdalla menetelmä on kuitenkin tehoton ja epäluotettava. Mikäli funktion muoto on tuntematon, sovelletaan HMV-menetelmää /5, s. 304/ missä funktion muoto ensin selvitetään, minkä jälkeen valitaan laskentametodiksi AMV- tai CMV-menetelmä.

RBDO-optimointimenetelmä soveltuu myös väsymisilmiön tarkasteluun, sillä kappaleiden väsyminen voidaan nähdä tilastollisena ilmiönä. Koska RBDO-menetelmä itsessään on kuitenkin vain todennäköisyyslaskentasovellus, on varsinainen jännitysten tai väsymisen laskenta suoritettava muita menetelmiä, kuten elementtimenetelmää käyttämällä. Mikäli tavoitteena on välttää hyvin suurten tai pienten lukuarvojen käsittelyä esimerkiksi juuri väsymiskestävyyksien laskennan yhteydessä, voidaan todennäköisyysfunktion käyttäytymistä tarkastella luvun 1 ympäristössä yhtälön 109 /5, s. 305/ osoittamalla tavalla.

$$G_i(\mathbf{d}(\mathbf{X})) = 1,0 - FSL_i \frac{(\mathbf{d}(\mathbf{X}))}{FSL_t} \quad (109)$$

Yhtälössä 109  $FSL$ -muuttuja määrittää väsymisvenymien seurauksena rajoitettua komponentin kestoikää ja alaindeksi  $i$  määrittää reunaehdon numeron (rajoitteiden kokonaislukumäärä vastaa komponentin kriittisten pisteiden lukumäärää, mikäli väsymisvaurioiden ilmenemisen todennäköisyys on suuri) ja  $t$  kappaleelle tavoitteeksi asetetun eliniän.

Väsymisilmiöiden mallintaminen ja komponenttien kestävyyslaskenta on oma, laaja tutkimuskohteensa. Yleisesti voidaan todeta, että väsymistä aiheuttavien jännitysten mallintaminen on parempi laskea kappaleen venymien perusteella kuin suoraan esimerkiksi vaikuttavien voimien mukaan laskentatarkkuuden parantamiseksi. Väsymisilmiön edellyttämä kuormitusten syklisyys muodostaa omanlaisensa haasteen. Rasitustasojen keskinäinen ekvivalentti vakioamplitudi voidaan laskea esimerkiksi rainflow-tekniikalla /16, s. 37...40/ ja venymät Manson-Coffin-Morrowin yhtälöillä /17, 193...226/. Erityisesti materiaalin muokkautuessa plastisesti on huomioitava myös muokkauslujittuminen, joka voi tapauksesta riippuen vaikuttaa merkittävästikin rakenteen kestävyteen. Väsymislaskennalla saavutetut tulokset ovat kuitenkin aina enemmän tai vähemmän tilastollisia, minkä johdosta varmuuskerroin on valittava riittävän suureksi sovelluksesta riippuen. Virhelähteitä erityisesti RBDO:n kaltaisessa tilastollista todennäköisyysperiaatetta soveltavassa menetelmässä kuitenkin esiintyy alusta alkaen riippuen valitusta laskentatarkkuudesta ja käytävissä olevista alkuarvoista ja niiden laadusta.

### 3.3 Venymien rekonstruointimenetelmä

Simuloitaessa todellisen monikappalesysteemin dynamiikkaa kyseiselle systeemille tehtyjen kokeellisten mittausten perusteella, muodostuu simulaatiomallia luotaessa tärkeäksi kysymykseksi systeemin rakenteiden aiheuttamien vasteiden laskenta, mikä voidaan ratkaista esimerkiksi venymien rekonstruointimenetelmillä /6/. Rekonstruointimenetelmiä on ominaisuuksiltaan ja lähestymistavoiltaan erilaisia ja niitä voidaan hyödyntää myös tarkasteltaessa täysin uusien systeemien dynamiikkaa. Mikäli systeemi sisältää takaisinkyntään perustuvia systeemin komponenteissa vaikuttaviin rasituksiin reagoivia ohjaussilmukoita, on vasteiden onnistunut rekonstruointi edellytys systeemin toiminnan tarkoituksenmukaistamiseksi. Lähteessä /6/ on esitelty kolme luonteeltaan hieman erilaista vasteiden rekonstruointiin soveltuvaa lähestymistapaa, joista yhden laskentamethodiikka selvitetään yksityiskohtaisemmin luvussa 2.3. Ensimmäinen menetelmä perustuu systeemiin vaikuttavien voimien rekonstruointiin, toisessa menetelmässä määritetään rasitusten seurauksena komponenteissa tapahtuneiden venymien avulla kappaleiden sisäisiä jännityksiä ja kolmas menetelmä lähestyy ongelmaa systeemin kinematiikan näkökulmasta.

Vaikuttavia voimia rekonstruoidessa systeemiin vaikuttavat ulkoiset voimat määritetään mahdollisimman tarkasti /6/. Menetelmän teoriaa voidaan pitää varsin suoraviivaisena ja perinteisenä. Suunniteltaessa uudenlaisia systeemejä ja tutkittaessa niiden käyttäytymistä ulkoisten voimien vaikutusten alla tämä menetelmä on yleensä loogisin valinta, sillä tuolloin ulkoiset voimat voidaan määrittää suunnittelijan arvioinnin perusteella. Tarvittaessa voidaan kokeilla suuruudeltaan ja vaikutussuunniltaan hyvinkin erityyppisiä voimia ja tarkastella niiden vaikutuksia systeemiin. Toisaalta voidaan myös laskea systeemin toiminnan tuottamia systeemistä ulospäin suuntautuvia voimia varsin ongelmattomasti.

Tutkittaessa jo olemassa olevaa systeemiä vaikuttavien voimien rekonstruointi voi osoittautua hankalaksi toteuttaa, sillä ulkoisten voimien suuruudet ja vaikutussuunnat eivät välttämättä ole kovinkaan tarkasti selvillä, vaikka ne määriteltäisiinkin mahdollisesti haastavien empiiristen mittausten avulla. Lisäksi systeemin komponenttien mallinnustyö on suoritettava yksityiskohtaisesti. Moodianalyysillä laskentaa helpotetaan projisoimalla sekä ulkoiset voimat että rakenteiden ja komponenttien aikaansaamat vastefunktiot modaalivaruuteen, joskin tällä lähestymistavalla haasteeksi muodostuu ratkaistavien yhtälöiden suuri määrä, mikäli laskenta halutaan toteuttaa edes tyydyttävällä tarkkuudella. Edellä mainittujen ongelmien takia tätä menetelmää ei yleensä sovelleta käytännössä, paitsi mikäli ratkaistavana on erittäin yksinkertainen rakenne tai mikäli voimien rekonstruointi jostain muusta erityisestä syystä osoittautuu riittävän helposti toteutettavaksi menetelmäksi.



Komponenttien muodoissa tapahtuneiden venymien rekonstruointitekniikka /6/ perustuu teoriaan, missä rekonstruoidaan kappaleiden venymät ja siirtymät rakenteen jokaisessa materiaalipisteessä. Nämä siirtymät saadaan mittaamalla tarkastelun kohteena olevien kappaleiden siirtymät empiirisesti ja projisoimalla mittaustulokset simulaatiomalliin. Menetelmää voidaan kutsua myös käänteiseksi elementtimenetelmäksi. Menetelmän ehdotmana etuna on siirtymistä aiheutuneiden jännitysten määrittämisen tarkkuus, joka on mahdollista saavuttaa siirtymien perusteella riittävän tiheällä elementtiverkolla. Elementtiverkon optimaalinen tiheys on sitä vastoin tapauskohtaisesti määriteltävä asia, mistä on mahdotonta antaa yleispäteviä ohjeita. Liian harvalla verkolla tulosten tarkkuus kärsii, toisaalta liian tiheä verkko on laskennallisesti raskas ja tulokset voivat sisältää yhtäläillä virheellisiä, ylisuuria jännityskeskittymiä.

Elementtimenetelmään perustuvan laskennan lisäksi haasteensa venymäkentän rekonstruointiin tuo jatkuvien kuormitusten huomiointi, sillä esimerkiksi venymäliuskoilla voidaan mitata ainoastaan määrätyn ajanjakson aikana tapahtuvia muutoksia, joten jatkuvien jännitysten määrittely on suoritettava muilla keinoilla. Menetelmä on laskennallisesti myös raskas optimointitehtäviin, eikä menetelmä itsessään sisällä laskennallisesti kevyempää optimointisilmukkaa. Luotettavien tulosten saamiseksi tämä menetelmä vaatii myös suuren määrän tunnistimin, esimerkiksi venymäliuskoja, suoritettavia mittauksia, lisäksi menetelmän soveltuvuus monikappalesysteemeihin ei ole elementtimenetelmän soveltamisen ansiosta paras mahdollinen.

Kolmas menetelmä perustuu dynaamisen systeemin kinematiikan määrittämiseen /6/. Tämä on mahdollista suorittaa useillakin erilaisilla vektorilaskentaa hyödyntävillä menetelmillä, joita on sovellettu käytäntöön erityisesti biomekaniikassa arvioitaessa niveliin vaikuttavia jännityksiä ihon siirtymän perusteella. Siirtymä määritellään ihon pintaan merkityillä pisteillä, joiden liikkuminen tallennetaan määrätyllä aikavälillä otettuina valokuvina. Tätä kinemaattista tietoa verrataan luustosta muodostettuun monikappalemalliin, minkä perusteella voidaan laskea määritettyihin kohteisiin, esimerkiksi johonkin niveleen kohdistuva jännitys. Tämä menetelmä sisältää kuitenkin lukuisia epätarkkuuksia ja lisäksi painovoima- ja väliaineen vastusvaikutukset biomekaniikassa yleensä jätetään huomioimatta, joilla voi olla käyttö- ja sovellustarkoituksesta riippuen robotiikassa joskus huomattavakin painoarvo. Tämän vuoksi tätä lähestymistapaa ei yleisesti sovelleta biomekaniikan ulkopuolella.

Edellä kuvatuista menetelmistä tarkempaan käsittelyyn otetaan toisena esitelty venymämuotojen rekonstruointitekniikka, sillä kyseinen menetelmä on edellä mainituista haasteista huolimatta soveltamiskelpoisin ainakin robotiikkasovelluksissa. Kappaleen liikeyhtälöiden perusteella suoritettu solmupisteiden transformaatio modaalikoordinaateiksi ja tulosten vertaaminen empiirisesti suoritettuihin mittauksiin tarjoaa hyvän lähestymistavan vasteiden rekonstruointiin ja sen perusteella voidaan suorittaa jännitysten määrittely tai väsymisanalyysi. Laskentamenetelmä on esitelty yksityiskohtaisemmin luvussa 2.3.

Mikäli systeemissä tapahtuvien venymien oletetaan tapahtuvan aina materiaalin elastisella alueella, ovat siirtymät yleensä suositeltavaa mallintaa lineaarisina laskentaprosessin yksinkertaistamiseksi ja laskennan tehostamiseksi. Tästä kuitenkin seuraa aina jonkin verran virhettä tuloksiin, sillä todelliset siirtymät ovat aina epälineaarisia. Yleispätevää sääntöä, milloin linearisointi voidaan turvallisesti toteuttaa, ei ole olemassa. Linearisessa systeemissä vasteen ja sen aiheuttaman ulkoisen voiman suhde on myös lineaarinen, mikä helpottaa huomattavasti tulosten tarkastelua laskennan lisäksi. Mikäli analyysi on kuitenkin kaikesta huolimatta suoritettava epälineaarisesti, tulee useista yhtälöiden muuttujista aikariippuvaisia, mikä monimutkaistaa yhtälöiden rakennetta ja niiden ratkaisumenetelmiä huomattavasti.

Mallinnettavasta sovelluksesta riippuen voi olla mahdollista, että systeemiä kuormittaa myös virtaava väliaine, kuten ilma, vesi tai esimerkiksi jokin hydraulikkaöljy. Tämänkaltaisia haasteita tulee eteen mallinnettaessa esimerkiksi erilaisia rottoreita tai pumppuja. Tuolloin laskentaprosessi vaikeutuu huomattavasti, sillä virtaavan aineen käyttäytyminen on laskettava monissa tapauksissa CFD-laskennalla [18, s. 3...32] ainakin komponentin välittömässä läheisyydessä. Näissä tapauksissa tärkeää on valita CFD-laskenta-algoritmi huolellisesti, jotta voidaan välttää turhan tarkka ja raskas laskenta, mutta toisaalta kuitenkin saavuttaa riittävä tarkkuus tulosten suhteen. CFD-laskentaan on viime aikoina kehitetty lukuisia algoritmeja, jotka eivät välttämättä vaadi enää aero- tai hydrodynaamisten ominaisuuksien yhtä tarkkaa määrittelyä kuin perinteisemmät laskenta-algoritmit, jolloin CFD-laskennan soveltamismahdollisuudet kasvavat ja laskentatehokkuus paranee monissa tapauksissa huomattavasti.

### 3.4 Kitkan aiheuttamien rasitusten mallinnusmenetelmä

Systeemien rakenteissa esiintyy usein tilanteita, missä kaksi tai useampi systeemin kappaleista on laakeroimattomassa kontaktissa toisiaan vasten, jolloin kappaleiden vastinpinnat ovat kitkarasituksen vaikutuksen alla. Kontaktien ja niistä muodostuvan kitkan simulointi yksityiskohtaisesti on monimutkainen asia, minkä haastavuutta lisää huomattavasti vielä laakerointihelojen yleensä epälineaarinen luonne monien ominaisuuksiensa suhteen. Aiheen laajuudesta johtuen tässä luvussa esiteltävä kitkarasitusten mallinnusmenetelmä /7, s. 205...224/ on luonteeltaan varsin yksinkertainen ja tarkoitus onkin tarkastella ainoastaan hyvin yksinkertaisia kitkarasitustapauksia, kuten kahden kiinteän, esimerkiksi teräksisen kappaleen toisiaan vasten hankautumisesta aiheutuvia kappaleisiin kohdistuvia sisäisiä rasituksia. On selvää, että tämänkaltaiset tapahtumat ovat todellisissa systeemeissä yleensä erityistapauksia, sillä jatkuvasti toistensa suhteen hankautuvat kappaleet yleensä laakeroidaan tai vähintäänkin voidellaan tehokkaasti.

Kappaleiden hankautumisesta seuraavien kitkavoimien komponentteihin kohdistamien voimien suuruusluokka vaihtelee hyvin paljon sovelluskohteesta riippuen. Pienissä systeemeissä ja toimilaitteissa niiden muodostamat voimat ovat yleensä vaatimattomia, tosin mikäli systeemin toiminnalta vaaditaan erityistä tarkkuutta, on mahdollista, että nämäkin voimat on otettava huomioon suunnittelussa. Systeemien kokoluokan kasvaessa myös kitkavoimat tyyppillisesti kasvavat, jolloin niillä voi olla tapauksesta riippuen merkittäväkin vaikutus rakenteen kestävyteen ja elinikään.

Kitkayhtälö, jossa kappaleissa vaikuttavat kitkarasitukset mallinnetaan voimaparina, ja sen johtaminen monikappalesysteemin liikeyhtälön pohjalta on kuvattu luvussa 2.4 /7, s. 206...207/. Kitkavoimien oletetaan käyttäytyvän ulkoisten voimien tapaan, jolloin kineettinen kitka kuvataan kappaleeseen vaikuttavana ulkoisena voimana, jonka voimapariksi tulee kappaleessa sisäisesti vaikuttava kitkan aiheuttama vastevoima. Staattisen kitkan oletetaan olevan seurausta kappaleen ja systeemin rajoitteista. Kitkavoiman mallintaminen kinematiikan perusteella edellyttää myös kitkavoiman olevan riippuvainen kappaleiden keskinäisestä suhteellisesta nopeudesta. Mikäli suhteellinen nopeus on likimain nollan luokkaa, kitkavoima riippuu lähinnä kappaleiden välisestä mikroskooppisesta luistosta /7, s. 207...208/. Tämä kitkavoiman epälineaarisuus erittäin hitailla nopeuksilla on tässä tapauksessa mallintamisen suurin haaste. Laskennassa sovellettavan kitkamallin valinta on tehtävä tapauskohtaisesti tarvittavan laskentatarkkuuden perusteella. Kitkamalli voi olla esimerkiksi Coulombin kitkamalli sellaisenaan, tai sitä voidaan tarvittaessa täydentää staattisen kitkan, visko-, tai Stribeckin efektien vaikutuksilla /19/. Monesti käytetään myös yleiskitkamallia, joka huomioi edellä mainitut efektit suurpiirteisesti.

Kitkan vastevoiman vaikutus kappaleessa vaikuttaviin jännityksiin ratkaistaan luvussa 2.4 esitetystä yhtälöstä 41 (s. 17), tosin vapausasteiden vähentämiseksi yhtälö yleensä johdetaan yhtälössä 42 (s. 17) esitettyyn muotoon. Elastiset deformaatiot approksimoidaan kaikkien vapausasteiden suhteen valittujen moodien lineaarikombinaatioilla, jolloin laskennasta tulee helposti raskas prosessi, mikäli vapausasteita on paljon. Tarkasteltavan komponentin moodit sisältävät rakenteen staattisia ja dynaamisia ominaisuuksia kuvaavia rajoite- ja normaalimooodeja. Nämä moodit ortogonalisoidaan, minkä seurauksena ei ole enää mahdollista erotella selkeästi staattisia ja dynaamisia moodeja toisistaan /7, s. 209/.

Integroimalla yhtälö 42 (s. 17) määritetään vaikuttavien voimien tai siirtymien suuruuksien perusteella kappaleessa vaikuttavat jännitykset. Jännitysten määrittelyn haasteena ovat laskennallisesta lähestymistavasta riippuvat jonkin verran poikkeavat tulokset, minkä seurauksena jännitysten laskenta perustuu aina enemmän tai vähemmän approksimointiin. Erilaisia lähestymistapoja jännitysten määrittämiseksi on esitetty lähteessä /7, s. 210/ viisi kappaletta ja niiden oikeaoppinen soveltaminen riippuu aina täysin laskettavasta systeemistä ja tarvittavien tulosten laadusta.

Ensimmäisessä lähestymistavassa lasketaan jännitykset olettamalla kitkavoima ulkoiseksi voimaksi ja vaikutuksen alla oleva kappale jäykäksi /7, s. 210/. Kappaleessa tapahtuvat muodonmuutokset jätetään huomioimatta ja kappaleen oletetaan olevan ulkoisesti tuettu. Varsinainen jännitysten laskenta tapahtuu elementtimenetelmällä. Tässä tapauksessa jännitykset lasketaan myös ulkoisen voiman perusteella olettaen kappale joustavaksi, muutoin menetelmä muistuttaa ensimmäistä menetelmää /7, s. 210/. Toisessa lähestymistavassa kappaleen tai systeemin tuentapisteet ovat tärkeässä roolissa ratkaisussa haettaessa, sillä kappaleen tai systeemin oletetaan olevan staattisessa tilassa. Mikäli samassa systeemissä lasketaan useampia reaktivoimia, tulee niiden summan olla nolla, jotta voidaan varmistua tuloksien oikeellisuudesta. Laskettujen reaktivoimien perusteella lasketaan elementtimenetelmällä tarkasteltavassa kappaleessa vaikuttavat jännitykset.

Kolmannessa lähestymistavassa oletetaan kappale joustavaksi ja sisäisen rasituksen muodostuvan ulkoisen voiman vaikutuksesta toisen lähestymistavan tapaan, mutta lisäksi huomioidaan kappaleen oman inertiaivoiman vaikutus /7, s. 210/. Systeemi tai kappale oletetaan kinemaattis-staattiseen tasapainotilaan inertia- ja gravitaatiovoimien ratkaisemiseksi. Muilta osin lähestymistapa muistuttaa toista menetelmää. Neljäs lähestymistapa perustuu systeemin tai kappaleen modaalijännitysten laskentaan /7, s. 210/. Systeemille tai kappaleelle tehdään moodianalyysi, jonka perusteella jokaisessa ortogonalisoidussa moodissa laskettujen modaalijännitystensorien liittäminen modaalikoordinaatteihin mahdollistaa jännitysten laskennan osarakennetekniikalla.

Viidennessä lähestymistavassa jännitykset lasketaan kappaleessa tapahtuneiden deformaatioiden perusteella /7, s. 210/. Kappale jaetaan elementteihin, minkä jälkeen verrataan solmujen sijaintien siirtymiä voimien vaikutuksen seurauksena. Elementtimenetelmällä lasketaan siirtymien perusteella kappaleessa vaikuttavat jännitykset.

Kahdella viimeisellä lähestymistavalla laskettaessa jännitykset voivat useissa tapauksissa osoittautua suuremmiksi, kuin voimiin perustuvilla menetelmillä laskettaessa. Näiden eroavaisuuksien syynä on modaali- ja siirtymämenetelmien sisältämä modaalikihtyvyysefekti systeemin inertiatermien differentiaaliyhtälöissä, mitä ei ole olemassa voimien vaikutukseen perustuvissa lähestymistavoissa. Näistä viidestä lähestymistavasta yleisimmin sovellettu on kuitenkin toinen lähestymistapa, joka tarjoaa yleensä kohtuullisella laskenta-ajalla saadut, tarkkuudeltaan tyydyttävät tulokset /7/. Lisäksi tästä lähestymistavasta on olemassa lukuisia erilaisia variaatioita, jotka painottavat laskentaprosessissa erilaisia tavoitteita.

Elementtimenetelmän soveltaminen osana monikappalesysteeminä mallinnettua rakennetta laajentaa simulointimahdollisuuksia huomattavasti. Elementtimenetelmällä voidaan esimerkiksi mallintaa joko kappaleen joustavuutta tai siinä siirtymien seurauksena vaikuttavia jännityksiä. Tämänkaltaiset mallinussovellukset ovat varsin yleisiä erityisesti kulku-neuvoja suunniteltaessa, missä usein on tarpeen mallintaa joustavana vain muutamia komponentteja muiden kappaleiden ollessa mallinnettu jäykkänä laskennan tehostamiseksi. Myös haastavampien ilmiöiden, kuten kappaleiden vapaiden siirtymien ja kiertymien, deformaatioiden sekä geometrisen ja materiaalsen epälineaarisuuden mallintaminen onnistuu periaatteessa suhteellisen helposti.

### 3.5 Moving frame-laskentamenetelmä

Monikappalesysteemien komponenttien mallintaminen joustavina kappaleina on mahdollista suorittaa usealla eri menetelmällä. Useassa tapauksessa kehitetyt menetelmät ovat esitelty varsin yksinkertaisin akateemisin esimerkein, jolloin niiden ymmärtäminen ja menetelmän testaaminen on helppoa. Menetelmien todellinen suorituskyky ja tehokkuus on kuitenkin mahdollista mitata vasta kun niillä mallinnetaan todellista, monimutkaista systeemiä ja verrataan mallinnuksesta saatuja tuloksia todelliselle prototyypille tehtyihin empiirisiin mittauksiin. Menetelmien toimivuudesta voidaan saada hyvä kuva vertailemalla liikkeessä olevan systeemin komponenteista numeerisesti ja empiirisesti saatuja rasi-  
tuloksia keskenään /8, s. 147...166/.

Mikäli tarkoituksena on selvittää kappaleessa vaikuttava jännitys jakauma, on kappale mallinnettava joustavana. Useimmissa tapauksissa koneenosia voidaan pitää niin jäykkinä, että liikkeen aikana tapahtuvat deformaatiot ovat vähäisiä ja tapahtuvat aina elastisesti, jolloin kelluvan koordinaatiston menetelmä on soveltamiskelpoinen. Näistä lähtökohdista ongelman ratkaiseminen voidaan suorittaa kuitenkin toisistaan poikkeavilla tavoilla. Mallinnuskoordinaattien valinta, dynaamiset liikeyhtälöt ja sovelletut numeeriset integrointi-  
menetelmät tuottavat painotukseltaan (tarkkuus, tehokkuus, yksinkertaisuus, soveltuvuus) hieman erilaisia ratkaisuja /8, s. 148/.

Tässä luvussa esitellään edellisen kappaleen alkuehto- ja muuttujien mukainen Moving frame-niminen laskentamenetelmä, jonka toimivuus ja ominaisuudet ovat testattu vertaamalla mallista saatuja laskentatuloksia todelliselle prototyyppiautolle tehtyihin empiirisiin mittauksiin. Saatujen tulosten perusteella Moving frame-menetelmää voidaan pitää tehokkaana, tarkkana ja soveltamiskelpoisena, myös verrattaessa laskentatuloksia yleisesti käytössä olevien kaupallisten dynamiikkaohjelmistojen antamiin tuloksiin /8, s. 148/. Tämä on erittäin tärkeä piirre erityisesti mallinnettaessa ja suunniteltaessa monimutkaisia systeemeitä.

Moving frame-menetelmään sisältyy systeemin mallinnusvaihe, dynaamisten yhtälöiden määrittämisen vaihe ja numeerinen integrointivaihe, joiden avulla ratkaistaan systeemin dynamiikka. Systeemin mallintaminen tapahtuu karteesisessä koordinaatistoon ja joustavina mallinnetaan ainoastaan oleelliset kappaleet muiden ollessa mallinnettu jäykkinä. Dynamiikkayhtälöinä käytetään Lagrangen kertoimilla ja ortogonalisoiduilla massamatriiseilla täydennettyjä dynamiikkayhtälöitä, jotka integroidaan implisiittisesti yksiaskel-  
trapetsoidisäännöllä /8, s. 149/.

Joustavuuden mallintaminen toteutetaan osarakennetekniikalla olettaen venymien tapahtuvan elastisesti. Joustavien kappaleiden liike suhteessa globaaliin koordinaatistoon mallinnetaan kelluvan koordinaatiston liikkeen superpositiolla. Kappaleiden deformaatiot määritellään staattisten ja dynaamisten moodien lineaarikombinaatioina. Staattiset moodit määritellään kappaleen nivelten koordinaattipisteiden perusteella ja dynaamiset moodit tekemällä tarkasteltaville kappaleille moodianalyysi /8, s. 149/.

Menetelmän laskentamethodiikka ja tarvittavat yhtälöt on kuvattu luvussa 2.5. Laskenta-prosessissa määritetään ensin systeemin kineettisen energian yhtälö, jonka perusteella määritetään tarkasteltavan kappaleen inertiaivoimat. Tämä prosessi tehdään jokaiselle systeemin kappaleelle erikseen. Kun jokainen kappale on erikseen mallinnettu, määritetään systeemin dynamiikka liikeyhtälöillä huomioimalla kappaleiden rajoitteet. Venymien laskentaan sovelletaan moodianalyysiä. Liikeyhtälöiden integroinnilla saadaan systeemiä kuvaavat yhtälöt niin nopeuksien kuin kiihtyvyyksienkin suhteen. Yhtälöistä 71 (s. 22) on tehtävä huomio, että laskenta voi muuttua epätarkaksi, mikäli valittujen aika-askelten koluokka on hyvin pieni, suuruusluokaltaan alle  $10^{-5}$  sekuntia /8, s. 154/. Tämä on kuitenkin niin pieni aika-askel, että useimpien simulointien suorittamiseen ja dynamiikan tarkasteluun ei tällä piirteellä ole vaikutusta.

Laskentamenetelmä mahdollistaa liikeyhtälöiden reunaehdoksi myös arvon nolla ( $\Phi = 0$ ). Kuitenkaan nopeuksien ja kiihtyvyyksien yhtälöryhmät eivät saa saada arvoikseen nollia ( $\dot{\Phi} = 0$  ja  $\ddot{\Phi} = 0$ ), sillä tuolloin yhtälöt eivät ole ratkaistavissa. Tämä haaste ratkaistaan massa-, vaimennus-, ja jäykkyyismatriisien ortogonaalisin projektioin nopeuksien ja kiihtyvyyksien suhteen. Näin projisoidulla matriisilla on sama tangenti kuin mikä on nähtävissä yhtälössä 71 (s. 22). Nopeuksien ja kiihtyvyyksien projektiot ovat triangularisoinnin ansiosta soveltamiskelpoisia /8, s. 154/.

Tämän laskentamenetelmän toimivuus on testattu La Coruñan yliopiston konetekniikan laitoksella, missä testaus on tapahtunut vertaamalla simulaatiomallilla laskettuja tuloksia prototyyppi-autolla suoritettuun koeajoon ja koeajon aikana ajoneuvon runkoon muodostuvien rasiusten mittaamiseen empiirisiin menetelmin /8, s. 147...166/. Testaustilanne, ajoneuvosta tehdyn mallin esittely ja testitulosten raportti on luettavissa kokonaisuudessaan lähteessä /8/. Kyseinen ajosuorite on luonteeltaan yksinkertainen, 15 sekuntia kestävä kokonaisuus johon kuuluu liikkeelle lähteminen, varsinainen ajosuorite ja pysähtyminen. Ajosuoritteen aikana ajetaan ajoneuvolla kerran kadun reunakivetystä muistuttavan esteen yli. Ajosuoritteen pituus on valittu vain 15 sekunnin mittaiseksi, jotta simulaation laskenta-aika ei kasvaisi kohtuuttoman suureksi.

Tuloksista voidaan päätellä mallin toimivan tarkasti ja johdonmukaisesti normaaleissa ajotilanteissa, joina voidaan pitää liikkeellelähtöä, ajoa tasaisesti, jarrutusta ja pysähtymistä. Mielenkiintoista on, että ajettaessa esteen yli ajoneuvon koriin muodostuu kiihdytyspiikkejä, joissa on havaittavissa selkeitä poikkeamia mallin ja todellisen kappaleen välillä. Osittain näiden eroavuuksien oletetaan johtuvan korirakenteen kiinnitysten ja ajoneuvon alustan nivelien välyksistä, joita ei ole tätä testiä varten tarkasti mallinnettu. Nämä välykset aiheuttavat koriin tärähdysvoimia, jolloin kiihtyvyydet voivat hetkellisesti olla hyvinkin suuria ja niiden suunnanvaihtelut hyvin nopeatempoisia. Osin kiihtyvyyksiä korissa voi aiheuttaa myös kuljettajan inhimillinen reagointi reunakivetyksen yli ajettaessa ja yksi kiihtyvyyksien lähde on todennäköisesti moottorin hitausvoimat ja niiden reagointi reunakivetyksen aiheuttamaan herätteeseen. Simulaatiomallissa kuljettaja ja moottori on mallinnettu vain massapisteinä.

Empiirisen testauksen ansiosta tehdään johtopäätös Moving frame-menetelmän tehokkuudesta ja tarkkuudesta laskettaessa dynaamisen systeemin rasituksia. Epätarkkuutta on havaittavissa ainoastaan suurien kiihtyvyyksiä kohdalla. Kiihtyvyyksien suuruusluokalla itsessään ei sinänsä ole merkitystä laskentatarkkuuteen, vaan nimenomaan kiihtyvyyksien nopeilla muutoksilla (derivaatoilla) ja mallin epätarkkuuksilla verrattuna todelliseen prototyyppiajoneuvoon. Tuolloinkaan laskentatarkkuus ei ideaalista rakennetta tarkasteltaessa periaatteessa kärsi, mutta käytännössä erilaiset tärähtelyvaikutukset, mitkä johtuvat esimerkiksi nivelten tai mahdollisten ruuviliitoksien todellisista välyksistä, joita ei ole mallinnettu tarkasti, tuovat malliin epätarkkuutta verrattuna todelliseen systeemiin. Joissain tilanteissa systeemistä ja sen tarkoituksesta riippuen tällä piirteellä voi olla merkitystä, minkä vuoksi tämä piirre on syytä huomioida menetelmää arvioitaessa.



### 3.6 Rasiusten määrittäminen osarakennetekniikalla

Osarakennetekniikalla voidaan laskea monikappalesysteemin joustavien kappaleiden jännityksiä ja venymiä /9, s. 633...643/, joiden perusteella voidaan määrittää myös kappaleen tai systeemin väsymiskestävyys. Osarakennetekniikka perustuu kappaleelle tai systeemille tehtävään moodianalyysiin ja se on soveltamiskelpoinen rakenteeltaan erityyppisiin systeemeihin. Tämän laskentamenetelmän matemaattinen tarkastelu on toteutettu luvussa 2.6.

Laskentamenetelmän tarkkuuden selvittämiseksi simulointimallin tuloksia verrataan todelliselle systeemille tehtäviin empiirisiin testeihin ja testisysteemiksi on valittu Fiat Punto henkilöauto. Valinnan tarkoituksena on antaa simuloinnin kannalta riittävän monimutkainen sovelluskohde, missä venymien mittaaminen empiirisesti kuitenkin onnistuu suhteellisen helposti kriittisiin paikkoihin huolellisesti sijoitetuilla venymäliuskoilla. Menetelmän testauksessa painotetaan soveltamiskykyä nimenomaan monimutkaisten systeemien tarkasteluun, minkä vuoksi liian yksinkertaisen akateemisen esimerkin valitseminen menetelmän testaukseen ei ole tarkoituksenmukaista.

Osarakennetekniikalla voidaan saavuttaa hyvä laskennallinen tarkkuus niin staattista kuin dynaamistakin systeemiä mallinnettaessa /9, s. 633...634/. Joustavan kappaleen liike, jolla on  $n$ -kappaletta vapausasteita ja  $s$ -kappaletta rajoitteita, kuvataan normaalimoodien ja staattisten korjausmoodien kombinaationa. Ensin ratkaistaan moodien muotojen lukumäärä ja määritetään liityntävapausasteet. Tämän jälkeen staattisten moodien muodot ratkaistaan yksittäisten liityntävapausasteiden siirtymien avulla olettaen muiden liityntävapausasteiden ollessa siirtymiltään vakioita.

Simuloinnin onnistumisen edellytyksenä on riittävän tarkan simulaatiomallin luominen tarkastelun alla olevasta systeemistä. Mallinnettavasta systeemistä ja tuloksien käyttötarkoituksesta riippuen tehdään tarkasteltaville kappaleille ja systeemin dynamiikkaan oleellisesti vaikuttaville komponenteille tai osakokonaisuuksille moodianalyysi. Suurimmaksi haasteeksi nousee yleensä mallin tarkkuusvaatimus, jonka valintaan vaikuttavat käytettävissä oleva laskentateho, tuloksilta vaadittu tarkkuus ja systeemin mallinnustarkkuus. Mallin ulkoisten rajoitteiden tarkka asettaminen on oleellista, mikä on sovelluksesta riippuen joko helpompi tai vaikeampi toteuttaa. Pahimmassa tapauksessa rajoitteita joudutaan rajusti approksimoimaan ja tässäkin tapauksessa mallin olisi vastattava todellista systeemiä niin staattisilta kuin dynaamisilta ominaisuuksiltaan mahdollisimman tarkasti. /9, s. 634/

Moodianalyysin osoittamien ominaisvärähtelytasojen perusteella valitaan tarkemman tarkastelun alle otettavat moodit. Staattiset korjausmoodit saadaan staattisesta analyysistä vapausasteiden suhteen, dynaamiset moodit määritetään sisällyttämällä analyysiin systeemin testausparametrit, reunaehdot ja muut ympäristötekijät. Mikäli näitä tekijöitä ei voida kunnolla määrittää, käytetään normaalimoodien menetelmää, minkä avulla simuloidaan joustavien kappaleiden käyttäytyminen staattisten korjausmoodien perusteella. Jännitykset ratkaistaan laskettujen siirtymien perusteella elementtimenetelmällä.

Menetelmän verifiointiseksi valitaan sekä simulaatiomallista että todellisesta ajoneuvon korista mittauspisteet, joissa vaikuttavat venymät määritellään sekä virtuaalisesti että venymäliuskein. Virtuaalimallissa venymän mittaus valituissa pisteissä tehdään virtuaalimallin globaalin koordinaatiston suhteen. Projisoitu venymä mittauspisteen solmun lokaalissa koordinaatistossa saadaan vertailukelpoiseksi globaalin koordinaatiston suhteen soveltamalla suuntakosinikulmia. Näiden kulmien avulla määritetään venymän suuntakulma myös empiiristen mittausten suhteen. Kun tämä kulma on kerran määritelty, voidaan todelliset venymät laskea yhtälöiden 110, 111, 112 ja 113 avulla /9, s. 642/.

$$\sigma_n = \sigma_x \alpha_x^2 + \sigma_y \alpha_y^2 + \tau_{xy} (\alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x) \quad (110)$$

$$\tau_{nm} = \sigma_x \alpha_x \beta_x + \sigma_y \alpha_y \beta_y + \tau_{xy} (\alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x) \quad (111)$$

Yhtälöissä 110 ja 111  $\alpha_x$  merkitsee  $\cos \phi_i$ :tä,  $\alpha_y$   $\sin \phi_i$ :tä,  $\beta_x$   $\sin \phi_i$ :tä ja  $\beta_y$   $-\cos \phi_i$ :tä jännitysvektorin  $\sigma$  ja leikkausvoimavektorin  $\tau$  suhteen. Täten voidaan lausua

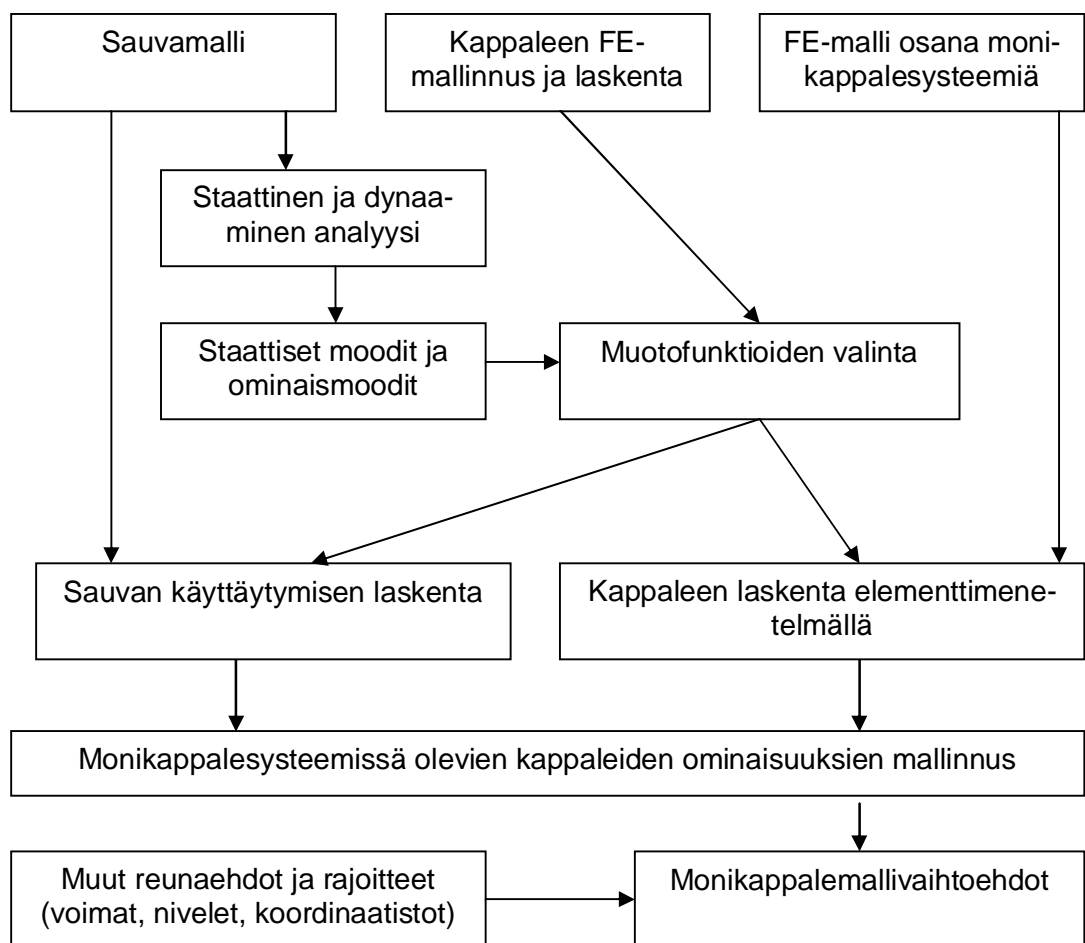
$$\sigma_{ni} = \sigma_x \cos^2 \phi_i + \sigma_y \sin^2 \phi_i + 2\tau_{xy} \sin \phi_i \cos \phi_i \quad (112)$$

$$\tau_{nmi} = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \phi_i \cos \phi_i + \tau_{xy} (\sin^2 \phi_i - \cos^2 \phi_i). \quad (113)$$

Mikäli venymäliuskan peittämällä mitattavalla alueella on elementtejä enemmän kuin yksi, voidaan solmupisteiden venymien yhteenlaskettu venymä ratkaista yhtälöistä. Verrattaessa virtuaalimallilla laskettuja tuloksia empiirisillä mittauksilla saatuihin tuloksiin, voidaan havaita tulosten vastaavan toisiaan hyvällä tarkkuudella. Tämä tarkkuus selittyy tarkasteltavan kappaleen Lagrangen kertoimien avulla laskettujen moodien superponoituessa komponentin venymiksi. Tämän piirteen ansiosta voidaan osarakennetekniikkaa soveltaa menestyksekkäästi myös sellaisten systeemien virtuaaliseen analysointiin, joiden empiirinen tarkastelu olisi haastavaa monimutkaisen rakenteen takia. Venymien ollessa tunnettuja ratkaistaan niitä vastaavat jännitykset elementtimenetelmällä.

### 3.7 Joustavien kappaleiden mallintaminen muotofunktioiden avulla

Kelluvan koordinaatiston menetelmällä /8, s. 361...380/ mallinnetaan monikappalesysteemin kappaleiden joustavuus jakamalla kappaleen liike referenssiliikkeeseen ja deformaatioihin referenssikoordinaatiston suhteen. Kappaleen referenssiasema määritetään kuudella ajasta riippuvalla muuttujalla. Olettamalla joustavien kappaleiden koostuvan elementeistä, voidaan deformaatiot mallintaa joko elementtiverkon solmupisteiden siirtymiä approksimoimalla tai hyödyntämällä modaalikoordinaatteja. Systeemin muuttujien vähentämiseksi on modaalimenetelmään perustuva lähestymistapa laskennallisesti huomattavasti tehokkaampi. Kyseinen menetelmä perustuu muotofunktioiden muodostamiseen. Nämä funktiot määrittävät joustavien kappaleiden deformaatioiden suuruudet, joiden perusteella lasketaan deformaatioita vastaavat jännitykset epäsuorasti elementtimenetelmällä. Deformaatioita joustaviin kappaleisiin aiheuttavat sisäiset voimat lasketaan energiaperiaatteella tai vaihtoehtoisesti quasi-comparison-funktioparvella /8, s. 364/. Tämä funktioparvi muodostetaan määrittämällä kappaleen tai systeemin ominaisarvofunktiot ja staattiset deformaatiomoodit. Kuvassa 4 on nähtävissä mallinnusprosessi kokonaisuutena ja muotofunktioiden valinnan sijainti osana laskentaprosessia.



Kuva 4: Joustavan kappaleen mallinnusprosessi

Muotofunktioiden avulla määritellyistä deformaatioista aiheutuvat jännitykset lasketaan elementtimenetelmällä. Epälineaaristen suurten kiertymien mallintaminen voi aiheuttaa kuitenkin haasteita laskentatehon rajallisuuden takia. Laskentatehon tarpeen vähentämiseksi käytetään erilaisia approksimointimenetelmiä. Esimerkiksi monikappale- ja elementtiformulaatiot voidaan yhdistää mahdollistamaan iteratiivinen laskentamenetelmä joustavan monikappaleanalyysin toteuttamiseksi. Joustavat kappaleet oletetaan tuolloin jäykistyneiksi niiden deformoituihin muotoihin, jolloin monikappaleyhtälöitä käytetään laskemaan systeemin kappaleiden liikkeitä ja niiden seurauksena muodostuvat inertia- ja rajoitevoimat. Näiden voimien perusteella kelluvaa referenssikoordinaatistoa ja elementtimenetelmää soveltamalla ratkaistaan kappaleen deformaatiot ja jännitykset. Laskentatehokkuutta voidaan edelleen lisätä käyttämällä referenssijännitysvaikutuskertoimia. Menetelmä mahdollistaa myös lähtöarvojen määrittämisen rakenteen väsymisanalyysiä varten sekä tarjoaa mahdollisuuden varmistaa, etteivät systeemissä vaikuttavat jännitykset käytön aikana kasva liian suuriksi rakenteen eri osissa.

Systeemin kappaleen liikeyhtälöt voidaan muodostaa monella eri tavalla, kuten määrittämällä systeemin dynamiikka differentiaaliyhtälöin rajoitevoimien ollessa eliminoituja tai käyttämällä Lagrangen liikeyhtälöitä, missä yleistettyjä rajoitevoimia kuvaavat Lagrangen kertoimet. Molemmissa tapauksissa kappaleen liikeyhtälöt mallinnetaan siten, että huomioidaan vaikuttavat ulkoiset sekä sisäiset voimat ja momentit, niin tunnetut kuin tuntemattomatkin.

Systeemin kappaleen liikkeen mallintamisella voidaan nähdä kahdenlaisia vaikutuksia riippuen käytetyistä laskentatavoista. Systeemin fyysistä käyttäytymistä kuvaavien yhtälöiden linearisoinnilla voidaan tehostaa huomattavasti laskentaprosessia olettamalla samalla ilmenevät deformaatiot vähäisiksi /8, s. 363/. Linearisointi mahdollistaa myös suurten referenssinopeuksien mallintamisen. Useissa tapauksissa tällä periaatteella suoritetulla laskennalla saavutetaan tuloksissa riittävä tarkkuus, joissain tapauksissa on kuitenkin mahdollista, että geometrinen jäykistymisilmiö on huomioitava laskennassa. Jos kiihtyvyydet ovat suuria, kappaleisiin kohdistuu suuria inertiaivoimia, jolloin niiden muotojen käyttäytyminen oletetaan lineaariseksi ainoastaan, mikäli kappaleiden materiaalin jäykkyys on riittävän suuri. Tämä toteutetaan sijoittamalla jäykkyysmatriisi yhtälöihin määrittämään deformatumista määrättyyn suuntaan, mikäli kappaleen jäykkyys on vähäinen. Tämän seurauksena inertiaivoimista aiheutuvat suuret ulkoiset ja luonteeltaan interaktiiviset voimat huomioidaan myös laskettaessa kappaleessa vaikuttavia rasituksia.

Linearisoinnin sijaan voidaan soveltaa myös Ritzin menetelmää, missä muotofunktioiden valinta kappaleen referenssikoordinaatiston suhteen on keskeisellä sijalla /8, s. 363/. Eri-laiset muotofunktiojoukot ja niiden referenssikoordinaatistot määrittävät kappaleissa ilme-nevät referenssiliike- ja deformaatioilmiöt. Yhden muotofunktion linearisoinnissa pyritään valitsemaan kappaleen koordinaatisto siten, että deformaatioita kuvaavat muuttujat saisi-vat mahdollisimman pieniä arvoja. Koordinaatisto voidaan valita tarpeen mukaan Buckens-, Gylden-, Tisserand-, tai Mean axle-koordinaatistoista /8, s. 363/. Läheskään aina sama valinta ei ole paras mahdollinen soveltuvaksi kaikkiin erityyppisiin tapauksiin.

Ritzin menetelmän soveltaminen edellyttää kappaleen deformaatioita mallintavien yhtälöi-den osittaisdifferentiaalista ratkaisemista muotofunktioparven ja geometrinen reunaeh-tojen suhteen. Tavoitteena on etsiä olosuhteet, jolloin muotofunktioparvi voidaan määrittää täydellisenä geometrinen reunaehtojen funktioparvena /8, s. 363/. Dynaamiset reunaeh-dot ylittävien ominaisfunktioiden soveltaminen Ritzin menetelmässä ei ole suositeltavaa eten-kään ratkaistaessa joustavan kappaleen sisäisiä voimia. Tuolloin asia voidaan rat-kaista tehokkaammin ja paremmin quasi-comparison-funktioparvella /8, s. 364/. Lineaari-kombinoimalla tämä funktioparvi voidaan sen avulla määrittää myös dynaamiset reunaeh-dot tyydyttävällä tarkkuudella, yksittäisten dynaamisten reunaehtojen määrittäminen itse-näisesti ei kuitenkaan ole mahdollista.

Ominaisfunktioita käytetään muotofunktioina laskettaessa deformaatioita tai sisäisiä voi-mia. Mikäli systeemiä tarkastellaan myös dynaamisten reunaehtojen vallitessa, laajenne-taan ominaisfunktioparvea käsittämään myös staattisten deformaatiomoodien funktiot, jolloin joukosta tulee quasi-comparison-funktioparvi. Tuolloin laskentatulosten tyydyttävä tarkkuus edellyttää ominaisfunktioiden yhtenevää differentiointia kappaleen kelluvan refe-renssikoordinaatiston suhteen /8, s. 364/. Kappaleen referenssikoordinaatiston määrittely on luonnollisesti oltava mahdollista, samoin ominaisfunktioit ovat oltava määriteltävissä referenssikoordinaatiston suhteen.

Linearisoinnilla voidaan deformaatioiden olettaa olevan niin pieniä kuin mahdollista edel-lyttäen, että linearisointi tehdään vapaan kappaleen referenssikoordinaatiston merkitsevän akselin suhteen. Verrattuna muiden kappaleiden referenssikoordinaatistoihin, tuetun ra-kenteen ominaisfunktioista riippuen tämä mahdollistaa linearisoitujen yhtälöiden soveltu-vuusalueen laajentamisen, minkä takia sitä usein käytetään yhdessä kelluvan koordinaa-tiston yhtälöiden kanssa /8, s. 364/.

Kappaleen joustavuus mallinnetaan elementtimenetelmällä sauva-, levy-, ja kuorimallein tai muilla jatkuvilla sisäisiä rajoitteita sisältävillä malleilla. Näistä elementeistä koostuvat kaikki systeemin tarkasteltavat kappaleet. Systeemin tai kappaleen dynamiikan mallinnus toteutetaan luvussa 2.7 määriteltyjen kinematiikka-, ja dynamiikkayhtälöiden avulla. Mallintamisessa tärkeään asemaan nousee koordinaatistojen valinta, mikä vain harvoin on yksiselitteinen kysymys. Jäykkien kappaleiden niveliin liitettyjä koordinaatistoja ei voida sellaisenaan soveltaa joustaviin kappaleisiin, vaan referenssikoordinaatistot solmupisteissä ja voimien vaikutuspisteissä määritellään systeemin tai kappaleen reunaehtojen perusteella. Näin määritellään kappaleen deformaatioiden nollakohta suhteessa valittuun koordinaatistoon.

Koordinaatiston valinnan vaikutuksesta muotofunktioihin ja niiden valinnan perusteella laskettujen deformaatioiden lopputuloksiin on löydettävissä esimerkki lähteestä /20, s. 381...399/. Koordinaatiston valinnasta aiheutuvat muutokset laskettuihin tuloksiin voidaan hyväksyä joko sellaisenaan, mikäli tarkkuusvaatimus ei ole erityisen suuri, tai vaihtoehtoisesti muutosten suuruutta voidaan approksimoida vertailemalla tuloksia esimerkiksi absoluuttisen solmukoordinaatiston suhteen tehdyin vertailuin. Mikäli tavoitteena on nimenomaan deformaatioiden tarkka määrittely, on edellä mainittuun seikkaan ilman muuta syytä kiinnittää tarkkaa huomiota.

Mikäli kappaleen dynaamiset reunaehdot ylitetään, ei sisäisten voimien ja momenttien määrittelyä voida tehdä tyydyttävällä tarkkuudella tätä menetelmää käyttäen. Tällainen tilanne voi tulla eteen, mikäli kappaleen referenssiliike tai deformatuminen on hyvin suurta tai mikäli kappaleessa vaikuttavat jännitykset ovat hyvin vähäisiä. Tuolloin laskenta on varmempi suorittaa elementtimenetelmällä systeemin dynamiikan ollessa laskettu joko monikappalesysteeminä tai vaihtoehtoisesti quasi-comparison-funktioparvella.

### 3.8 Soveltavia robottilaitteiden rasitusten analysointiesimerkkejä

Elektroniikkateollisuuden tuotantolinjojen automatisointi on vaativa prosessi johtuen tuotannon hienomekaanisesta luonteesta, minkä seurauksena robottien ja toimilaitteiden on toimittava tarkasti ja luotettavasti. Soveltaviksi esimerkeiksi on valittu LCD-näyttöjen tuotantolinjan laseja siirtävän robotin dynaamisten kuormitusten mallintaminen sekä kattokuljettimen pyörien ja korirakenteen väsymisanalysointiesimerkit /12, s. 722...730/ /21, s. 79...84/ /22, s. 721...730/. Erilaiset kattokuljettimet ovat nykyaikaisissa teollisuuslaitoksissa ja kokoonpanolinjoilla tärkeässä asemassa ja niillä kuljetetaan hyvin monenlaisia tuotteita tuotannon eri vaiheissa. Kattokuljettimien väsymiskestävyys on hyvin tärkeää, sillä ne kulkevat tyypillisesti sekä työntekijöiden että teollisuuskoneiden yläpuolella, jolloin väsymisvaurion seuraukset voivat pahimmassa tapauksessa olla kohtalokkaita.

#### 3.8.1 LCD-näyttöjen laseja siirtävän robotin analysointi

LCD-näyttöjen valmistus on elektroniikkateollisuuden nopeasti kasvava ala. LCD-näyttöjen fyysiset mitat ovat kasvaneet kuluneen vuosikymmenen aikana merkittävästi, minkä yhtenä seurauksena on kokoonpanolinjalla LCD-näyttöjen laseja siirtäviin roboteihin kohdistuneiden rasitusten kasvu.

Näiden robottien tarkoituksenmukainen toiminta edellyttää värähtelyjen, epämääräisten liikkeiden, väsymisilmiön, jännitysten ja voimakkaiden dynaamisten kuormitusten hallintaa. Suunnitteluprosessin aikana tarkastellaan simulointia apuna käyttäen robottilaitteen dynamiikkaa ja samalla pyritään havainnoimaan laitteiston ei-toivottuja siirtymiä ja poikkeamia, sekä värähtelystä seuraavia rakenteisiin kohdistuvia dynaamisia kuormituksia. Simulointi toteutetaan elementtimenetelmällä ja joustavan monikappaledynamiikkamallin avulla. Laskentaprosessi on nähtävissä luvussa 2.8 /12, s. 722...730/.

Vaikka kokoonpanorobottien tyypit vaihtelevatkin merkittävästi, yhtenäistä näille roboteille on kuitenkin konstruktion perustuminen runkoon, johon kiinnittyvät yleensä teleskooppitekniikkaa hyödyntävät käsivarret. Varsinainen tartunta työkappaleeseen, eli lasiin, suoritetaan tartuntakourin. Kourien valmistusmateriaalina ovat yleensä kevyet komposiitit, käsivarret ovat tyypillisesti valmistettu kevytmetalleista ja robotin runko teräksestä tai valuraudasta. Näyttöjen lasien siirtely edellyttää alle 10 millimetrin kokonaistarkkuutta robotilta, mihin sisältyy kaikkien mahdollisten haittatekijöiden huomioiminen ohjausjärjestelmästä komponenttien joustoon ja laakerivälkyisiin /12, s. 723/. Robotti toistaa elinkaarensa aikana työsykliään miljoonia kertoja, mikä asettaa rakenteiden väsymiskestävyydelle suuret vaatimukset. Robottien käsivarsien ja kourien toimintanopeus on tyypillisesti muutamia metrejä sekunnissa /12, s. 723/.

Staattisten ja dynaamisten kuormitusten seurauksena tapahtuvat kouran sormien deformaatiot ja teleskooppivarsiin kohdistuvat rasitukset lasketaan robottisysteemistä tehdyn joustavan monikappalemallin avulla. Materiaalissa tapahtuvien deformaatioiden oletetaan tapahtuvan elastisesti. Joustaville kappaleille tehdyn moodianalyysin perusteella laskettujen normaalimoodien ja staattisten korjausmoodien avulla voidaan määrittää kappaleissa vaikuttavat jännitykset. Nivelten käyttäytymisen mallintamiseksi hyödynnetään jousi- ja vaimenninvoimaelementtejä kinemaattisten nivelelementtien sijaan.

Deformaatioiden ollessa elastisia on komponenttien moodianalyysi tehokas lähestymistapa suurikokoisten monikappalesysteemien analysointiin. Mikäli moodien kuvaamat deformaatiot määritellään modaalikoordinaatein, voidaan suurenkin kokoluokan systeemi ratkaista tehokkaasti käyttämällä huolella valittuja pienen järjestysluvun moodeja. Värähtelyanalyysissä laskettuja moodeja hyödynnetään systeemin heikkojen kohtien etsimiseen. Analyttiset värähtelymoodit on laskettu dynaamisesta mallista ja niitä verrataan todelliselle systeemille tehtyihin empiirisiin testituloksiin mallin oikeellisuuden varmistamiseksi.

### *3.8.2 Kiskokuljettimen pyörien väsymisanalyysi*

Kiskoilla liikkuvia kattokuljettimia käytetään muun muassa ajoneuvo-, puolijohde-, ja LCD-näyttöjen kokoonpanolinjoilla kuljettamaan hyvin erityyppisiä tuotteita tehokkaasti tehdashallin eri puolilla sijaitseville työpisteille. Kuljettimen operointinopeuden ja tehokkuuden parantamiseksi kuljettimen omamassa on optimoitava mahdollisimman alhaiseksi. Kasvaneista nopeuksista ja kiihtyvyyksistä seuraa kuitenkin väsymisvaurioriskin huomattava kasvu. Kattokuljettimien kestävyys ja luotettavuus ovat tärkeä asia, sillä tämänkaltaiset kuljettimet liikkuvat työmiesten ja tehtaan laitteistojen yläpuolella, jolloin väsymisvaurion seuraukset voivat olla pahimmassa tapauksessa kohtalokkaita /21, s. 79...84/.

Väsymiskestävyuden virtuaalinen laskenta suoritetaan monikappaledynaamiikkaa ja elementtimenetelmää soveltamalla. Väsymiskestävyuden laskemiseksi kuljettimen dynaaminen kuormitushistoria on tunnettava mahdollisimman tarkasti. Tämän jännityshistorian avulla voidaan komponenttikohtaiset rasitukset laskea joko elementti-, tai kvasistaattisella menetelmällä tai osarakennetekniikalla /21, s. 80/.



Elementtimenetelmän ongelmana on kuitenkin kinemaattisten rajoitteiden hankala mallinnus ja prosessin raskas laskennallinen kuormitus. Osarakennetekniikalla komponenteissa vallitsevat jännitykset voidaan laskea suhteellisen tehokkaasti, mikäli rajoitutaan akselistojen kaltaisiin mekaanisiin systeemeihin. Se ei kuitenkaan sovellu dynaamisten kuormitusten laskentaan pyörien kaltaisille komponenteille, mitkä vaihtavat kosketuspintaansa kiskoja vasten jatkuvasti [21, s. 80]. Tämän vuoksi tässä tutkimuksessa päädytään käyttämään kvasistaattista menetelmää, minkä avulla määritetään pyöriin kohdistuva dynaaminen ja staattinen kuormitus. Dynaaminen kuormitus lasketaan mallintamalla pyörästä monikappalesysteeminä ja staattinen kuormitus elementtimenetelmällä. Väsymiskestävyys ratkaistaan pyörien empiirisesti määriteltyjen SN-käyrien ja pyöriin kohdistuvan kuormitusaikahistorian avulla.

Kuljettimen pyörät koostuvat uretaanipäälysteisestä alumiinista ja ne ovat jatkuvasti kontaktissa kiskoihin. Pyörästä koostuu neljästä vetopyörästä ja 18 ohjaavasta pyörästä. Kaikki pyörät ovat kytketty kuljettimen runkoon kiertonivelin. Kuljettimesta luodulla monikappalemallilla on 30 vapausastetta, ja pyörän ja kiskon kontakti kuvataan jatkuvalla vierintäkontaktilla. Dynaaminen kuormitus määritetään kontaktivoiman suuruudella eri koordinaattiakseleiden suuntiin. Simulaatiossa tarkastellaan vallitsevien voimien suuruusluokkaa kuljettimen liikkuessa suoraan, kaartaessa, kiihdyttäessä ja hidastaessa. Simulaatiomallin todenmukaisuus tarkastetaan vertaamalla tuloksia todelliselle kuljettimelle tehtävien empiiristen testien tuloksiin. [21, s. 80].

Pyörän ja kiskon välissä on kolmiulotteinen kontakti, jonka analysointi toteutetaan olettaen sen noudattavan Coulombin kitkan ominaisuuksia. Näihin ominaisuuksiin vaikuttavat pääasiassa luistokerroin sekä kuljettimen ja pyörän nopeudet. Sähkömoottorilta voimansa saavat vetopyörät tuottavat pinta-adheesiota kontaktipinnassa, jolloin muodostuu kuljetinta eteenpäin liikuttava, koriin nähden pitkittäissuuntainen voima. Tällä adheesiokitkavoimalla kiihdytetään ja hidastetaan kuljettimen liikkeitä, mutta vakionopeudella liikuttaessa adheesiokitkan suuruus lähestyy nollaa. Tuolloin vallitseva kitkavoima lasketaan dynaamisen ja staattisen kitkakertoimen avulla. Nämä kitkakertoimet ovat johdettavissa luistokertoimesta kumin ja teräksen välillä. Vallitseva pystysuuntainen voima voidaan laskea yhtälöstä 114 [21, s. 80]

$$\mathbf{F}_{normal} = \mathbf{K}\boldsymbol{\delta}^n + \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\delta}}, \quad (114)$$

missä  $\mathbf{K}$  kuvaa kontaktin jäykkyyttä,  $\mathbf{D}$  kontaktissa tapahtuvaa vaimenemista,  $\boldsymbol{\delta}$  siirtymiä ja  $n$  epälineaarisia ominaisuuksia.

Pyörien dynaaminen analyysi osoittaa sisemmän takapyörän tuottavan suurimman kontaktivoiman. Tämän johdosta kyseiselle pyörälle tehdään väsymisanalyysi. Pyörään kohdistuva kuormitus määritetään elementtimenetelmällä, minkä laskentaan tarvitaan kuormitusehdot ja materiaaliominaisuudet. Kuormitusehdot määritellään olettamalla pyörien seuraavan kiskoja ja pyörän materiaali on uretaanipäällysteistä alumiinia. Alumiinin materiaaliominaisuudet tunnetaan hyvin, mutta uretaanin ominaisuuksien määrittämiseksi on tehtävä lineaarisstaattinen analyysi. Reuna- ja kuormitusehdot analyysissä ovat samat kuin puristustestauksessakin. Kuormitusolosuhteet määritetään ylemmällä pinnalla alemmaa pintaa vasten olevien kelluvaan koordinaatistoon sidottujen solmujen suhteen. Tuloksena saadaan siirtymä-voimakäyrä, minkä perustella arvioidaan uretaanin materiaaliominaisuudet.

Materiaaliominaisuuksien ollessa selvitettyjä pyörän dynamiikka voidaan laskea joko elementtimenetelmällä tai monikappalesysteeminä. Pyörään kohdistuvan kuormituksen oletetaan suuntautuvan staattisessa kuormituksessa pyörän keskiön läpi suoraan alaspäin painovoiman vaikutuksesta. Analyysissä oletetaan kuormituksen olevan suurin mahdollinen. Saatujen tulosten oikeellisuus todetaan vertaamalla niitä todelliselle kuljettimelle lasermittalaitteella tehtyihin dynamiikkamittauksiin.

Kuljettimen ajoradan muodot ja ajovauhti määrittävät tarvittavien kestosyklien määrän väsymisen suhteen. Radan muodosta tiedetään, että kuljetin kääntyy 65 sekunnin välein. Vaadittavaksi kestoiksi valitaan 5 vuotta 70 % käyttösuhteella. Varmuuskertoimeksi valitaan 3, jolloin varmuuskerrottu elinaikasykli sisältää noin 5,1 miljoonaa käännöstä. /21, s. 80...81/

Väsymisanalyysiä varten määritetään dynaamiset kuormitusykliä rainflow-menetelmällä, materiaaliominaisuudet saadaan testauksien avulla muodostettujen SN-käyriä avulla ja vaurioiden kehittyminen oletetaan tapahtuvan lineaarisesti dynaamisen rasitusaikahistorian perusteella. Väsymislaskennan tuloksen tiedetään olevan Goodmanin ja Gerberin käyrien välillä pyörän ollessa keskimääräisen kuormituksen alla jatkuvasti. Jos rakenteesta halutaan konservatiivisempi, voidaan väsymiskestoikä määrittää Goodmanin käyrän avulla ( $2,94 \cdot 10^{13}$  kuormituskertaa). Varmuuskerrottu kestoikävaatimus on 5,1 miljoonaa työsykliä, joten järjestelmä voidaan todeta luotettavaksi ja kestäväksi väsymisen suhteen /21, s. 82/.

### 3.8.3 Kiskokuljettimen rungon väsymisanalyysi

Lähteessä /22, s. 721...730/ käsitellyssä tutkimuksessa perehdytään kattokuljettimen koriin kohdistuvan väsyttävän kuormituksen mallintamiseen sekä korin väsymiskestävyyden arviointiin. Tutkittava kattokuljetin on samanlainen, kuin luvussa 3.8.2 esitelty kuljetin. Simuloinnin aluksi luodaan korirakenteesta virtuaalinen malli, jolle suoritetaan dynaaminen analyysi rasitusten selvittämiseksi. Mallin avulla voidaan myös tarkastella erilaisia ajotilanteita erikseen ja niiden aiheuttamia rasituksia korirakenteeseen. Mallin luotettavuus varmistetaan todelliselle kuljettimelle venymäliuskein tehdyin empiirisin testein. Mikäli reunaehtojen määrittäminen osoittautuu vaikeaksi, voidaan mallinnus toteuttaa myös elementtimenetelmällä moodianalysoitavien komponenttien osalta.

Tämä tutkimus demonstroi havainnollisesti monikappalemallin joustavuusominaisuuksia. Moodianalyysiä käytetään deformatiivisista seuranneiden siirtymien etsimiseen tarkasteltavista kappaleista. Tämän jälkeen tehdään väsymisanalyysi huomioimalla korirakenteen materiaaliominaisuudet. Dynaamiseen analyysiin sisällytetään myös kuljettimen korirakenteen inertiaominaisuudet. Korirakenteeseen on kytketty kuljettimen kuudella nivelellä kaikki muut komponentit ja osakokonaisuudet, ja korirakenne joutuu välittämään voimaa näiden muiden komponenttien välillä kuljettimen normaalin käytön aikana. Dynaaminen analyysi tehdään erikseen sekä jäykälle että joustavalle korirakennemallille.

Kuljettimen dynaamiseen malliin sisällytetään kolme dynaamista ominaisuutta, jotka ovat vierintäkontakti vetopyörän ja kiskon välillä, vierintäkontakti vetämättömän pyörän ja kiskon välillä sekä korin dynamiikka. Pyörästöjä on kuljettimen edessä ja takana, ja kuljetinta liikuttava moottori sijaitsee etupyörästössä. Etupyörästössä on 10 pyörää ja takapyörästössä 12. Pyörissä on uretaaninen ulkokehä ja alumiininen keskiö /22, s. 723/.

Neljä pääpyörää kykenee kantamaan kuljettimen koko massan ja niiden jousitetun kitka-  
kontaktin avulla voidaan kuljetinta liikuttaa. Kontaktivoima pyörien ja kiskojen välillä mallinnetaan käyttämällä solid-solid-kontaktielementtiä. Vierintäkontaktin dynaamisessa mallissa ei käytetä hankalaa pyörä/kiskokontaktia, sillä päähuomio kiinnitetään vain kuljettimen vertikaaliseen liikkeeseen, jolloin vierintäkontakti voidaan yksinkertaistaa Herzeniläiseksi kontaktiksi. Pyörien kontaktiominaisuuksien määrittelemiseksi suoritetaan pyörälle puristustesti, jonka avulla selvitetään avainparametrit, eli kontaktin jäykkyys ja kontaktiyhtälön 114 (s. 58) /22, s. 723/ eksponentti. Puristustestin tulokset on luettavissa lähteestä /22/.

Korirakenteen mallin tarkkuuden määrittämiseksi tehdään monikappalemallille elementtianalyysi ja lasketaan elementtimallin tarkkuus selvittämällä todellisen korirakenteen ominaisvärähtelyt. Nämä selvitetään asentamalla koriin kiihtyvyyssanturi ja antamalla 25 eri pisteeseen vasaralla värähtelyherätteitä. Vertaamalla näitä tuloksia elementtianalyysillä saatuihin tuloksiin voidaan virhe havaita. Virheen todetaan olevan noin 1 %, joten mallia voidaan pitää luotettavana.

Joustavan korirakennemallin tarkkuus varmistetaan tekemällä todelliselle korirakenteelle venymäliuskein empiirisiä mittauksia ja vertaamalla näitä simulaatiomallista samoissa kuormitusolosuhteissa saatuihin tuloksiin. Venymäliuskatetaus toistetaan 10 kertaa ja vertailtaessa näitä tuloksia simulaatiomallin tuloksiin havaitaan tuloksien olevan likimain samoja [22]. Tuloksista havaitaan, etteivät deformaatiot muutu kovinkaan paljoa ajonopeuden suhteen. Nopeuden kasvaessa deformaatioiden keskinäinen hajonta sitä vastoin kasvaa jonkin verran. Lisäksi korirakenne pyrkii kiertymään pitkäakselinsa ympäri, mikä on havaittavissa etu- ja takaosassa olevien venymäliuskojen vastakkaisista etumerkeistä.

Elementtiverkon tiheydestä johtuvat vaikutukset mittaustuloksiin määritetään ensin kaksinkertaistamalla ja sitten nelinkertaistamalla elementtiverkon tiheys pitämällä samalla kaikki muut parametrit vakioina. Tulosten perusteella voidaan päätellä, ettei verkon tiheydestä seuraavia selkeitä muutoksia tuloksissa ole havaittavissa. Elementtimallia voidaan pitää luotettavana.

Modaalijännitysten rasiushistorian perusteella selvitetään dynaamisten kuormitusten historia, minkä perusteella lasketaan korin väsymiskestoikä. Modaalijännitysten rasiushistoria muodostetaan moodeista saatavan informaation perusteella komponenttien deformaatioita analysoitaessa ja dynaamisia kuormituksia laskettaessa. Nämä menetelmät ovat mahdollista suorittaa kaupallisilla monikappaledynamiikkaohjelmistoilla.

Moodianalyysissä käytetään kahdentyyppisiä moodeja, normaalimoodeja ja staattisia moodeja. Staattiset moodit voidaan jaotella liityntämoodeihin ja rajoitemoodeihin. Liityntämoodit määritellään komponentin aseman staattisella poikkeutuksella, mikä on seurausta yksikkövoimavektorin kohdistuessa yhteen systeemin koordinaattiin ilman, että muita voimia kohdistuu systeemin muihin koordinaatteihin. Rajoitemoodi määritellään staattisesti määrittämällä yksikön suuruinen siirtymä yhteen fyysiseen koordinaattiin ja nollasiirtymä muihin koordinaatteihin. Tässä tutkimuksessa lasketaan 20 normaalimoodia ja 36 rajoitemoodia. Ortonormalisoinnin seurauksena saadaan tulokseksi 56 ortonormalisoitua moodia.

Moodianalyysin ansiosta tiedetään, että korirakenteella moodien taajuudet ovat välillä 157...34665 hertsiä ja kaikki 56 moodia valitaan joustavien ominaisuuksien simulointia varten. Suurin modaalivaste havaitaan olevan moodeissa 7...10, mikä tarkoittaa, että tuolloin korin rasitukset ovat suurimmillaan. Väsymisvaurio siis tapahtuu todennäköisimmin näiden moodien osoittamissa olosuhteissa. Erityinen huomio tulee kiinnittää ensimmäiseen taivutusmoodiin, eli moodiin, jonka järjestysnumero on 8. Väsymiskestoikä voidaan määrittää Minerin lineaarivaurioteorian mukaan, kun tunnetaan toistosyklar lukumäärä. Vallitseva ekvivalentti jännitys selvitetään rasitushistorian perusteella rainflow-menetelmällä /16/.

Raideverkoston rakenteen perusteella todetaan kuljettimen toistavan työsykliään 1344 kertaa vuorokaudessa. Mikäli kuljetin on käytössä 5 vuotta 70 % käyttöasteella, sen kokonaistoiminta-aika varmuuskertoimella 3 voidaan laskea yhtälöllä 115 /22, s. 727/.

$$Elinikä = 1344 * 365d * 5a * 0,7 * 3 = 5150880 \text{ toistoa} \quad (115)$$

Lähteen /22/ tuloksista voidaan nähdä, että korirakenteen suurimmat rasitukset kohdistuvat aina samalle alueelle lähelle korin kiinnityspulttia. Nopeuden kasvaessa myös vaurioriski suurenee. Lisäksi tälle alueelle vaikuttaa myös jaksottainen merkitsevä puristusjännitys. Mikäli väsymiskestävyytuloksista halutaan konservatiivisempia, valitaan tarkastelukäyräksi Goodmanin käyrä. Tuolloin kuljettimen operointinopeuden ollessa 0,5 m/s saadaan väsymiskestävyyden tulokseksi 6,5 miljardia toistoa ja operointinopeudelle 0,8 m/s 89,1 miljoonaa toistoa. Nämä molemmat tulokset ovat huomattavasti suurempia kuin vaadittava, noin 5,2 miljoonan toiston elinikä. Tämän vuoksi korirakenteen voidaan todeta olevan väsymisen suhteen ikuinen.

## 4 PÄÄTELMÄT RASITUSTEN LASKENTAMENETELMIEN OMINAISUUKSISTA

### 4.1 Menetelmien ominaisuusmatriisi

Menetelmien keskeisimmät ominaisuudet ovat koottu matriisimuotoisesti taulukkoon 3 (s. 64), jotta menetelmien ominaisuuksien keskinäinen vertailu olisi helpompaa ja selkeämpää. Ominaisuusmatriisiin on valittu 5 vertailtavaa ominaisuutta. Ensimmäisessä vertailusarakkeessa on tarkasteltavan systeemin kokoluokka tai muu sovelluskohde, minkä ratkaisemiseen menetelmä parhaiten soveltuu. Vertailu tapahtuu ensisijaisesti systeemin kokoluokan perusteella, mutta esimerkiksi kitkarasitusmenetelmän kohdalla ei systeemin kokoluokkavertailu ole mielekästä, sillä kitkarasitukset vaikuttavat käytännössä vain kitka-kontaktiin yhteydessä oleviin kappaleisiin. Toisessa vertailusarakkeessa määritellään parhaiten soveltuvat työvaiheet, eli tarkastellaan kunkin menetelmän soveltuvuutta alkusuunnitteluun, olemassa olevien rakenteiden mallintamiseen ja tutkimiseen, suunnitteluprosessiin yleisesti, optimointiin tai johonkin muuhun erityiseen prosessiin. Kolmannessa vertailusarakkeessa tarkastellaan kunkin menetelmän vaatimaa laskentaurakkaa ja arvioidaan sitä sanallisesti lähtökohtana lähteissä /4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11/ annetut arviot menetelmien laskennallisesta tehokkuudesta. Neljännessä vertailusarakkeessa arvioidut kullakin menetelmällä laskettujen tulosten tarkkuudet ilmoitetaan vastaavaan tapaan sanallisesti perustuen samoissa lähteissä annettuihin tietoihin kunkin menetelmän laskentatarkkuudesta. Viidenteen vertailusarakkeeseen on koottu menetelmissä sovellettavat laskentaprosessit ja teorit, jotta menetelmien peruslähtökohdat olisivat havainnollisia ja menetelmien ominaisuuksien päättely sovellettavien metodien perusteella helpottuisi.

Koska taulukossa 3 esitettyyn ominaisuusmatriisiin on mahdotonta sisällyttää kaikkia oleellisia ominaisuuksia ja huomioita, mitä menetelmiä käsitellessä on niistä tullut ilmi, on lukuun 4.2 sisällytetty kustakin menetelmästä tehtyjä lisähuomioita luettelomuodossa. Yhdessä näiden luetteloiden ja ominaisuusmatriisin perusteella voidaan kunkin menetelmän keskeisistä ominaisuuksista ja luonteenpiirteistä tehdä yleisluontoinen katsaus.

Taulukko 3: Menetelmien ominaisuusmatriisi

Menetelmän nimi	Systeemin koluokka ja sovelluskohde	Soveltuva työvaihe	Laskentakuormitus	Tulosten tarkkuus	Hyödynnettävät menetelmät	Lisätietoa (luku)
ESL	Soveltuu suurille systeemeille	Optimointi ja kinemaattisten ominaisuuksien analysointi	Suhteellisen kevyt alirakenteiden ansiosta	Tyydyttävä	Moodianalyysi, värähtelyanalyysi, MBS	2.1 3.1
RBDO	Soveltuu suurille systeemeille	Komponenttien luotettavuusoptimointi	Suhteellisen kevyt laskennan fokuksittuessa optimoitavaan komponenttiin	Riippuu todennäköisyysjakaumasta, ESL-menetelmää tarkempi	Todennäköisyyslaskenta, MBS	2.2 3.2
Venymien rekonstruointi	Vain laskentateho rajoittaa	Olemassa olevien systeemien mallinnus ja tuotekehitys, perussuunnittelutyö rajoituksin	Moodianalysimenetelmällä tyydyttävä, differentiaaliyhälöin laskettaessa raskas	Jos malli on tarkka ja ulkoiset voimat tunnetaan hyvin, menetelmän tarkkuus on erinomainen	Moodianalyysi, differentiaaliyhälöryhmät, käänteinen FEM, CFD-laskenta	2.3 3.3
Kitkarasitusten mallinnus	Kitkapintojen vaikutuspiirissä olevat komponentit	Kitkan aiheuttamien jännitysten simulointi	Tyydyttävä	Riippuu paljon käytetystä kitkamallista ja valitusta lähestymistavasta kitkarasitusten laskennassa	Kelluva koordinaatisto, FEM, MBS, kitkamallit	2.4 3.4
Moving frame-menetelmä	Rakenteellisesti monimutkaisten systeemien ratkaiseminen	Systeemien mallintaminen ja suunnittelutyö	Laskennallisesti erittäin tehokas ja nopea	Hyvä, usein jopa erinomaisen	Moodianalyysi, MBS, integrointimenetelmät, FEM	2.5 3.5
Rasitusten osarakenteen tekninen laskenta	Periaatteessa vain laskentateho rajoittaa	Suunnittelutyö, luotettavuusanalyysit	Kohtalainen	Tarkka, tosin riippuu paljon lähtöarvoista	MBS, moodianalyysi, FEM	2.6 3.6
Jouston mallinnus muotofunktion	Keskisuuret ja suurehkot systeemit	Suunnittelutyö ja mallintaminen	Tyydyttävä, riippuu laskentametodin valinnasta	Riippuu paljon valitusta koordinaatistosta	MBS, kelluva koordinaatisto, FEM, muotofunktiot	2.7 3.7

## 4.2 Lisähuomioita menetelmien ominaisuuksista

### *ESL-menetelmä*

- suurtenkin systeemien ratkaisu helpohkoa ja suhteellisen kevyttä alirakenteisiin jakamisen ansiosta
- hyvä menetelmä olemassa olevien rakenteiden suunnitteluun ja parantamiseen, soveltuu kuitenkin huonosti alkusuunnitteluun
- dynaamisten kuormitusten transformaatio ekvivalenteiksi helpottaa simulointia huomattavasti, tosin laskentatarkkuus tämän seurauksena heikkenee
- varsinaisten jännitysten laskennassa ei tarvita aikariippuvaisia reunaehtoja ekvivalenttiperiaatteen ansiosta, systeemin dynamiikka on kuitenkin analysoitava aikariippuvaisesti
- useat sarjassa tehtävät analyysit (moodianalyysi, värähtelyanalyysi) ja systeemin alirakennejako heikentävät laskentatarkkuutta
- soveltuu huonosti osaksi systeemille tehtävää väsymisanalyysiä
- luonteeltaan kysymyksessä on optimointiprosessi, joten soveltuu hyvin optimointiongelmien ratkaisemiseen mutta soveltuvuus heikkenee hyvin nopeasti siirryttäessä tarkastelemaan muuntyyppisiä ratkaisua vaativia ongelmia



*RBDO-menetelmä*

- ESL-menetelmän tavoin soveltuu huonosti alkusuunnitteluun, parhaimmillaan ominaisuuksia optimoitaessa tuotekehitysprosesseissa, voidaan optimoida mitä tahansa komponentin fysikaalista ominaisuutta
- luotettavuusajattelu perustuu todennäköisyyslaskentaan ja sisältää aina virhetodennäköisyyden, tämän vuoksi soveltuu erinomaisesti massatuotantotuotteiden suunnitteluun missä epäonnistuneiden tuotteiden tilastollinen määrä on helposti määriteltävissä ja heikommin uniikkituotteiden suunnitteluun
- luotettavuutta kuvaavan funktion reunaehtojen määrittäminen ei ole yksiselitteinen kysymys
- menetelmän laskentatarkkuus ja luotettavuus riippuvat suuresti annettujen alkuarvojen laadusta, mallin tarkkuudesta ja sovelletuista tilastollisista menetelmistä
- menetelmällä voidaan laskea sopivat lähtöarvot komponentin väsymisanalyysiin
- menetelmässä sarjassa tehtävien analyysien suorittaminen heikentää jonkin verran optimaalista laskentatarkkuutta
- AMV-, CMV-menetelmien toimivuuden riippuvaisuus funktion muodosta

### *Venymien rekonstruointimenetelmä*

- menetelmä edellyttää ulkoisten voimien tarkan tuntemisen, mikä vaatii usein paljon mittauksia ja tarkan mallinnuksen rakenteesta
- menetelmän tarkkuus on erittäin riippuvainen lähtöarvojen laadusta
- ulkoiset rajoitteet mallinnetaan differentiaaliyhtälöryhmällä tai käänteisellä elementtimenetelmällä moodianalyttisesti, differentiaaliyhtälöryhmän ratkaiseminen vaatii yleensä erittäin raskasta laskentatehoa, moodianalysissä taas moodien valinta on harvoin yksiselitteistä
- mikäli ulkoisen voiman tai rajoitteen aiheuttaa fluidi (esimerkiksi ilman tai veden vastus/vaikutus), on sovellettava CFD-laskentaa ja menetelmän tarkkuus pahimmassa tapauksessa heikkenee merkittävästi
- jännitykset ratkaistaan venymien perusteella esimerkiksi elementtimenetelmällä, jolloin laskentatarkkuuteen vaikuttaa myös elementtimenetelmän ominaisuudet ja laskenta-asetukset
- mikäli systeemi linearisoidaan laskennan yksinkertaistamiseksi, syntyy väistämättä tuloksiin virhettä, epälineaarinen systeemi taas muuttaa monet muuttujista aikariippuvaisiksi ja systeemin raskaaksi laskea

*Kitkarasitusten mallinnusmenetelmä*

- menetelmä mahdollistaa kitkan aiheuttamien rasitusten mallintamisen koneenosissa yleisellä tasolla, ei ole tarkoitettu rasitusten yksityiskohtaiseen mallintamiseen, mikä vaatisi pintojen kontaktin tarkkaa mallintamista
- käytetyn kitkamallin valinta erilaisten vaihtoehtojen joukosta on harvoin yksiselitteistä, kitkamallin vaihtamisella on kuitenkin vaikutusta lopputuloksiin
- laskentamalli ei sisällä kitkapintojen välillä mahdollisesti vaikuttavan voiteluaineen vaikutuksen huomioimista
- jännitykset voidaan ratkaista useilla vaihtoehtoisilla menetelmillä (voimiin perustuva, osarakennetekniikka, deformaatioihin perustuva jännitysten määrittely), joilla on vaikutusta osin ratkaisevastikin lopputulokseen
- differentiaalis-algebraalyyhtälöiden integrointitarkkuus vaikuttaa paljon lopputulosten laatuun
- linearisointi (sekä materiaallinen että geometrinen) yksinkertaistaa laskentaa aiheuttaen tuloksiin jonkin verran epätarkkuutta, myös epälineaarinen laskenta on mahdollista (mutta laskennallisesti huomattavasti raskaampaa)

### *Moving frame-menetelmä*

- menetelmä on laskennallisesti tehokas ja tarkkoja tuloksia antava metodi, joka soveltuu myös monimutkaisten systeemien ratkaisemiseen
- menetelmä ei vaadi yksityiskohtaista systeemin ympäristön tuntemista, mikä helpottaa mallin tekemistä, nopeuttaa laskentaa ja poistaa virhelähteitä
- kappaleissa tapahtuvat siirtymät oletetaan aina tapahtuvan elastisesti, mikä on huomioitava, jos jännitysten suuruusluokka kappaleissa on lähellä materiaalin myötölujuutta
- menetelmän vaiheet ovat systeemin mallintaminen, dynamiikkayhtälöiden määrittely ja numeerinen integrointi (jonka jälkeen jännitykset voidaan ratkaista elementtimenetelmällä), kaikkien näiden vaiheiden on onnistuttava moitteettomasti tulosten tarkkuuden takaamiseksi
- ei sovellu erittäin pienten aika-askelten laskentaan (alle 0,00001 sekuntia), kuitenkin yleensä näin pieniä aika-askeleita ei ole tarvetta simuloida

*Osarakennetekniikkaan perustuva rasiusten laskentamenetelmä*

- soveltuu käytettäväksi periaatteessa missä tahansa suunnittelutyön vaiheessa
- lähtöarvojen laadusta riippuen periaatteessa tarkka menetelmä niin jännitysten kuin venymienkin laskemiseksi, soveltuu monimutkaisten systeemien mallintamisessa
- soveltuu väsymisanalyysin lähtöarvojen laskentaan
- soveltuu kohdekomponentin tai kappaleen luotettavuusanalyysiin
- menetelmä vaatii onnistuakseen tarkkaa mallia simuloitavasta systeemistä, mikä voi joissain tapauksissa olla vaikea toteuttaa, mikäli mallinnettava systeemi on hyvin monimutkainen
- vaikuttavien ulkoisten voimien ominaisuudet on tunnettava tarkasti, mikäli tavoitellaan tarkkoja laskentatuloksia
- menetelmän toimivuus on riippuvainen ympäristön reunaehtojen tarkasta asettamisesta

*Joustavien kappaleiden mallintaminen muotofunktioiden avulla*

- menetelmä perustuu kelluvan koordinaatiston soveltamiseen ja mahdollistaa myös elementtimenetelmän liittämisen laskentaan, jolloin soveltamismahdollisuuksia on paljon
- deformaatiot ja sisäisten voimien yksityiskohtainen mallintaminen on mahdollista, lisäksi myös suuria systeemejä voidaan laskea tyydyttävällä laskentateholla
- muotofunktioiden valinta vaikuttaa lopputuloksiin ja mikäli niiden laskenta tapahtuu solmumenetelmän avulla, muuttuu laskenta raskaaksi (toisaalta tulokset ovat tarkkoja ja yksityiskohtaisia)
- quasi-comparison-laskentaa käyttämällä joudutaan tuloksien tarkkuudesta tinkimään, mutta toisaalta laskentaprosessi kevenee (ominaisfunktioiden ja staattisten deformaatiomoodien vertailu)
- systeemiä linearisoitaessa oletetaan deformaatiot pieniksi, jolloin epätarkkuutta syntyy tulosten suhteen
- eri koordinaatistojen (Buckens, chord, tangent) valintakysymys aiheuttaa tuloksiin mahdollisesti merkittävässäkin määrin poikkeamia
- linearisoidussa systeemissä kappaleiden geometrinen jäykistymisilmiö on mahdollisesti huomioitava, erityisesti mikäli systeemissä esiintyvät kiihtyvyydet ja inertiaivoimat ovat suuria

### 4.3 Menetelmien jatkokehitysmahdollisuudet

Seitsemän rasi- tusten laskentamenetelmää, jotka tässä työssä on esitelty, ovat keskenään vertailtaessa luonteeltaan erilaisia ja hyödyntävät erilaisia metodeja vallitsevien rasi- tusten määrittämiseksi. Pohdittaessa menetelmien soveltamiskykyä ja kehitystarpeita on aluksi todettava, että tämä tutkimus on suoritettu täysin kirjallisuusselvityksenä eikä menetelmiä ole käytännössä testattu osana tätä diplomityöprojektia. Mikäli siis menetelmien keskinäisiä ominaisuuksia haluttaisiin verrata tarkemmin, olisi aluksi syytä testata jokainen menetelmä ainakin laskentatehokkuuden, tulosten tarkkuuden ja soveltamiskelpoisuuden suhteen, minkä jälkeen näiden testien perusteella voitaisiin tehdä tarkempia ja todenmukaisempia päätelmiä edellä mainituista ominaisuuksista. Tuolloin myös menetelmien jatkokehittelyä voitaisiin pohtia huomattavasti vakavammin ja määrätietoisemmin.

ESL-menetelmän mielenkiintoisin piirre on dynaamisten kuormitusten määrittäminen ekvivalentteina staattisina kuormituksina, jolloin systeemien laskentatehokkuus paranee huomattavasti. Menetelmän selkeänä ongelmana on kuitenkin sekä itsenäisten sarjassa tehtävien analyysien tarve että erityisesti väsymisanalyyseissä vaadittava kappaleiden rasi- tus- ja jännityshistorian tarkka tuntemus. Nämä molemmat piirteet heikentävät selvästi laskentatulosten tarkkuutta. Mikäli menetelmää halutaan kehittää, olisi syytä kiinnittää huomiota joko ekvivalenttien rasi- tusten muodostamisen kehittämiseen tai vaihtoehtoisesti kehittää tapa, millä ekvivalentit staattiset kuormitukset voidaan sitoa aikaan tehokkaammin esimerkiksi jännitysvaihteluiden suhteen. Ongelmana kuitenkin on staattisuuden lähtökohta, sillä mikäli iterointiväli staattisilla kuormituksilla on erittäin lyhyt, voidaan hyvin kysyä, olisiko systeemi kuitenkin parempi mallintaa dynaamisena.

Todennäköisyyslaskentaan ja tilastotieteeseen perustuva RBDO-menetelmä voidaan nähdä lupaavana lähestymistapana erityisesti luotettavuusanalyysejä tehtäessä ja väsymisvaurioiden riskejä arvioitaessa. Monet ilmiöt ovat luonteeltaan sellaisia, että niiden mallintaminen vaihe vaiheelta olisi erittäin paljon laskentatehoa vaativa prosessi. Tällaisia ovat esimerkiksi ajoneuvon akselistoon kohdistuvat rasi- tukset käyttöiän aikana tai meren aaltojen aiheuttama rasi- tus sataman laiturirakenteisiin. Esimerkkejä voidaan vastaavista tilanteista keksiä vaikka kuinka paljon lisää. Tämänkaltaiset rasi- tukset voidaan katsoa myös tilastollisiksi ilmiöiksi, sillä hyvällä syyllä voidaan olettaa merkittävien, pitkäkestoisten tilastopoikkeamien olevan ainakin edellä mainituissa esimerkeissä harvinainen ilmiö. Lisäksi erityisesti massatuotannossa tuotettujen tuotteiden laatutaso vaihtelee aina jonkin verran, mikä tekee periaatteessa myös tuotteiden suunnittelusta ja lujuusmäärittelystä osittain tilastollisten ilmiön. Tämän vuoksi kestävyuden luotettavuusarviointimenetelmiä olisi ehdottomasti syytä edelleen kehittää.

Venymien rekonstruointimenetelmä mahdollistaa deformaatioiden määrittämisen kolmea eri lähestymistapaa noudattaen, mikä tekee siitä soveltamiskelpoisen useisiin eri soveluksiin. Menetelmän selkeänä ongelmana on kuitenkin mallinnuksen tarkkuusvaatimus niin ulkoisten voimien kuin komponenttien mittasuhteidenkin osalta erityisesti, mikäli malli tehdään käyttämällä differentiaaliyhtälöitä. Menetelmän luonnetta ajatellen on vaikeaa keksiä, miten tästä tarkkuusvaatimuksesta voisi päästä eroon, tai miten esimerkiksi ulkoisten kuormitusten vaikutusta voisi approksimoida tilanteissa, missä niiden määrittäminen riittävän tarkasti on haastavaa ilman turvautumista moodianalyyysiin. Toisaalta, moodianalyyssiovellusta tästä menetelmästä voidaan pitää toimivana ja riittävän tarkkana. Venymien rekonstruointimenetelmien kehittäminen on kuitenkin tärkeää, sillä venymien perusteella voidaan rakenteissa vaikuttavat jännitykset määrittää huomattavasti tarkemmin, kuin mikäli jännityksiä laskettaisiin suoraan vaikuttavien voimien perusteella.

Kitkarasitusten laskentamenetelmä on muihin tässä työssä esiteltyihin menetelmiin verrattuna sikäli erityyppinen, että siinä määritellään rasituksen aiheuttaja nimenomaan kitkaksi. Kahden tai useamman kappaleen kitkakontaktien ja niiden seurauksena kappaleisiin kohdistuvan rasituksen mallintaminen on tällä menetelmällä toteutettu varsin yksinkertaisesti. Kitkakontakti voi kuitenkin olla varsin hankalasti mallinnettava, etenkin käytettäessä voiteluainetta tai mikäli hankaavat kappaleet ovat erikoisempaa materiaalia, kuten esimerkiksi kumia. Toisaalta tätä menetelmää tarkastellessa on syytä huomioida, että siinä on tarkoituksellisesti keskitytty nimenomaan yksinkertaisempien kitkakontaktien mallintamiseen.

Moving frame-menetelmä on ainakin lähteessä /8/ esiintyvän esimerkin perusteella erittäin soveltamiskelpoinen ja laskennallisesti tehokas myös monimutkaisten systeemien dynamiikan ratkaisemiseen. Tämän menetelmän erityisenä ansiona voidaan pitää sitä, ettei tarkasteltavan systeemin ympäristön ominaisuuksien tarkkaa tuntemista edellytetä. Menetelmän kehittämistarpeita ovat kuitenkin ainakin erilaisten tärähdysvaikutusten tarkempi simulointi, mikä todetaan lähteessä /8/. Monissa tilanteissa ei näillä ole käytännön vaikutusta, mutta mikäli tarkoituksena on simuloida systeemejä mahdollisimman tarkasti, olisi tämäkin ilmiö syytä huomioida nykyistä paremmin.



Osarakennetekniikkaan perustuva jännitysten laskentamenetelmän heikkoutena voidaan pitää mallin tarkkuusvaatimusta ja ympäristön reunaehtojen tarkkaa määrittelyä. Viimeisenä esitelty joustavien kappaleiden mallintamismenetelmä taas perustuu muotofunktioiden määrittämiseen, mikä määrittää hyvin pitkälle kyseisen menetelmän ominaisuudet. Nämä menetelmät, niin kuin eivät itse asiassa mitkään muutkaan esiteltävistä menetelmistä, mahdollista materiaalin plastisten muodonmuutosten tarkastelua. Mikäli systeemejä on tarkoitus käyttää normaaliolosuhteissa, ei plastisia muodonmuutoksia ole tietenkään tarkoitus tapahtua, mutta mikäli plastisten muodonmuutosten tarkastelu olisi mahdollista, voitaisiin esimerkiksi erikoistilanteita simuloida täysin eri volyyymillä. Toisaalta, plastisten muodonmuutosten tarkasteleminen on luonteeltaan varsin erilainen prosessi, minkä johdosta siihen sovelletut menetelmät ovat monessa mielessä asia erikseen. On vaikeaa arvioida, onko niiden yhdistäminen tarkoituksenmukaista lainkaan, mutta toisaalta mitä monikäyttöisemmäksi menetelmä voidaan tehdä, sitä soveltamiskelpoisempi se on erityyppisiin systeemeihin ja erilaisiin olosuhteisiin.

## 5 YHTEENVETO

Tässä diplomityössä käsiteltiin rasiusten laskentamenetelmiä, jotka olivat sovelluskelpoisia käytettäväksi joustavan monikappalesysteemin ja sen komponenttien mallintamiseen ja optimointiin. Menetelmät olivat erillisiä, uusimmista tiedejulkaisuista referoituja metodeja, joista kaksi ensimmäistä (ESL ja RBDO) olivat luonteeltaan optimointimenetelmiä. Näiden lisäksi käsiteltiin rasituksista aiheutuvien venymien rekonstruointitekniikka, kitkan vaikutuksesta kappaleisiin kohdistuvien sisäisten rasiusten laskentaprosessi sekä kelluvan koordinaatiston kaltainen ”moving frame”-laskentatekniikka. Kaksi viimeistä käsiteltyä menetelmää mallinsivat rasituksia joustavissa kappaleissa sekä osarakennetekniikkaa soveltamalla että muotofunktioiden avulla. Lisäksi tarkastelun alle otettiin myös muutamia luonteeltaan soveltavampia esimerkkejä tehdasroboille tehdyistä rasituksia simuloivista tutkimustöistä.

Menetelmien ominaisuuksien käsittely toteutettiin kolmessa luonteeltaan erityyppisessä luvussa. Toisessa luvussa käsiteltiin menetelmien laskentaprosessit yksityiskohtaisesti tarvittavine yhtälöineen. Kolmannessa luvussa paneuduttiin menetelmien sisältöön sanallisesti ja neljännessä luvussa koottiin yhteen menetelmien keskeisiä piirteitä niiden keskinäisen vertailun helpottamiseksi. Tähän käsittelyyn kolmijakoon päädyttiin käytännön syistä, jotta oleellisen tiedon löytäminen menetelmien ominaisuuksista helpottuisi.

ESL-optimointimenetelmässä systeemin dynaamiset kuormitukset transformoitiin ekvivalenteiksi staattisiksi kuormituksiksi, minkä avulla säästettiin huomattavasti mallinnuksessa tarvittavaa laskentatehoa. ESL-menetelmän katsottiin myös soveltuvan suurtenkin systeemien laskentaan, parhaimmillaan menetelmän ominaisuudet tulivat kuitenkin esiin optimoitaessa jotain systeemin komponentin fyysistä ominaisuutta. Laskentatarkkuudeltaan ESL-menetelmän katsottiin saavuttavan tyydyttävän tason, sillä tarkkuus kärsi jonkin verran sarjassa tehtävistä itsenäisistä analyyseistä, jotka sisältyivät tähän laskentaprosessiin.

Toinen optimointimenetelmistä oli systeemin toiminnan ja kestävyuden luotettavuuden analysoinnin näkökulmasta optimointia lähestyvä RBDO-menetelmä. Tässä menetelmässä sovellettiin todennäköisyyslaskentaa vaurioiden mahdolliselle esiintymiselle tuotteen oletetun elinkaaren aikana ja laskettiin tämän perusteella systeemin kohdekappaleille optimaaliset fyysiset mitat tai materiaaliarvot. Menetelmän tarkkuuden todettiin riippuvan paljon käytetyistä tiheysfunktioista, rajoitefunktioon vaikuttavista muuttujista ja käytettävissä olevien alkuarvojen laadusta, mutta parhaimmillaan menetelmää voitiin pitää tarkkana ja luotettavana suunnittelutyökaluna. Menetelmä mahdollisti hyvin myös lähtöarvojen laskennan väsymisanalyysiä varten.

Venymien rekonstruointimenetelmässä tarkasteltiin systeemissä tapahtuvia kappaleiden deformaatioita, joiden perusteella voitiin laskea kappaleissa vaikuttava jännitys jakauma. Laskentaprosessi voitiin suorittaa joko muodostamalla differentiaaliyhtälöryhmä systeemin dynaamisista ominaisuuksista, tai mikäli laskentatehokkuutta haluttiin parantaa, voitiin komponentteja tarkastella moodianalyysin avulla. Menetelmän tarkkuuden katsottiin olevan erittäin riippuvainen systeemin mallin tarkkuudesta ja erityisesti ulkoisten voimien tarkasta tuntemisesta, minkä seurauksena esimerkiksi fluidien aiheuttamien usein luonteeltaan epämääräisten ulkoisten kuormitusten seurauksena tapahtuvien venymien rekonstruointiin tämä menetelmä ei ollut paras mahdollinen.

Komponenttien keskinäisestä kontaktista aiheutuvan kitkavoimien mallintaminen voitiin suorittaa tähän tarkoitukseen soveltuvalla laskentamenetelmällä. Kitkavoimien laskentamenetelmä oli sikäli luonteeltaan erilainen muihin tässä työssä esiteltyihin menetelmiin verrattuna, että ainoastaan tämä huomioi suoraan kontaktista aiheutuvia jännityksiä kontaktin vaikutuspiirissä oleviin kappaleisiin. Tämän laskentamenetelmän tarkkuus riippui paljon valitusta kitkamallista, minkä valinta ei ollut yksiselitteinen kysymys ja minkä vaikutusta laskennan lopputuloksiin ei voitu kiistää. Menetelmä ei myöskään huomioinut mahdollisten voiteluaineiden vaikutusta kitkapintojen välissä eikä kitkapintojen lämpiämisestä aiheutuneita mahdollisia muutoksia materiaaliominaisuuksissa. Menetelmän soveltaminen oli siis syytä rajata kitkakontaktitilanteisiin, jotka olivat hetkellisiä ja harvemmin toistuvia.

Moving frame-menetelmä katsottiin laskennallisesti erittäin tehokkaaksi ja tuloksien tarkkuuden suhteen erinomaiseksi laskentamenetelmäksi, joka soveltui erinomaisesti myös rakenteeltaan monimutkaisten systeemien simulointiin. Laskentaprosessi koostui kolmesta vaiheesta, simulaatiomallin luomisesta, dynamiikkayhtälöiden asettamisesta ja niiden numeerisesta integroinnista, joiden kaikkien oli onnistuttava moitteettomasti, jotta laskentaprosessi voitiin katsoa onnistuneeksi. Menetelmän toteuttaminen ei välttämättä vaatinut systeemin ympäristön ominaisuuksien tarkkaa tuntemista, mikä vähensi huomattavasti simuloinnissa aiheutuvien virheiden todennäköisyyttä ja helpotti mallin luomista. Menetelmä ei soveltunut erittäin pienten aika-askelten laskentaan, mutta asian suhteen saatettiin todeta, että useissa tapauksissa näin pienten aika-askelten tarkasteluun ei ollut tarvetta simuloitaessa tyypillisiä koneteknisiä systeemejä.

Osarakenneteknisen rasiusten laskentamenetelmän katsottiin soveltuvan suunnittelutyökaluksi kaikissa suunnitteluprosessin vaiheissa. Tätä menetelmää voitiin pitää laskennallisesti tarkkana menetelmänä, mikäli lähtöarvot olivat laadultaan riittävän hyviä. Tämä koski erityisesti systeemiin vaikuttavien ulkoisten voimien ominaisuuksien tuntemista, joiden riittävän tarkka määrittäminen saattoi joissain tapauksissa osoittautua haastavaksi. Menetelmällä laskettavat systeemit saattoivat olla myös rakenteeltaan monimutkaisia, mikä laajensi menetelmän soveltamismahdollisuuksia huomattavasti. Menetelmä soveltui hyvin myös lähtöarvojen laskentaan systeemin komponenttien väsymisanalysointia varten.

Joustavien kappaleiden mallintamismenetelmä muotofunktioiden avulla mahdollisti kappaleiden sisäisten rasiusten ja deformaatioiden yksityiskohtaisen mallintamisen hyödyntämällä muotofunktioita. Menetelmä katsottiin soveltamiskelpoiseksi suunnitteluprosessin eri vaiheisiin ja se soveltui keskisuurien ja suurehkojen systeemien ratkaisemiseen. Hyvin suurten systeemien kohdalla ongelmaksi muodostui lähinnä tietokoneiden laskentatehon rajallisuus. Menetelmällä saatujen lopputuloksien tarkkuus vaihteli jonkin verran riippuen siitä, saavutettiinkö tulokset muotofunktioiden vai quasi-comparison-funktioparven avulla. Jälkimmäisessä lähestymistavassa tulosten tarkkuus heikkeni jonkin verran, mutta toisaalta laskentaprosessi tehostui huomattavasti. Myös eri koordinaatistotyyppien valinnalla oli vaikutusta lopputulosten tarkkuuteen tapauksesta riippuen myös merkittävällä tavalla. Menetelmä katsottiin ominaisuuksiltaan kuitenkin hyväksi yleismenetelmäksi joustavien kappaleiden systeemin dynaamisten ominaisuuksien mallintamisessa.

Lisäksi esiteltiin myös kolme soveltavaa esimerkkiä teollisuuskoneiden tarkastelemisesta simulaatiomallien avulla. Näiden mallien perusteella laskettiin laitteistoissa vaikuttavat jännitykset ja niiden aiheuttama väsymiskuormitus, jonka perusteella analysoitiin systeemin kestoikää ja luotettavuutta. Simulointiprosessin soveltaminen katsottiin kaikissa tapauksissa onnistuneeksi menetelmäksi systeemien ominaisuuksien tarkastelemiseksi ja mallien luotettavuus tarkistettiin empiirisiin testeihin. Simuloimalla saadut tulokset osoittivat systeemien kestävyys tason olevan erinomaisella tasolla verrattuna vaadittuihin kestoikiin.

Neljännessä luvussa esiteltiin rasiusten laskentamenetelmien ominaisuudet tiivistetysti ominaisuusmatriisina ja luettelona, jotta oleellisten ominaisuuksien havainnointi ja menetelmien keskinäinen vertailu helpottuisi. Vertaileminen toteutettiin menetelmien perusominaisuuksien suhteen. Näitä perusominaisuuksia olivat menetelmän soveltuvuus eri kokoluokan systeemien simulointiin, parhaiten soveltuva työvaihe, laskentatehon tarve, laskentatulosten tarkkuus ja menetelmän hyödyntämät laskentamenetelmät. Menetelmien erityispiirteet määritettiin ominaisuusmatriisiin ulkopuolella menetelmäkohtaisesti tiivistettynä luettelona. Lisäksi pohdittiin menetelmien jatkokehitysmahdollisuuksia.

## LÄHDELUETTELO

- [1] Lappeenrannan teknillinen yliopisto: LUT Metallin internet-sivusto. [Viitattu 15.10.2010]. Saatavilla <http://www.lut.fi/fi/technology/lutmechanical/research/machinedesign>
- [2] Lautala, P.: Teollisuusautomaation vuosikymmeniltä, osa 3. Suomen automaatioseura ry: Saarijärven Offset Oy, 2009.
- [3] Shabana, A.: Dynamics of Multibody Systems. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. 369 p.
- [4] Hong, E.P., You, B.J., Kim, C.H., Park, G.J. 2009. Optimization of Flexible Components of Multibody Systems via Equivalent Static Loads. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. **40**(1-6), pp. 549-562.
- [5] Grujicic, M., Arakere, G., Bell, W.C., Marvi, H., Yalavarthy, H.V., Pandurangan, B., Haque, I., Fadel, G.M. 2010. Reliability-Based Design Optimization for Durability of Ground Vehicle Suspension System Components. *Journal of Materials Engineering and Performance*, vol. **19**(3), pp. 301-313.
- [6] Chierichetti, M., McColl, C., Palmer, D., Ruzzene, M., Bauchau, O. 2010. Combined Analytical and Experimental Approaches to Rotor Components Stress Predictions. 1st Joint International Conference on Multibody System Dynamics (IMSD), May 25-27, Lappeenranta, Finland.
- [7] Arczewski, K., Fraczek, J. 2005. Friction Models and Stress Recovery Methods in Vehicle Dynamics Modelling. *Multibody System Dynamics*, vol. **14**(3-4), pp. 205-224.
- [8] Cuadrado, J., Gutiérrez, R., Naya, M.A., González, M. 2004. Experimental Validation of a Flexible MBS Dynamic Formulation through Comparison between Measured and Calculated Stresses on a Prototype Car. *Multibody System Dynamics*, vol. **11**(2), pp. 147-166.
- [9] Bracessi, C., Cianetti, F. 2005. A Procedure for the Virtual Evaluation of the Stress State of Mechanical Systems and Components for the Automotive Industry: Development and Experimental Validation. *Professional Engineering Publishing*, vol. **219**(D5), pp. 633-643.
- [10] Craig, R. and Bampton, M., 1968. Coupling of Substructures for Dynamic Analyses. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, vol. **6**(7), pp. 1313-1319.
- [11] Schwertassek, R., Wallrapp, O., Shabana, A.A. 1999. Flexible Multibody Simulation and Choice of Shape Functions. *Nonlinear Dynamics*, vol. **20**(4), pp. 361-380.
- [12] Seo, J.H., Yim, H.J., Hwang, J.C., Choi, Y.W., Kim, D.I. 2008. Dynamic Load Analysis and Design Methodology of LCD transfer Robot. *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. **22**(4), pp. 722-730.
- [13] Haug, E. Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems. Boston: Allyn and Bacon, 1989.

- [14] Haug, E.: Intermediate Dynamics. New Jersey: Prentice-Hall, 1992.
- [15] Metropolis, N. and Ulam, S. 1949. The Monte Carlo Method. *Journal of the American Statistical Association*, vol. **44**(247), pp. 335-341.
- [16] Matsuishi, M. and Endo, T. 1968. Fatigue of Metals Subjected to Varying Stress – Fatigue Lives under Random Loading, Proceedings of Kyushu District Meeting of JSME, pp. 37-40.
- [17] Manson, S. 1965. Fatigue: A Complex Subject – Some Simple Approximations, *Experimental Mechanics*, vol. **5**(7), pp. 193-226.
- [18] Anderson, J.: Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications. New York: McGraw-Hill, 1995.
- [19] Haug, E., Wu, S. and Yang, S., 1986. Dynamics of Mechanical Systems with Coulomb Friction, Static Friction, Impact and Constraint Addition, Deletion. Part I, II and III. *Mechanism and Machine Theory*, vol. **21**(5), pp. 401-425.
- [20] Schwertassek, R., Dombrowski, S.V., Wallrapp, O. 1999. Modal Representation of Stress in Flexible Multibody Simulation. *Nonlinear Dynamics*, vol. **20**(4), pp. 381-399.
- [21] Lee, S.H., Park, T.W., Park, J.K., Yoon, J.W., Jun, K.J., Jung, S.P. 2009. A Fatigue Life Analysis of Wheels on Guideway Vehicle Multibody Dynamics. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, vol. **10**(5), pp. 79-84.
- [22] Yoon, J.W., Jung, S.P., Park, T.W., Park, J.K. 2010. Fatigue Analysis of the Main Frame of Over Head Transportation Vehicles Using Flexible Multibody Dynamics. *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. **24**(3), pp. 721-730.

