



## **TIIVISTELMÄ**

Lappeenrannan teknillinen yliopisto  
Teknillinen tiedekunta  
Konetekniikan koulutusohjelma

Timo Rynänen

### **Soodakattiloiden ilmakanavien hyödyntäminen jäykistävänä rakenteena**

Diplomityö

2012

96 sivua, 71 kuvaa, 3 taulukkoa ja 8 liitettä

Tarkastajat: Professori Timo Björk  
DI Timo Lipponen

Hakusanat: lommahdus, stabiliteetti, levyrakenne, elementtimenetelmä, ilmakanava  
Keywords: plate buckling, stability, plated structure, finite element method, air duct

Työssä tutkittiin soodakattiloiden ilmakanavien hyödyntämistä jäykistävänä rakenteena. Työssä käsiteltiin yksittäisiä jäykistämättömiä ja jäykistettyjä levykenttiä ja niiden lommahduskestävyyttä Eurokoodi standardin mukaisesti ja elementtimenetelmän avulla. Lisäksi käsiteltiin lommahduksen teoriaa ja levykenttien käyttäytymistä yleisellä tasolla erilaisilla kuormituksilla ja reunaehdoilla.

Työn tavoitteena oli selvittää kuinka lommahdus tutkitaan Eurokoodin mukaisesti ja elementtimenetelmää hyödyntäen, kun levykentän kuormituksena on poikittainen kuormitus tason suuntaisen kuormituksen lisäksi. Työssä tutkittiin kahden eri elementtimenetelmään pohjautuvan ratkaisuvaihtoehdon käyttöä lommahduslaskennassa.

Työssä kehitettiin Eurokoodin sovellettu yhteisvaikutuskaavan käyttö lineaarisen ominaisarvotehtävän ratkaisun lisänä, jossa otetaan huomioon painekuorman vaikutus levykentän lommahduksessa. Kehitettyä menetelmää sovellettiin ilmakanavan esimerkkirakenteen mitoituksessa.

## **ABSTRACT**

Lappeenranta University of Technology  
Faculty of Technology  
Department of Mechanical Engineering

Timo Ryyänen

### **Exploitation of recovery boiler air ducts as stiffening structure**

Master's thesis

2012

96 pages, 71 figures, 3 tables, 8 appendices

Examiners: Professor Timo Björk  
M.Sc. Timo Lipponen

Keywords: plate buckling, stability, plated structure, finite element method, air duct

Exploitation of recovery boiler air ducts as stiffening structure was handled in this thesis. Single stiffened and unstiffened plates and plate buckling was handled in this thesis according to Eurocode standard and using finite element method. Also theory of plate buckling and basic behavior of plate panel with different loadings and boundary conditions was examined.

The aim of this thesis was to investigate how to examine plate buckling according to Eurocode and using finite element method when also transverse loading is acting in addition to in-plane loading. Two different kinds of solution methods based on finite element method were examined to use in plate buckling analysis.

Using applied interaction equation according to Eurocode with linear eigenvalue solution method was developed. This interaction method takes into account the effect of pressure load in plate buckling analysis. The developed method was applied in case study of dimensioning air duct.

## SISÄLLYS

1	JOHDANTO .....	8
2	ILMAKANAVAT .....	10
2.1	Primääri -ilmajärjestelmä.....	12
2.2	Sekundääri -ilmajärjestelmä .....	12
2.3	Tertiääri -ilmajärjestelmä.....	13
3	LOMMAHDUS LEVYRAKENTEESSA .....	14
3.1	Mittasuhteiden ja reunaehtojen vaikutus .....	15
3.2	Levyn tason suuntainen kuormitus .....	16
3.3	Taivuttava kuormitus .....	16
3.4	Lommahduksen aaltomuodot.....	18
3.5	Epätäydellisyyksien vaikutus ja ylikriittinen kestävyys .....	21
4	LEVYKENTTIEN TOIMINTA.....	23
4.1	Levyn tason suuntainen kuormitus .....	23
4.1.1	Jäykistämättömät levykentät .....	23
4.1.2	Jäykistetyt levykentät.....	24
4.1.3	Eurokoodi 3.....	26
4.2	Levyä taivuttava kuormitus .....	30
4.2.1	Jäykistämättömät levykentät.....	30
4.2.2	Jäykistetyt levykentät.....	33
4.2.3	Eurokoodi 3.....	33
4.3	Puristettu ja taivutettu levykenttä .....	35
4.3.1	Laattateoria .....	35
4.3.2	Eurokoodi 3.....	38
5	ELEMENTTIMENETELMÄ LOMMAHDUSTARKASTELUSSA .....	41
5.1	Lineaarinen stabiiliusanalyysi .....	41
5.2	Epälineaarinen ratkaisu.....	44
5.2.1	Geometristen epätäydellisyyksien vaikutus .....	46
5.2.2	Painekuorman vaikutus.....	51
6	ILMAKANAVAN LASKENTA .....	55
6.1	Ilmakanavan rakenne .....	55
6.2	Kuormitukset .....	56

6.3	Rakenteen elementtimalli .....	57
6.4	Rakenteen kestävyys.....	58
6.4.1	Ylipaine.....	58
6.4.2	Alipaine.....	60
6.4.3	Lommahduslaskenta ylipaineella.....	62
6.4.4	Lommahduslaskenta alipaineella.....	65
6.5	Kevennetyn rakenteen kestävyys.....	67
6.5.1	Ylipaine.....	68
6.5.2	Alipaine.....	70
6.5.3	Lommahduslaskenta ylipaineella.....	72
6.5.4	Lommahduslaskenta alipaineella.....	74
7	JOHTOPÄÄTÖKSET.....	77
8	YHTEENVETO .....	79
	LÄHDELUETTELO.....	81

#### LIITTEET

LIITE 1: Levyn lommahduskestävyys

LIITE 2: Kriittinen lommahduskuorma

LIITE 3: Jäykistetyn levykentän lommahduskestävyys

LIITE 4: Eurokoodin sovellettu yhteisvaikutuskaava

LIITE 5: Lommahduslaskenta ylipaineella

LIITE 6: Lommahduslaskenta alipaineella

LIITE 7: Lommahduslaskenta ylipaineella

LIITE 8: Lommahduslaskenta alipaineella

## SYMBOLI- JA LYHENNELUETTELO

$a$	levyn pituus
$a_{mn}$	taipuman amplitudit
$\alpha_{cr}$	kimmoisen stabiliteetin kuormakerroin
$\alpha_p$	kalibrointikerroin
$\alpha_{ult,k}$	myötökerroin
$A_{c,eff,loc}$	tehollinen pinta-ala
$A_{sl,eff}$	kaikkien puristetulla levykentän alueella sijaitsevien pituus- suuntaisten jäykisteiden tehollisten pinta-alojen summa
$b$	levyn leveys
$b_{c,loc}$	yksittäisen osakentän puristetun alueen leveys
$b_{edge,eff}$	reuna-alueen tehollinen leveys
$\gamma_{xy}$	liukukulma
$\Delta M_y$	painopisteakselin siirtymisestä aiheutuva momentti y- suunnassa
$\Delta M_z$	painopisteakselin siirtymisestä aiheutuva momentti z- suunnassa
$E$	kimmomoduuli
$\varepsilon_x$	keskipinnan venymä x-suunnassa
$\varepsilon_y$	keskipinnan venymä y-suunnassa
$f_y$	aineen myötöraja
$\bar{\lambda}_p$	suhteellinen hoikkuus
$\bar{\lambda}_{p0}$	kalibrointikerroin
$\lambda$	kuormituskerroin
$k_{yy}$	yhteisvaikutustekijä
$k_{yz}$	yhteisvaikutustekijä
$k_{zy}$	yhteisvaikutustekijä
$k_{zz}$	yhteisvaikutustekijä
$[K_t]$	globaali jäykkyysmatriisi
$[K_g]$	geometrinen jäykkyysmatriisi
$k_{ta}$	tangentiaalijäykkyys
$k_\sigma$	lommahduskerroin
$\nu$	suppeumaluku
$m$	puoliaaltojen lukumäärä pituussuunnassa
$M_{y,Ed}$	maksimimomentin mitoitusarvo y-suunnassa
$M_{z,Ed}$	maksimimomentin mitoitusarvo z-suunnassa

$M_p$	plastinen momentti pituusyksikköä kohti saranassa
$N_x$	pituusyksikköä kohti vaikuttava kuorma x-suunnassa
$N_y$	pituusyksikköä kohti vaikuttava kuorma y-suunnassa
$N_{xy}$	pituusyksikköä kohti vaikuttava kuorma xy-suunnassa
$N_{Ed}$	puristuskuorman mitoitusarvo
$P_0$	potentiaalienergia levyn suorassa alkutilassa
$P_1$	potentiaalienergia bifurkaatiokohtaa vastaavassa tilassa
$\rho$	pienennystekijä
$\rho_{loc}$	yksittäisen osakentän pienennystekijä
$p$	levykentässä vaikuttava painekuorma
$q$	poikittainen jatkuva kuormitus
$q_p$	kantokuorma
$\sigma_{cr,p}$	ideaalisen levyn teoreettinen lommahdusjännitys
$\sigma_p$	levyn puristusjännitys
$t$	levyn paksuus
$\mathfrak{S}()$	defferentiaaliosoitin
$\Phi$	jännitysfunktio
$\varphi_j$	kulmanmuutos plastisessa saranassa j
$w$	taipuma
$W_u$	ulkoinen työ
$W_s$	sisäinen työ
$\chi_y$	taivutusnurjahduksen pienennystekijä y-suunnassa
$\chi_z$	taivutusnurjahduksen pienennystekijä z-suunnassa
$\chi_{LT}$	kiepahduksen pienennystekijä
$\psi$	levykentän kuormitussuhde

## 1 JOHDANTO

Andritz – konserni on yksi maailman johtavista sellu- ja paperiteollisuuden, vesivoimateollisuuden, terästeollisuuden ja muun erikoisteollisuuden asiakaslähtöisten teknologioitten, tuotantojärjestelmien ja palvelujen toimittaja. Konsernin pääkonttori sijaitsee Itävallan Grazissa. Andritzin henkilöstön määrä on maailmanlaajuisesti noin 13 000. Konserni valmistaa ja myy tuotteitaan ja palveluitaan maailmanlaajuisesti.

Tässä diplomityössä tutkitaan soodakattiloiden ilmakehien hyödyntämistä jäykistävänä rakenteena kattilan tulipesälle. Ilmakehien hyödyntäminen jäykistävänä rakenteena on kohdeyritykselle uusi ja tuntematon kehitettävä käytötapa. Ilmakehien käyttäminen jäykistävänä rakenteena mahdollistaa paremman tilankäytön, koska tällöin ilmakehien alueella ei tarvita erillisiä kattilaa jäykistäviä kehyspalkkeja.

Käytettäessä ilmakehää jäykistävänä rakenteena, kasvaa samalla niiden vaatimukset lujuuden suhteen. Ilmakehän kuormitustyyppi muuttuu ja sen täytyy toimia painekuormitetun rakenteen lisäksi taivutuskuormitetun palkin tavoin. Ilmakehien kaltaisissa ohutlevyrakenteissa rakenteen riittävän lujuuden lisäksi vaaditaan rakenteen riittävää stabiiliutta. Ohutlevyrakenteissa yksi merkittävä ilmiö stabiliteetin kannalta on levykentän lommahdus.

Eurokoodi standardit on laadittu rakenteiden suunnittelun avuksi ja niiden avulla voidaan tutkia rakenteen lommahduskestävyyttä. Eurokoodissa ei kuitenkaan ole selkeää ohjetta kuinka lasketaan lommahduskestävyys ilmakehän kaltaiselle rakenteelle, jota kuormittaa poikittaisen painekuorman lisäksi levyn tason suuntainen puristuskuorma. Kyseiselle kuormitusyhdistelmälle annetaan ainoastaan käytettäväksi yleinen menetelmä, jota voidaan soveltaa varmistettaessa rakenteen lommahduskestävyyttä.

Työn tavoitteena on selvittää kuinka lommahdus tutkitaan Eurokoodin mukaisesti ja elementtimenetelmää hyödyntäen. Lisäksi työn tavoitteena on kehittää laskennan apuvä-

lineeksi menetelmä, jolla voidaan varmistaa lommahdukestävyys painekuorman vaikuttaessa. Menetelmän tulisi olla käytännöllinen ja nopea käyttää.

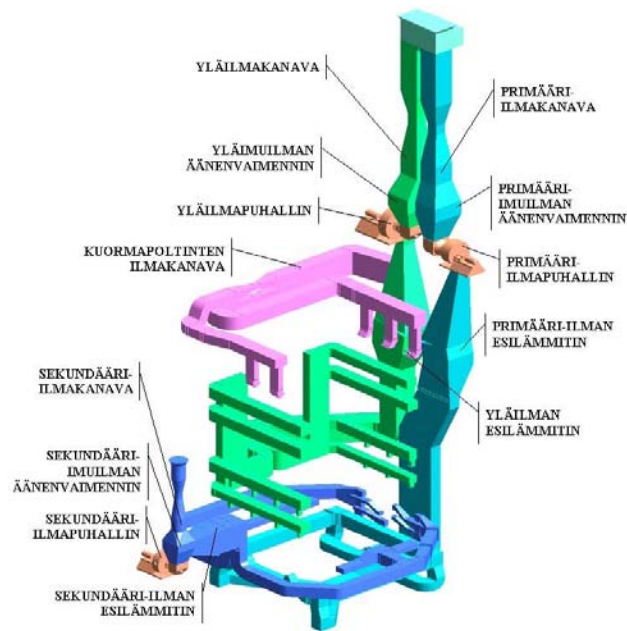
Työssä esitellään ensimmäiseksi ilmakehien toimintaa, jonka jälkeen käsitellään lommahduksen teoriaa ja levykenttien käyttäytymistä yleisesti. Jäykistämättömien ja jäykistettyjen levykenttien tason suuntaisten ja tasoa vastaan kohtisuorien kuormien vaikutusta käsitellään sekä teoreettisesti että Eurokoodin mukaisesti. Näiden lisäksi esitellään elementtimenetelmän eri ratkaisuvaihtoehtoja lommahdulaskennassa, sekä tutkitaan yksittäisten jäykistämättömien ja jäykistettyjen levykenttien lommahdusta elementtimenetelmää ja Eurokoodia hyödyntäen. Lopuksi sovelletaan lommahdulaskentaan kehitettyä laskentamenetelmää ilmakehien esimerkkirakenteeseen.

## 2 ILMAKANAVAT

Ilmakanavien avulla kuljetetaan palamisprosessissa tarvittava ilmamäärä kattilaan. Kattilaan syötetään samalla polttoainetta, joka reagoi palamisilmassa olevan hapen kanssa. Polttoaine ja palamisilma on saatava polttolaitteessa tehokkaaseen kosketukseen toistensa kanssa, jotta polttoaine palaisi ja seos saataisiin syttymään. Polttoaineen pitää palaa mahdollisimman täydellisesti siten, että ilmaylimäärä jää mahdollisimman vähäiseksi eli palamisen hyötysuhteen tulee olla hyvä. /1./

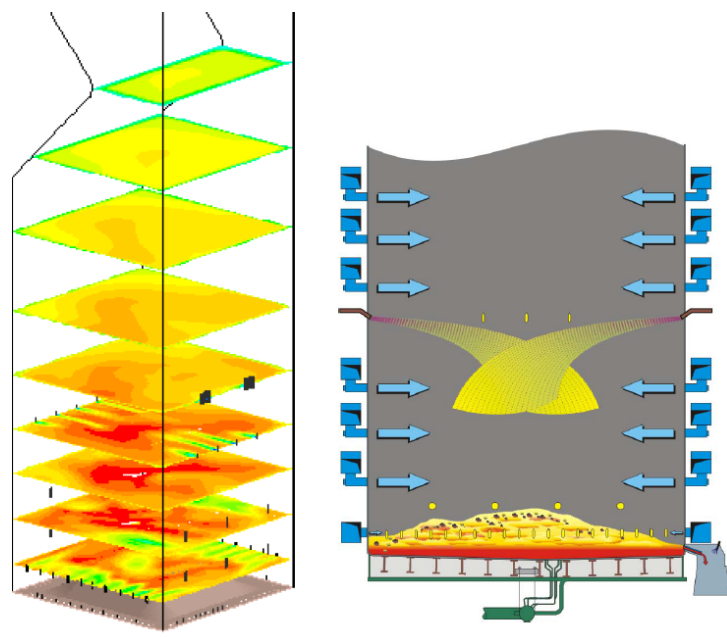
Tyypillinen painealue ilmakanavissa on -5-20 kPa, eli paine voi olla yli- tai alipainetta. Kanavien koko voi olla metristä useampaan metriin halkaisijoiltaan. Ilmakanavien poikkileikkaukset ovat yleensä suorakaidepoikkileikkauksisia, mutta myös muuttuva-poikkileikkauksisia ilmakanavia käytetään ilmavirran säädön vuoksi. Kanavat koostuvat levykentistä, jotka on jaettu pienempiin osiin käyttämällä poikittaisia jäykisteitä. Ilmakanavien kuormituksena paineen lisäksi vaikuttaa myös lämpötila, joka johtuu palamisessa vapautuvasta lämmöstä. Lämpö siirtyy tulipesän seinämässä olevaan jäähdyttävään höyrystinputkistoon ja sitä kautta muihin kattilan osiin.

Erilaisten polttoaineiden palamisominaisuuksien mukaan on kehitetty erilaisia polttolaitteita. Prosessiteollisuudessa käytetään soodakattiloita sulfaattisellun keitossa syntyvän mustalipeän polttoon ja keittokemikaalien talteenottoon sekä regenerointiin. Soodakattiloissa palamisilma johdetaan tulipesään primääri- sekundääri- ja tertiääri-ilmajärjestelmien avulla. /1./ Kuvassa 1 esitetään soodakattilan ilmajärjestelmän periaatekuva.



Kuva 1. Ilmajärjestelmä /2/.

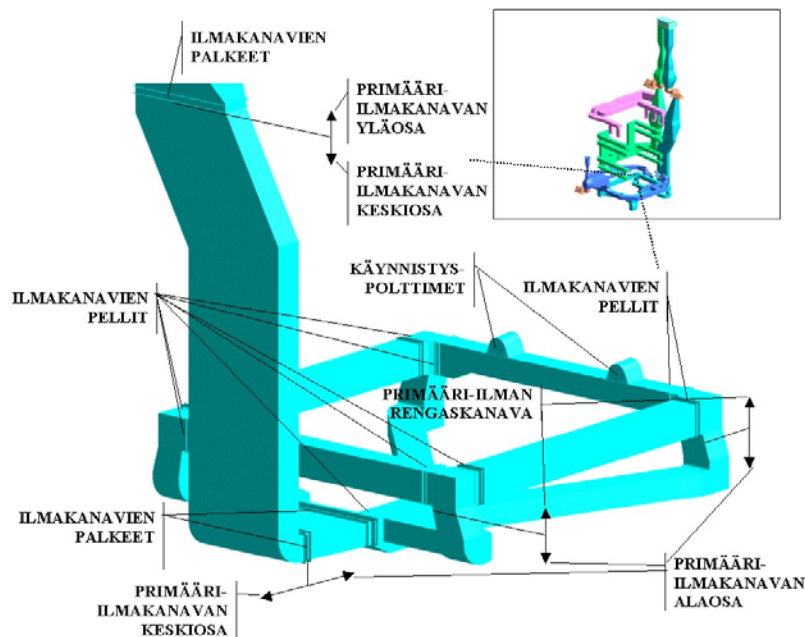
Vertikaalisessa ilmajärjestelmässä on päällekkäisiä tasoja, joita havainnollistetaan kuvassa 2. Tyypillisesti soodakattiloiden vertikaali-ilmajärjestelmässä on yksi primääritaso, jossa ilma-aukot sijaitsevat kaikilla seinillä. Sekundääritasoja on tyypillisesti 2-3, joissa ilma-aukot sijaitsevat etu- ja takaseinällä. Lisäksi ilmajärjestelmässä on 1-3 tertiääritasoa, joissa myös ilma-aukot etu- ja takaseinällä. /2./



Kuva 2. Vertikaali-ilmajärjestelmä /2/.

## 2.1 Primääri -ilmajärjestelmä

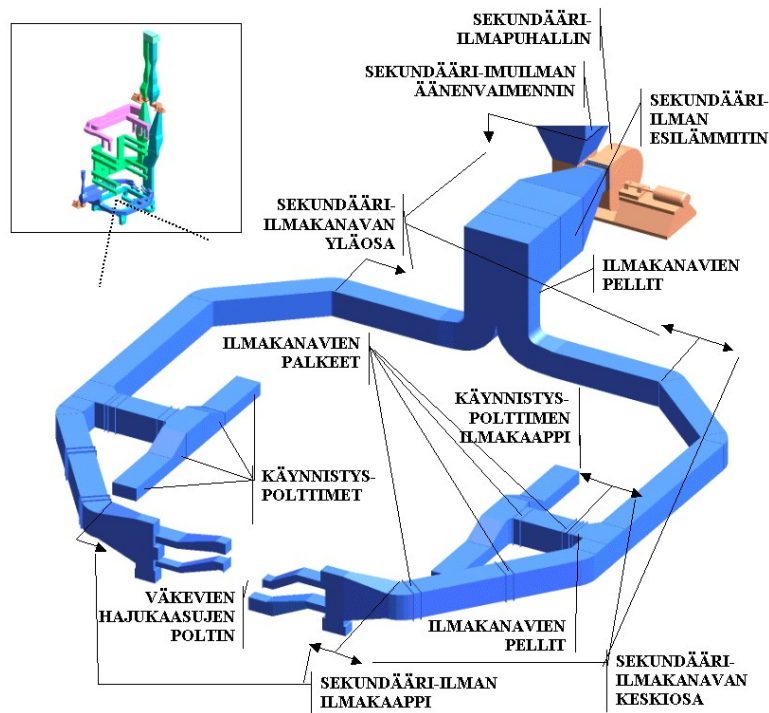
Orgaanisen puuaineksen palaminen ja mustalipeässä olevien kemikaalien regeneroituminen vaativat eri tyyppiset olot. Kattilan pohjalla olevassa keossa tapahtuu kemikaalien regenerointi, mikä edellyttää pelkistäviä olosuhteita. Olosuhteiden aikaansaamiseksi syötetään kattilan pohjalle primääri-ilmaa vain sen verran, että keon lämpötila pysyy haluttuna (1000-1100 °C). Koko ilmamäärästä on yleensä 30-40 % primääri-ilmaa. Liian suuri primääri-ilmamäärä johtaa natriumsulfaatin huonoon reduktioon kun taas liian pieni ilmamäärä johtaa liian alhaiseen keon lämpötilaan. /1./ Primääri-ilmajärjestelmän periaate esitetään kuvassa 3.



Kuva 3. Primääri-ilmajärjestelmä /2/.

## 2.2 Sekundääri -ilmajärjestelmä

Keossa kaasuuntuneet komponentit poltetaan ilmalla, joka tuodaan sekundääri-ilmasuuttimista. Tämä sekundääri-ilma on tyypillisesti 50-60 % koko ilmamäärästä /1/. Sekundääri-ilman avulla saavutetaan vakaa palaminen ja hallitaan keon keskiosaa estämällä keon liiallinen kasvaminen /2/. Lisäksi sekundääri-ilman avulla hallitaan tulipesän virtauksia ja lämpötilaa /2/. Kuvassa 4 esitetään sekundääri-ilmajärjestelmän periaate.



Kuva 4. Sekundääri-ilmajärjestelmä /2/.

### 2.3 Tertiääri -ilmajärjestelmä

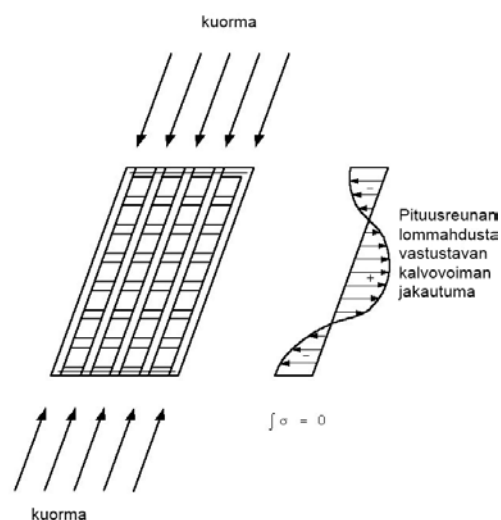
Pelkistysvyöhykkeessä alkanut palaminen pyritään saattamaan loppuun hapetusvyöhykkeessä tuomalla sinne tertiääri-suuttimien kautta täydellisen palamisen varmistava ilma. Palamisilman ja palavien kaasujen on sekoitettava mahdollisimman täydellisesti keskenään hapetusvyöhykkeessä, jotta polttoaine palaa kokonaan. Tähän päästään kattilaan puhallettavan palamisilman edetessä tarpeeksi nopeasti (65-80m/s), sen paineen ollessa tarpeeksi suuri (2000-3000Pa) ja polttoilma-aukkojen ollessa oikein suunnattuina. Tertiääri-ilman osuus on yleensä n.10 % koko ilmamäärästä. /1./

### 3 LOMMAHDUS LEVYRAKENTEESSA

Puristusjännityksen alaisiksi joutuviissa levykentissä saattaa tapahtua lommahtamista, joka heikentää rakenteen kestävyyttä. Lommahdusilmiössä rakenne menettää stabiliteettinsa, mikä on otettava huomioon suunniteltaessa levyistä koottuja rakenteita. Lommahdus ilmiönä tapahtuu rakenteissa, jotka ovat jäykkiä kuormitetussa suunnassa ja hoikkia poikittaisessa suunnassa.

Kasvatettaessa puristuskuormaa jäykässä suunnassa levy puristuu tiettyyn kriittiseen jännitykseen asti ainoastaan kimmoisesti kokoon, mutta pysyy edelleen suorana. Levyn tasapainotila on indifferentti, kun jännitys on kohonnut kriittisen suuruiseksi, eli pienikin häiriö saa sen taipumaan sinipuoliaallon muotoisesti tasostaan pois päin. /3./

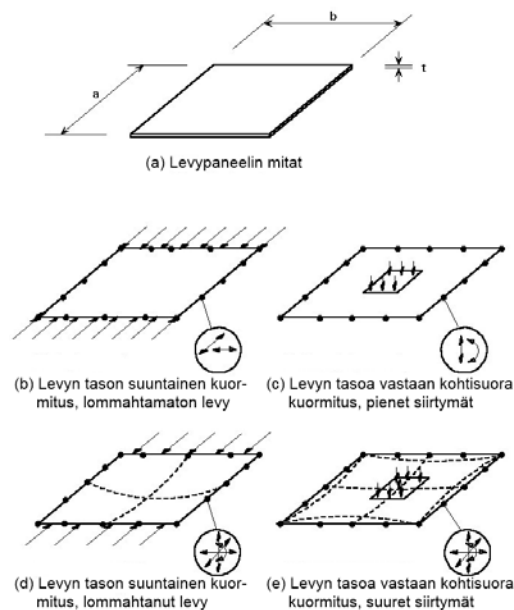
Kuvan 5 mukaisen arinan perusteella voidaan tarkastella lommahduksen muodostumista. Joukko pituussauvoja kantaa puristusta ja niiden nurjahtaessa reunojen lähellä olevat kiinnitetymät sauvat keräävät suuremman kuorman. Lommahdustuentaa lisää myös poikittaisten kalvovoimien muodostuminen arinan siirtyessä ylikriittiseen tilaan. /4./



Kuva 5. Levyn arinamalli /4/.

### 3.1 Mittasuhteiden ja reunaehtojen vaikutus

Levyn leveyttä merkitään symbolilla  $b$ , pituutta  $a$ :lla ja paksuutta  $t$ :llä kuvan 6 mukaisesti. Yleensä levyn leveydellä tarkoitetaan suurimman normaalijännityksen suuntaa vastaan kohtisuoraa tasomittaa. Lommahdusaaltojen muodostuminen ja lommahdusjännitysten suuruus määräytyy levyn hoikkuudesta (suhde  $b/t$ ) ja sivusuhteesta ( $a/b$ ), joiden funktiona saadaan levyn kestävyys /4/.



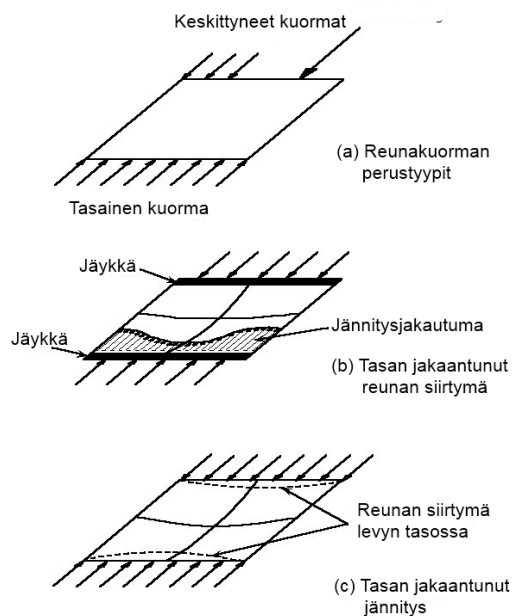
Kuva 6. Levyn kuormitukset ja reunaehdot /4/.

Levyn reunaehdot vaikuttavat edellisten lisäksi kestävyteen, joiden vaikutusta on esitetty kuvassa 6. Kuvan 6 kohdassa b esitetään, kuinka levyn suuntainen kuormitus, joka ei aiheuta lommahtamista, tuottaa vain levyn tason suuntaisia normaalijännityksiä ja leikkausjännityksiä. Levyn siirtymä- ja kiertymämahdollisuudet määritellään reunaehdoissa, joista levyä taivuttavien kuormien vaste määräytyy (kuva 6 kohta c). Levyn kaikkien reunojen ehdoista määräytyy suurien kuormien vaste sekä levyn tason suuntaiselle että taivuttavalle kuormitukselle. Kuvan 6 kohdassa d esitetään levyn taipumista säätelevien reunaehtojen vaikutus lommahtamiseen ja tason suuntaisten reunaehtojen vaikutus kalvovoimien kehittymiseen suurten siirtymien vaikuttaessa (kuva 6 kohta e).

/4./

### 3.2 Levyn tason suuntainen kuormitus

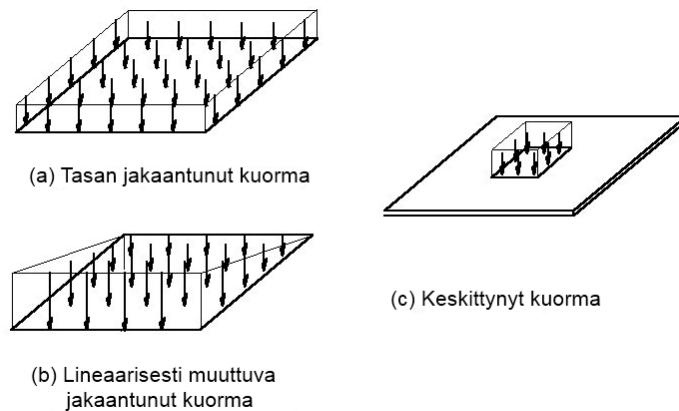
Levyn reunakuormat ovat joko tasan jakautuneita koko reunan pituudelle tai paikalliskuormia osapituudella (kuva 7 kohta a). Kuvan 7 kohdan b siirtymätila ja kuvan 7 kohdan c jännitystila on tärkeä erottaa toisistaan levyn lommahtaessa. Kestävyyden kannalta tärkeä ylikriittinen tila kehittyy, kun levyssä tapahtuu jännityksien uudelleen jakautuminen, jolloin taipuisammalta keskiosalta siirtyy kalvojäännityksiä jäykemmille reunoille resultantin pysyessä samana. /4./



Kuva 7. Tason suuntaiset kuormitukset levyssä /4/.

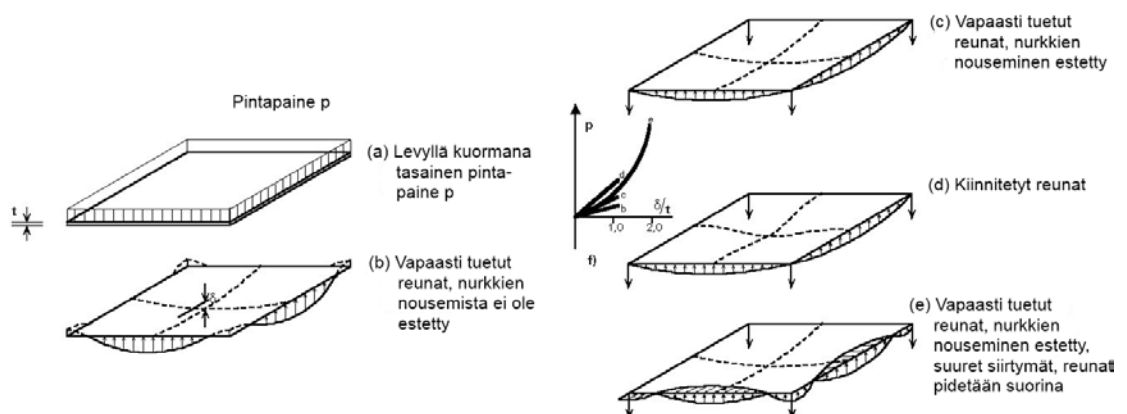
### 3.3 Taivuttava kuormitus

Kuvassa 8 esitetään erilaisia taivuttavia kuormitustyypppejä. Taivuttava kuormitus voi olla tasaista kuormaa levyn alueella (kuva 8 kohta a), muuttuvaa kuormaa koko levyn alueella (kuva 8 kohta b) tai paikallista pintakuormaa (kuva 8 kohta c). /4./



Kuva 8. Tasaan vastaan kohtisuorat kuormitustyypit /4/.

Levyn toimiessa vapaasti tuettuna laattana sen nurkat nousevat irti tuesta (kuva 9). Laatan taivutusjäykkyys ja kantokyky paranevat jos nurkkien nouseminen estetään. Reunojen ollessa kiinnitetyt kasvavat jäykkyys ja kantokyky reunoilla vaikuttavien tukimomenttien ansiosta. Taipumien ollessa suuria voivat hoikat levyt olla silti kimmoisia. Tällaisissa tapauksissa taivutuskäyttäytymistä parantaa levyn kalvotila. Kalvotila on tehokkaimmillaan silloin, kun reunat ovat jäykästi tuetut, mutta reunojen pysyessä vain osittainkin suorina suurin jäykkyyden ja kantokyvyn lisäys syntyy silloin kun taipumat ovat suuria. /4./



Kuva 9. Erilaisia reunaehtoja kimmoisessa levyssä /4/.

### 3.4 Lommahduksen aaltomuodot

Kriittisen lommahdusjännityksen ratkaisu erilaisille levyn muodoille ja reunaehdoille saadaan muokkaamalla levyn kimmopinnan differentiaaliyhtälöä yleispätevään muotoon

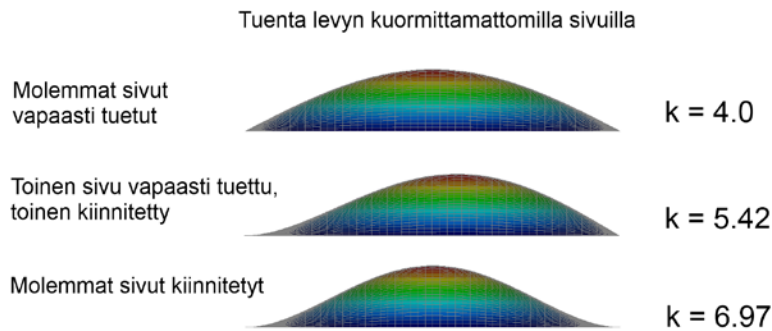
$$\sigma_{cr,p} = k_{\sigma} \cdot \frac{\pi^2 E}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{t^2}{b^2} \quad (1)$$

$$k_{\sigma} = \left( \frac{m \cdot b}{a} \right)^2 + 2 + \left( \frac{a}{m \cdot b} \right)^2 \quad (2)$$

jossa	$\sigma_{cr,p}$	ideaalisen levyn teoreettinen lommahdusjännitys
	$E$	aineen kimmomoduuli
	$\nu$	suppeumaluku
	$t$	levyn paksuus
	$b$	kuormitetun reunan leveys
	$k_{\sigma}$	lommahduskerroin
	$a$	levyn pituus
	$m$	puoliaaltojen lukumäärä pituussuunnassa

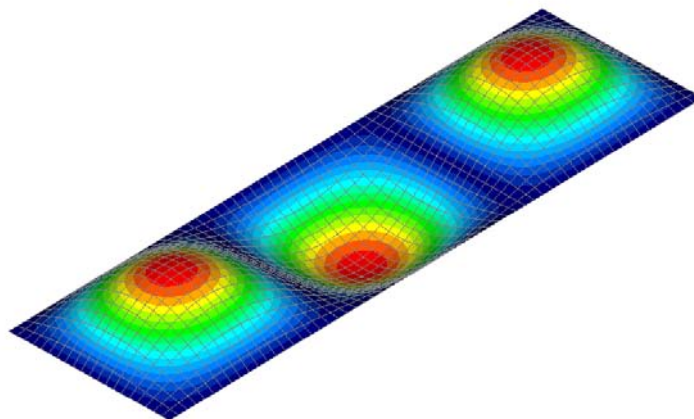
Lommahduskertoimen  $k_{\sigma}$  suuruus määräytyy mm. levyn reunaehdoista ja sivusuhteesta ja sen arvoja on voitu ratkaista analyttisesti vain yksinkertaisimmille tapauksille. /3./

Kuvassa 10 esitetään reunaehtojes vaikutus lommahdusmuotoon ja kimmoterian mukaiseen kriittiseen jännitykseen. Kuvasta voidaan huomata reunan tuennalla tai sen puuttumisella olevan suuri vaikutus lommahduskertoimen  $k_{\sigma}$  arvoon.



*Kuva 10.* Kriittinen lommahduskerroin eri reunaehdoilla.

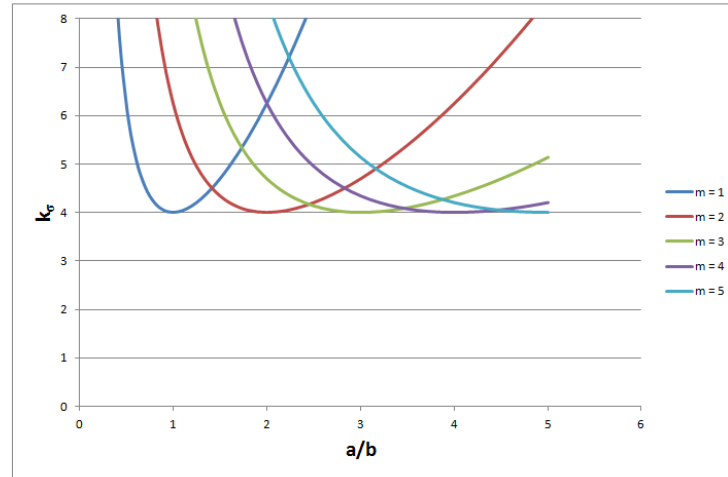
Pitkissä levykentissä suurin lommahdusta estävä tekijä on levyn poikittainen taivutusjäykkyys kuormittamattomien reunojen välillä. Poikittainen kalvovaikutus tulee merkittäväksi levyn siirtyessä lommahduksen jälkeiseen ylikriittiseen tilaan ja levyn deformoitua palautumattomaan muotoon. Pitkän levykentän käyttäytymistä voidaan tarkastella yksinkertaisena neliölevynä, koska sivusuhteen kasvaessa kriittinen muoto muuttuu siihen suuntaan, missä puoliaallon pituus on  $a/m = b$ . /4./ Levyissä voi syntyä useampia lommahdusmuotoja ja kuvan 11 tapauksessa on kolme puoliaaltoa pituussuunnassa ja yksi puoliaalto poikittaissuunnassa.



*Kuva 11.* Esimerkkilevyn ensimmäinen lommahdusmuoto.

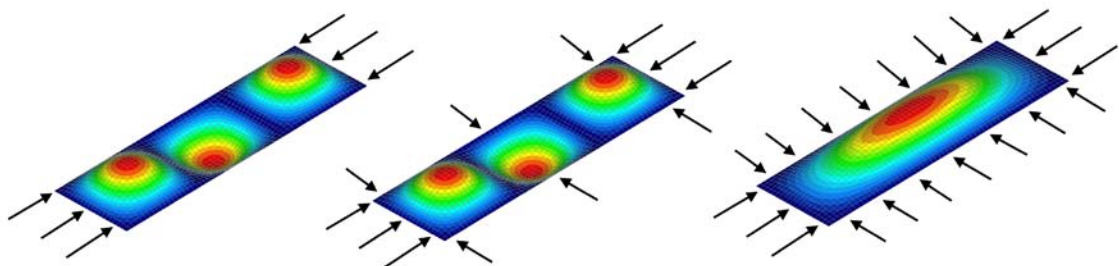
Kuten edellä jo mainittiin, määräytyy lommahduskerroin  $k_\sigma$  levykentän sivujen suhteesta, reunaehdoista ja kuormituksen luonteesta. Kuvassa 12 esitetään lommahduskertoimen arvot levykentälle, joka on tasaisesti puristettu ja kaikilta reunoiltaan nivelellisesti tuettu. Kuvasta voidaan havaita, että lommahduskerroin saa pienimmän arvonsa 4 jokai-

sessä lommahdusmuodossa. Puoliaaltojen väliarvojen lisälujuutta ei kuitenkaan hyödynnetä mitoituksessa ja tällöin ollaan mitoituksen suhteen varmallalla puolella.



Kuva 12. Lommahduskertoimen ja sivusuhteen välinen yhteys.

Kun reunakuormia vaikuttaa enemmän kuin yksi, niiden yhteisvaikutuksesta voi syntyä eriaikainen lommahdus kuin komponenteista erikseen, koska komponenteista seuraavia mahdollisia lommahdusmuotoja on enemmän kuin yksi. /4./ Kuvassa 13 on esitetty eri lommahdusmuotojen yhteisvaikutusta. Esimerkiksi pieni poikittainen puristusjännitys ei muuta lommahdusmuotoa, mutta suuri poikittainen jännitys aiheuttaa levypaneelin lommahtamisen yhteen puoliaaltoon.



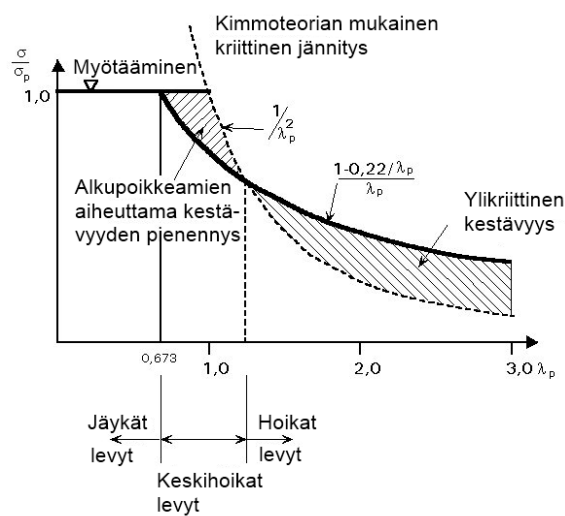
Kuva 13. Lommahduksen eri muotoja levypaneelissa.

### 3.5 Epätäydellisyyksien vaikutus ja ylikriittinen kestävyys

Todellisen rakenteen levykentät eivät ole ideaalisia. Aineen ominaisuudet poikkeavat ideaalikimmoisesta ja levykentissä on esimerkiksi hitsauksesta johtuvia jännityksiä ja muodonmuutoksia. Myös aineen ominaisuudet poikkeavat ideaalikimmoisesta. /3./

Kestävyyskäyrä hoikille levyille lähestyy asymptoottisesti ideaalitapausta ja kestävyudessa on vain pieni vähennys. Poikkeamia sisältävillä todellisilla levyillä on selvästi pienempi kestävyys kuin ideaalilevyllä. /4./

Kuvasta 14 näkyy kestävyuden pieneneminen poikkeamien vaikutuksesta ja hoikkien levyjen ylikriittinen kestävyys.



Kuva 14. Suhteellinen puristuslujuus riippuen levykentän hoikkeudesta /4/.

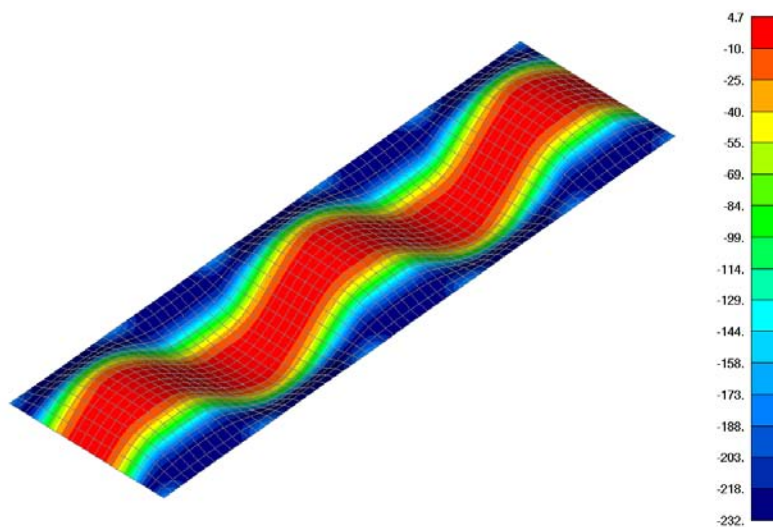
Kohdassa, jossa kimmainen lommahdusjännitys ja myötöraja leikkaavat toisensa, suhteellinen hoikkuus lommahduksen suhteen saa arvon 1,0. Suhteellinen hoikkuus määritetään kaavasta /5/

$$\bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr,p}}} \quad (3)$$

missä  $f_y$  aineen myötöraja

Äärellisen syvän lommon muodostuessa puristusjännitys jakaantuu uudelleen pienentäen kalvojännitystä lommon kohdalla ja kasvattaen reuna-alueilla. Levyn puristuskuormaa on mahdollista vielä lisätä, jos jännitys ei ole saavuttanut myötörajaa reuna-alueillakaan. Kuormitusta voidaan vielä hieman lisätä reuna-alueiden myötämisen jälkeen, kunnes lopullinen kestävyys on saavutettu. /3./

Kuvassa 15 esitetään ensimmäistä lommahdusmuotoa vastaavia alkupoikkeamia sisältävän levyn pituussuuntainen kalvojännitysjaakauma. Kuvasta voidaan huomata levyn puristusjännitysten kohonneen levyn reuna-alueilla myötörajalle, kun taas levyn keskiosa on lähes jännityksetön.



Kuva 15. Pituussuuntainen kalvojännitysjaakauma.

Tehollisella leveydellä vaikuttavilla maksimijännityksillä voidaan korvata muuttuvat puristusjännitykset siten, että resultantti säilyy samana. Levyllä on tehollinen leveys, jossa jännitys nousee rajatilassa laskentalujuuden suuruiseksi ja muu osa on jännityksetön eli täysin tehoton. /3./

## 4 LEVYKENTTIEN TOIMINTA

Todellisissa rakenteissa ei koskaan toteudu täydellisesti lineaarisen lommahdusteorian oletukset. Näitä oletuksia ovat mm. lineaarikimmoinen, homogeeninen ja isotrooppinen materiaali. Lisäksi levyä pidetään täysin suorana ja jännityksettömänä ja sen paksuus on pieni muihin mittoihin verrattuna. Levyn tason suuntaisen kuormituksen oletetaan myös sijaitsevan levyn keskitasossa. Oletus kimmoisuuden rajattomuudesta ei päde teräkselle, vaan on otettava huomioon teräksen epälineaarisuus suhteellisuusrajan ja myötörajan välillä. /4./

Suunnittelun tavoitteena on käyttää materiaalin täyttä lujuutta hyväksi. Levyjen hoikkueuden ollessa yleensä suuri alkaa lommahdus rajoittaa kestävyyttä. Pysty- ja pituusjäykisteiden avulla jäykistetyillä levyillä päästään taloudelliseen suunnitteluun. Jäykisteitä voidaan käyttää avoimissa poikkileikkauksissa tai käyritysmisjäykissä suljetuissa poikkileikkauksissa. Järjestettäessä jäykisteet suorakulmaiseen säännölliseen verkkoon ja jakovälien ollessa tarpeeksi pieniä, levyä kutsutaan ortotrooppiseksi. /4/.

### 4.1 Levyn tason suuntainen kuormitus

#### 4.1.1 Jäykistämättömät levykentät

Levyteorian mukaisten oletusten perusteella saadaan keskipinnan venymät ja liukukulma yksinkertaistettua muotoon /6/

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (4)$$

Oletukset kuorman kohdistumisesta levyn keskitasoon ja alkujännitysten ja geometrisien poikkeamien puuttumisesta eivät toteudu käytännössä. Pysyttäessä pienten siirtymien teoriassa levyn alkupoikkeamien käsittelyyn täytyy käyttää toisen asteen teoriaa. Taipumat alkavat siis kasvaa heti kuormituksen alettua. Koska lommahduksesta ja kal-

vojännitystilasta seuraavia jännityksiä rajoittaa myötääminen on murtojännitys yleensä pienempi kuin lineaarisen kimmoteorian perusteella laskettu. Varsinkin alkupoikkeamia sisältävissä levyissä murtojännitys pienenee. /4/.

Laatan taipumien tullessa suuremmiksi kuin 10–50%:a levyn paksuudesta ei pienten siirtymien teoria ole enää riittävä. Suurten taipumien teoriassa kalvovoimat kantavat osan poikittaiskuormituksesta. Suurten taipumien aiheuttamat venymät keskipinnalla voidaan kirjoittaa muodossa /6/

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (5)$$

Airy'n jännitysfunktion avulla ja derivoimalla saadaan yhteensopivuusyhtälö

$$\nabla^4 \Phi = E \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (6)$$

$$\nabla^4 w = q + t \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right] \quad (7)$$

Geometrisesti epälineaarinen lommahdusteoria perustuu yhtälöihin (6) ja (7), jotka tunnetaan Karman'in yhtälöinä /4./ Niistä eliminoimalla jännitysfunktio  $\Phi$  tai taipuma  $w$ , jää jäljelle kahdeksannen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälö. Analyyttinen ratkaisu onnistuu ainoastaan vain kaikkein yksinkertaisimmissa tapauksissa, joten monimutkaisimmissa tapauksissa joudutaan turvautumaan esimerkiksi elementtimenetelmään. /6./

#### 4.1.2 Jäykistetyt levykentät

Perusdifferentiaaliyhtälöiden integrointiin perustuvat analyttiset ratkaisut onnistuvat jäykistetyissä levyissä vain erityistapauksissa ja sen vuoksi käytetään likimääräisiä numeerisia menetelmiä, jolloin energiaperiaatteisiin perustuvaa Rayleigh-Ritzin menetel-

mää pidetään yhtenä tärkeimmistä. Kokonaispotentiaalienergian suuruuksien  $P_0$  ja  $P_1$  ollessa levyn suorassa alkutilassa ja deformatiivisessa bifurkaatiokohta vastavassa tilassa, saadaan virtuaalisiirtymien periaatteen mukaisesti lauseke /4/

$$d(P_1) = d(P_0 + dP_0) = d(P_0 + dP_0 + \frac{1}{2}d^2P_0 + \dots) = 0 \quad (8)$$

Potentiaalienergian  $P_1$  perustuessa tasapainotilaan ja alkutilan perustuessa myös tasapainoon, saadaan

$$dP_0 = 0 \quad (9)$$

Josta saadaan stabiiliteettiehdoksi

$$d(d^2P_0) = 0 \quad (10)$$

Jäykistettyjen levyjen tapauksessa  $d^2P_0$  sisältää levyn ja jäykisteen muodonmuutosenergian sekä niihin vaikuttavien voimien potentiaalienergian. Sivuiltaan vapaasti tuetun suorakulmaisen levyn lommahtaneen muodon taipumat voidaan esittää likimäärin Fourier'n kaksoissarjana joka toteuttaa reunaehdot /4/.

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots) \quad (11)$$

Tällöin yhtälön 11 stabiilisuusehto on muotoa

$$d(d^2P)da_{mn} = 0 \quad (12)$$

Ainoiden tuntemattomien ollessa amplitudit  $a_{mn}$ , muodostavat yhtälöt lineaarisen homogeenisen yhtälöryhmän, missä yhtälöiden lukumäärä on sama kuin nollasta eroavien kertoimien  $a_{mn}$  määrä Ritzin sarjakehitelmässä. Tehtävän ratkaisuna on tyypillinen omi-

naisarvoratkaisu, jolloin asettamalla ryhmän kertoimien determinantti nolaksi, saadaan tarvittavat lommahdusyhtälöt. /4./

Jäykisteiden lukumäärän jossakin suunnassa ollessa suurempi kuin kaksi, alkaa numeerinen laskenta kasvaa huomattavasti. Esimerkkinä levyssä, jossa on kaksi pysty- ja vaakajäykistettä, Ritzin sarjakehitelmässä on 120 termiä. /4./

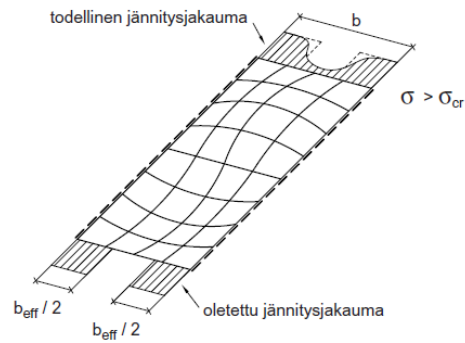
Alkupoikkeamien tiedetään olevan haitallisia levyn kestävyydelle, varsinkin kohtalaisen hoikissa levyissä ja puristavien normaalijännityksien vaikuttaessa. Suurten siirtymien salliessa toisaalta levyn kehittää ylikriittistä kestävyyttä, ei tällaista jäykistämättömien levyjen ylikriittistä kestävyyttä kuitenkaan aina kehity jäykistetyissä levyissä. Myöskään lineaarinen lommahdusteoria ei jäykistetyissä levyissä kykene ennustamaan jäykisteen murtumistapaa. Esimerkiksi levyssä voi tapahtua kaksi erilaista lommahdusmuotoa, jolloin joko levy lommahtaa tai jäykisteessä tapahtuu stabiliteetin menetys. /4./

### 4.1.3 Eurokoodi 3

Standardi SFS-EN 1993-1-5 /5/ esittää suunnitteluvaatimuksia jäykisteellisille ja jäykisteettömille levyrakenteille, kun kuormitus vaikuttaa levyn tason suuntaisesti. Standardi ei kuitenkaan käsittele kuormien vaikutuksia, jotka eivät ole levyn tason suuntaisia. /5./

Standardi SFS-EN 1993-1-5 /5/ perustuu ylikriittisen alueen hyödyntämiseen hoikilla levyillä ottaen myös huomioon alkupoikkeamien vaikutuksen keskihoikilla levyillä rakenteen kantokyvyn määrittämisessä. Levykentän suhteellisen hoikkuuden pysyessä sallitun rajan alapuolella, voidaan levykentän mitoitus perustaa teräksen myötörajaan, jolloin lommahdusta ei tarvitse ottaa huomioon. Nämä suhteellisen hoikkuuden raja-arvot esitetään standardissa SFS-EN 1993-1-5 /5/.

Lommahtaminen otetaan huomioon määrittelemällä puristettujen osien tehollinen leveys, joka saadaan kertomalla levyn puristetun osan leveys pienennyskertoimella  $\rho$ . Tällöin vain osa poikkileikkauksesta on tehollista ja poikkileikkauksen kestävyudet lasketaan vain tehollisten osien pinta-alojen perusteella (kuva 16). /7./



Kuva 16. Tehollisen leveyden periaatekuva /7/.

Lommuksen huomioon ottava pienennystekijä  $\rho$  voidaan laskea kahdelta reunalta tuetuille taso-osille seuraavasti /5/

$$\rho = 1.0 \quad \text{kun } \lambda_p \leq 0.673$$

$$\rho = \frac{\lambda_p - 0.055(3 + \psi)}{\lambda_p^2} \leq 1.0 \quad \text{kun } \lambda_p > 0.673 \quad (13)$$

jossa  $\psi$  levykentän kuormitussuhde

Puristetun levyn teholliset pinta-alat määritetään kahdelta reunalta tuetuille taso-osille taulukosta 1 /5/

Taulukko 1 Kahdelta reunalta tuetut taso-osat /5/.

Jännitysjakautuma (puristus on positiivinen)				Tehollinen <sup>o</sup> leveys $b_{\text{eff}}$		
				$\psi = 1$ : $b_{\text{eff}} = \rho \bar{b}$ $b_{e1} = 0,5 b_{\text{eff}} \quad b_{e2} = 0,5 b_{\text{eff}}$		
				$1 > \psi \geq 0$ : $b_{\text{eff}} = \rho \bar{b}$ $b_{e1} = \frac{2}{5 - \psi} b_{\text{eff}} \quad b_{e2} = b_{\text{eff}} - b_{e1}$		
				$\psi < 0$ : $b_{\text{eff}} = \rho b_c = \rho \bar{b} / (1 - \psi)$ $b_{e1} = 0,4 b_{\text{eff}} \quad b_{e2} = 0,6 b_{\text{eff}}$		
$\psi = \sigma_2 / \sigma_1$	1	$1 > \psi > 0$	0	$0 > \psi > -1$	-1	$-1 > \psi > -3$
Lommukskerroin $k_c$	4,0	$8,2 / (1,05 + \psi)$	7,81	$7,81 - 6,29\psi + 9,78\psi^2$	23,9	$5,98 (1 - \psi)^2$

Standardi SFS-EN 1993-1-5 /5/ esittää myös vaihtoehtona tehollisen leveyden menetelmälle pienennetyn jännityksen menetelmän, joka on ekvivalentti tehollisen leveyteen perustuvan menetelmän kanssa yksittäisten levykenttien tapauksessa. Pienennettyihin jännityksiin perustuvassa menetelmässä ei kuitenkaan oteta huomioon kuorman jakautumista poikkileikkauksen levyosien välillä. /5./

Pienennettyjen jännitysten menetelmän mukainen pienennyskerroin  $\rho$  voidaan määrittää SFS-EN 1993-1-5, liitteen B mukaisesti

$$\rho = \frac{1}{\varphi_p + \sqrt{\varphi_p^2 - \bar{\lambda}_p}} \quad (14)$$

jossa 
$$\varphi_p = \frac{1}{2} (1 + \alpha_p (\bar{\lambda}_p - \bar{\lambda}_{p0}) + \bar{\lambda}_p)$$

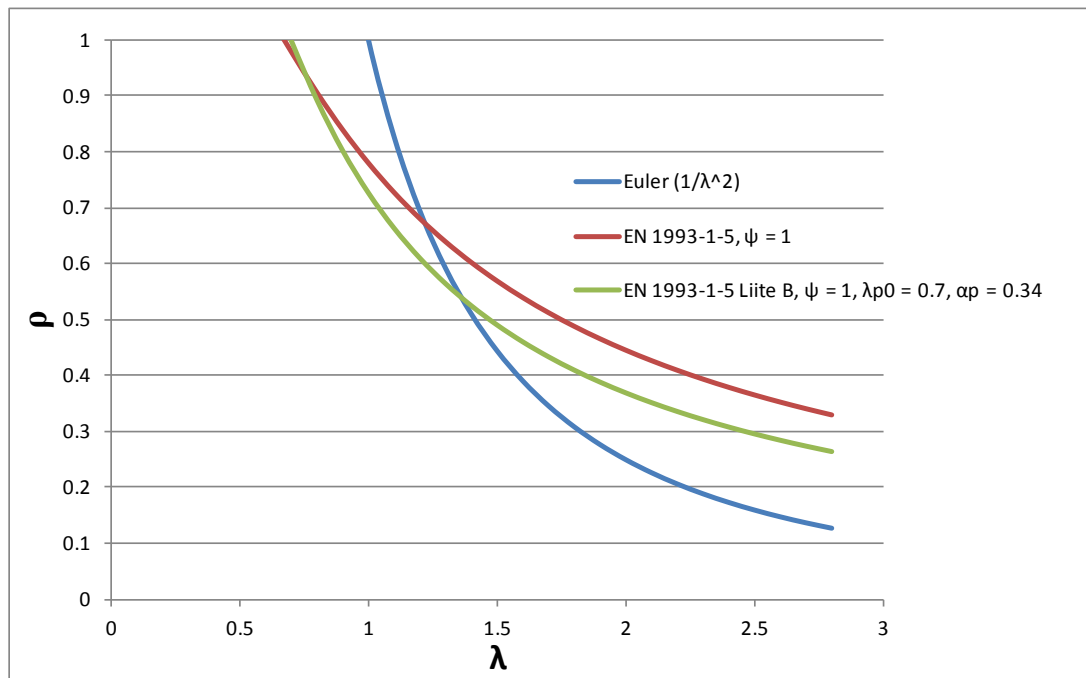
ja 
$$\bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{\alpha_{ult,k}}{\alpha_{cr}}}$$

jossa  $\alpha_p$  ja  $\bar{\lambda}_{p0}$  kalibrointikertoimia

$\alpha_{ult,k}$  myötökerroin

$\alpha_{cr}$  kimmoisen stabiliteetin kuormakerroin

Kuvassa 17 on esitetty pienennyskerroimen määräytyminen suhteellisen hoikkuuden vaihdellessa. Kuvasta voidaan havaita tehollisen leveyden menetelmän ja pienennetyn jännityksen menetelmän hyödyntävän ylikriittistä kapasiteettia samankaltaisesti. Tehollisen leveyden menetelmällä hyödynnetään ylikriittistä aluetta tehokkaammin. Pienennetyn jännityksen menetelmällä saavutetaan kuitenkin varmalla puolella olevia tuloksia sekä hoikkien että keskihoikkien levyjen alueella.



Kuva 17. Pienennyskertoimen määräytyminen suhteellisesta hoikkeudesta.

Jäykistettyjen levykenttien tapauksessa käytetään myös tehollisen leveyden menetelmää SFS-EN 1993-1-5 mukaisesti. Jäykistettyjen levykenttien kokonaislommahtamisesta aiheutuvat teholliset pinta-alat ja pituussuuntaisten jäykisteiden rajoittamille levykentille jäykisteiden välisten eri osakenttien paikallisesta lommahtamisesta aiheutuva tehollinen leveys tulee ottaa huomioon. /5./

Osakenttien tehollinen pinta-ala määritetään käyttämällä levyn paikallisen lommahtamisen huomioon ottavaa pienennystekijää (kaava 13). Jäykisteiden teholliset pinta-alat lasketaan mukaan tarkastettaessa jäykistettyä levyä kokonaislommahtamisen suhteen, jolloin jäykistetyn levyn puristetun alueen tehollinen pinta-ala lasketaan /5/

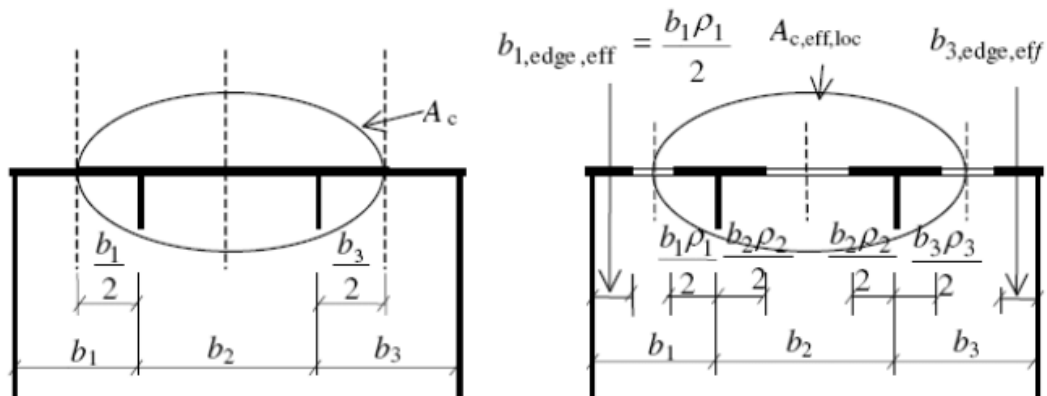
$$A_{c,eff} = \rho_c A_{c,eff,loc} + \sum b_{edge,eff} t \quad (15)$$

Tehollinen pinta-ala  $A_{c,eff,loc}$  koostuu kaikkien jäykisteiden tehollisista poikkileikkauksista ja osakentistä, jotka ovat täysin tai osittain puristetulla alueella lukuun ottamatta tehollisia alueita, jotka tukeutuvat viereiseen levyosaan, jolloin tehollinen pinta-ala  $A_{c,eff,loc}$  määritetään /5/

$$A_{c,eff,loc} = A_{sl,eff} + \sum_c \rho_{loc} b_{c,loc} t \quad (16)$$

jossa  $A_{sl,eff}$  kaikkien puristetulla levykentän alueella sijaitsevien pituus  
suuntaisten jäykisteiden tehollisten pinta-alojen summa  
 $b_{c,loc}$  yksittäisen osakentän puristetun alueen leveys  
 $\rho_{loc}$  yksittäisen osakentän pienennystekijä

$\sum_c$  sovelletaan jäykistetyin levykentän puristettuun leveyteen lukuun ottamatta osia  
 $b_{edge,eff} \cdot /5./$  Tehollisten pinta-alojen määrittämisessä käytettävät osakenttien ja jäykistei-  
den pinta-alat tasaisesti puristetussa jäykistetyssä levyssä esitetään kuvassa 18.



Kuva 18. Tasaisesti puristettu jäykistetty levykenttä /5/.

## 4.2 Levyä taivuttava kuormitus

### 4.2.1 Jäykistämättömät levykentät

Levyn keskitaso toimii neutraalitasona deformaatioiden ollessa pieniä levyn paksuuteen verrattuna, jolloin ei esiinny kalvovoimia. Laattatehtävä ratkaistaan siten, että etsitään taipumafunktio, joka toteuttaa differentiaaliyhtälöiden teorian mukaisen epähomogeenisen laattayhtälön /6/.

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q \cdot 12(1-\nu^2)}{Et^3} \quad (17)$$

Levyyn syntyy kalvojännityksiä, jos se deformoituu kaarevaan muotoon. Muodon voivat tuottaa vain veto-, puristus- tai leikkausmuodonmuutokset keskitasossa. Tällöin toimintaa kuvaa aiemmin esitetyt Karmanin yhtälöt (6) ja (7). Kahdesta kytketystä neljännen asteen differentiaaliyhtälöstä voidaan laskea jännitykset ja samalla Airy'n jännitysfunktio täytyy määritellä levyn tuntemattoman deformaatiotilan lisäksi. Tehtävä on tässä tapauksessa epälineaarinen ja sen ratkaisu on paljon hankalampi kuin yksinkertaisen laatan taivutusteoriaan perustuva, jossa kalvovaikutukset jätetään ottamatta huomioon. /4/.

Elementtimenetelmällä voidaan ratkaista mitä monimutkaisimpia epälineaarisia laatta-probleemoja, mutta myös yksinkertaisille ratkaisumenetelmille on tarvetta. Yhden ratkaisumenetelmän antaa plastisten nivelten menetelmä eli kantokuormamenetelmä. Kantokuormamenetelmä on energiamenetelmä, jossa muodostetaan energiatase. Tämä tarkoittaa, että ulkoisten voimien tekemä ulkoinen työ on yhtä suuri kuin plastisten saranoiden kuluttama sisäinen työ eli /6/

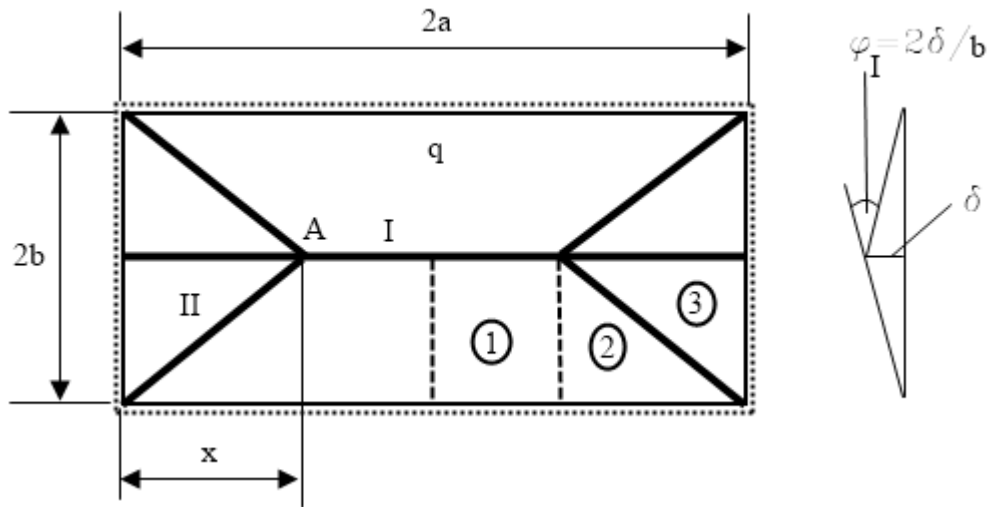
$$W_u = \int_A q w dA = W_s = \sum_j M_p \varphi_j ds \quad (18)$$

jossa  $q$  jatkuva kuormitus  
 $M_p$  plastinen momentti pituusyksikköä kohti saranassa  
 $\varphi_j$  kulmanmuutos plastisessa saranassa j

Plastiseksi momentiksi saadaan integroimalla laatan paksuuden  $t$  yli /6/

$$M_p = \frac{f_y \cdot t^2}{4} \quad (19)$$

Tasaisesti kuormitetun reunoiltaan vapaasti tuetun suorakaidelaatan kantokyky voidaan ratkaista valitsemalla plastiset saranat esimerkiksi kuvan 19 mukaisesti.



Kuva 19. Tasaisesti kuormitettu reunoiltaan vapaasti tuettu suorakaidelaatta.

Ulkoinen työ on /6/

$$W_u = \int_A qwdA = 4(W_{u1} + W_{u2}) + 2W_{u3} = 2bq(a - \frac{1}{3}x)\delta \quad (20)$$

Sisäinen työ on /6/

$$W_s = \sum_j M_p \varphi_j ds = W_{sI} + 4W_{sII} = 4M_p \frac{\delta}{b} (a + \frac{b^2}{x}) \quad (21)$$

Asettamalla ulkoinen ja sisäinen työ yhtä suuriksi saadaan kantokuormaksi  $q_p$  /6/

$$q_p = \frac{2M_p}{b^2} \frac{a + \frac{b^2}{x}}{a - \frac{1}{3}x} \quad (22)$$

Tämä kuormitus saavutetaan kun saranoiden risteyksen paikka A (kuva 19) on /6/

$$x = \frac{b^2}{a} (\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} - 1) \quad (23)$$

#### 4.2.2 Jäykistetyt levykentät

Taivutettaessa jäykistettyä levyä voidaan käyttää samaa teoriaa kuin jäykistämättömille levyille vain niissä tapauksissa, missä jäykisteet ovat tarpeeksi tiheässä niin, että rakennetta voidaan pitää ortotrooppisena. Jos näin ei ole, niin on parempi tarkastella erikseen jäykisteiden välisiä osapaneeleja. Osapaneeleille pätee tällöin sama teoria kuin jäykistämättömille levyille. /4/.

Taivuttava kuormitus vaikuttaa jäykistetyn levyn stabiliteettiin epäsuotuisasti niissä tapauksissa, joissa taipumamuoto on samanlainen kuin stabiliteetin menettämiseen liittyvä. Sama epäedullinen vaikutus on voimassa myös jäykistämättömillä levyillä.

#### 4.2.3 Eurokoodi 3

Standardissa SFS EN1993-1-7 /8/ esitetään jäykistämättömien ja jäykistettyjen levyjen rakennesuunnittelun perusmitoitussäännöt, kun levyyn vaikuttava kuormitus ei ole levyn tason suuntainen.

Levyrakenteiden mitoitusmenetelmissä otetaan huomioon lineaarinen tai epälineaarinen laattojen taivutusteoria tarpeen mukaan. Kuten edellä jo mainittiin, lineaarinen taivutusteoria perustuu oletukseen taipumien pysymisestä pieninä. Voimassa on myös oletus kuormien ja taipumien välisestä lineaarisesta yhteydestä. Epälineaarinen taivutusteoria taas perustuu oletukseen, että taipumat voivat olla suuria.

Standardissa SFS EN1993-1-7 /8/ esitetään analyysityypit eri mitoitusmallien perusteella (taulukko 2).

Taulukko 2 Analyysityypit /8/.

Analyysityyppi	Taivutusteoria	Materiaalimalli	Levyn geometria
Lineaarisen kimmoteorian mukainen analyysi (LA)	lineaarinen	lineaarinen	tarkka
Geometrisesti epälineaarinen kimmoteorian mukainen analyysi (GNA)	epälineaarinen	lineaarinen	tarkka
Materiaalisesti epälineaarinen analyysi (MNA)	lineaarinen	epälineaarinen	tarkka
Geometrisesti ja materiaalisesti epälineaarinen analyysi (GMNA)	epälineaarinen	epälineaarinen	tarkka
Geometrisesti epälineaarinen kimmoteorian mukainen analyysi, jossa epätarkkuudet otetaan huomioon (GNIA)	epälineaarinen	lineaarinen	epätarkka
Geometrisesti ja materiaalisesti epälineaarinen analyysi, jossa epätarkkuudet otetaan huomioon (GMNIA)	epälineaarinen	epälineaarinen	epätarkka

Lineaarisen kimmoteorian mukaisessa analyysissä mallinnetaan ohuiden tasorakenteiden toimintaa laattojen taivutusteorian perusteella. Tasorakenteen geometria on tässä mallinnustyyppissä virheetön. Lineaarisen kimmoteorian mukainen esimerkkiratkaisu on neljännen kertaluvun differentiaaliyhtälö, joka koskee isotrooppista ohutta laattaa, johon vaikuttaa vain laattaa vastaan kohtisuora kuorma (kaava 17). Geometrisesti epälinearisessa kimmoteorian mukaisessa analyysissä käytetään lineaarisen kimmoteorian mukaista materiaalimallia ja epälineaarista suurten siirtymien teoriaa, jolloin otetaan huomioon taivutustilan ja kalvotilan kuormien yhteisvaikutus. Materiaalisesti epälineaarinen analyysi perustuu lineaarisen kimmoteorian mukaiseen analyysiin, jossa otetaan huomioon materiaalin epälineaarinen toiminta. Geometrisesti ja materiaalisesti epälinearisessa analyysissä on käytössä sekä suurten siirtymien teoria että materiaalin epälineaarinen toiminta. GNIA analyysi on samankaltainen kuin materiaalisesti epälineaarinen analyysi, mutta lisäksi otetaan epätarkkuudet huomioon. GMNIA analyysi on kuten GMNA analyysi, johon lisätään epätarkkuuksien huomioon ottaminen.

### 4.3 Puristettu ja taivutettu levykenttä

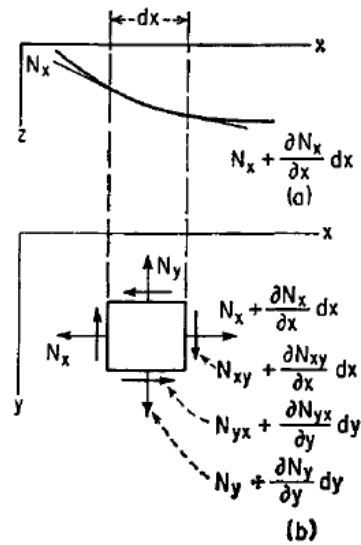
Edellä on käsitelty erikseen levykentän puristusta tason suunnassa, sekä taivutusta levyä vastaan kohtisuoran kuorman vaikutuksesta. Näiden kahden kuormituksen vaikuttaessa samanaikaisesti muuttuu levykentän kestävyys ja stabiiliteetti määrittäminen haasteellisemmaksi.

Laatoissa, joissa on sekä keskipinnan suuntaisia että keskipintaa vastaan kohtisuoria taivuttavia kuormituksia, laatta alkaa taipua heti alusta asti keskipintaa vastaan kohtisuorassa suunnassa. Tapausta voidaan käsitellä samankaltaisena kuin laattaa, johon vaikuttaa vain keskipinnan suuntaisia puristuskuormia. Tapauksessa, jossa laattaa puristetaan riittävän suurella voimalla keskipinnan suunnassa, laatta lommahtaa, jolloin laattaan syntyy sisäisiä voimia, jotka eivät ole enää pelkästään keskipinnan suuntaisia. /6./

#### 4.3.1 Laattateoria

Poikittaiskuormien lisäksi vaikuttavat keskipinnan suuntaiset voimat, jotka voidaan kuvata pituusyksikköä kohti vaikuttavilla voimilla  $N_x$ ,  $N_y$  ja  $N_{xy}$  (kuva 20). Näistä voimista saadaan tasapainoyhtälöt /9/

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$



Kuva 20. Keskipinnan suuntaiset voimat /9/.

Näiden voimakomponenttien tarkastelussa  $z$ -suunnassa otetaan huomioon levyn taivutus ja taivutuksesta muodostuvat kulmat voimien  $N_x$  ja  $N_y$  välillä, jolloin saadaan  $N_x$  voiman komponentti  $z$ -suunnalle muotoon /9/

$$-N_x d_y \frac{\partial w}{\partial x} + (N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx) (\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx) dy \quad (24)$$

josta saadaan sekä normaalivoimille  $N_x$ , että  $N_y$  komponentti  $z$ -suunnassa /9/

$$N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dxdy + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dxdy \quad (25)$$

$$N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dxdy + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dxdy \quad (26)$$

Leikkausvoiman komponentti  $z$ -suunnassa saadaan huomiosta, että taipuneen pinnan kaltevuus  $y$ -suunnassa vastakkaisilla puolilla tarkasteltavaa alkiota on  $\partial w / \partial y$  ja  $\partial w / \partial y + (\partial^2 w / \partial x \partial y) dx$ . Tällöin  $N_{xy}$  leikkausvoiman komponentti  $z$ -suunnassa saadaan /9/

$$N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy \quad (27)$$

Leikkausvoimien parittaisesta yhtäsuuruudesta seuraa kaikkien leikkausvoimien komponenteiksi z-suunnassa /9/

$$2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \quad (28)$$

Differentiaaliyhtälön muodostamiseen tapauksessa, jossa vaikuttaa keskipinnan suuntainen kuormitus, sekä keskipintaa vastaan kohtisuora taivuttava kuormitus, otetaan lähtökohdaksi laattayhtälö (17). Laattayhtälössä olevaan poikittaiskuormitukseen  $q$  lisätään komponentit (25,26 ja 28), jolloin saadaan differentiaaliyhtälö muotoon

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{12(1-\nu^2)}{Et^3} (q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}) \quad (29)$$

Pienillä siirtymillä Kirchoffin laattateoria antaa suhteellisen tarkkoja tuloksia, jolloin voidaan käyttää edellä esitettyä differentiaaliyhtälöä ratkaistaessa kyseistä levytehtävää.

Siirtymien kasvaessa yli 30 %:a levyn paksuudesta, alkaa kalvojäännitysten vaikutus kasvaa, jolloin pienten siirtymien teoria ei pysty enää kuvaamaan ongelman ratkaisua. Vaikka suurten siirtymien teoria olettaa, että siirtymät ovat yhtäsuuria tai suurempia kuin levyn paksuus, näiden siirtymien on silti oltava pieniä suhteessa levykentän muihin dimensioihin./10./

Tarkasteltaessa differentiaaliyhtälöä (29), joka kuvaa levyn tasapainoyhtälöä puristus- ja taivutuskauormituksen alaisena, voidaan sitä käyttää myös suurten siirtymien teorian mukaisessa ratkaisussa. Käyttämällä yhtälöä (29) ja yhtälöä (6) voidaan niistä muodostuva suurten siirtymien mukainen ratkaisu kirjoittaa muodossa: /10/.

$$\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \nabla^4 w(x, y) = \mathfrak{I}(w, \Phi) + \frac{p_z}{h} \quad (30)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi(x, y) = -\frac{1}{2} \mathfrak{I}(w, w)$$

Differentiaaliosoitin  $\mathfrak{I}()$  w:lle ja  $\Phi$ :lle muodostuu yhtälöstä (7), joka tunnetaan Karmanin yhtälönä.  $\mathfrak{I}(w, w)$  saadaan korvaamalla termi  $\Phi$  termillä w yhtälössä (7). /10./

Kuten aikaisemmin todettiin, on Karmanin yhtälöiden yksikäsitteinen ratkaisu erittäin hankalaa ja tehtävä voidaan esimerkiksi edellä olevassa tapauksessa ratkaista iteratiivisilla menetelmillä. Karmanin yhtälön ratkaisu on esitetty kirjallisuudessa vain muutamille yksinkertaisille tapauksille ja tämän vuoksi monimutkaisimmissa ongelmissa on numeeristen menetelmien käyttö suositeltavaa.

### 4.3.2 Eurokoodi 3

Tasoa vastaan kohtisuorien ja tason suuntaisten kuormien vaikuttaessa levykenttään, voidaan jännitysresultantit ja jännitykset määrittää jakamalla levyrakenne yksittäisiin levylohkoihin, jotka voivat olla jäykistettyjä tai jäykistämättömiä. /8./

Jäykistämättömiin levykenttiin kohdistuessa tasoa vastaan kohtisuora lineaarinen tai lineaarisesti muuttuva kuormitus voidaan levykenttä mallintaa vallitsevan kuorman siirtymisen suuntaisena ekvivalenttina palkkina. Jos tasossa vaikuttavien puristuskuormien aiheuttamassa lommahdusmuodossa syntyvät taipumat ovat samanmuotoisia kuin kohtisuorien kuormien aiheuttamat taipumat, on molempien ilmiöiden välinen yhteisvaikutus tarpeen ottaa huomioon. /8./

Taivutus- ja puristuskuormien vaikuttaessa voidaan standardin SFS EN1993-1-1 /11/ yhteisvaikutuskaavaa soveltaa ekvivalenttiin palkkiin seuraavasti

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk}} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed} + \Delta M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{yz} \frac{M_{z,Ed} + \Delta M_{z,Ed}}{\frac{M_{z,Rk}}{\gamma_{M1}}} \leq 1 \quad (31)$$

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk}} + k_{zy} \frac{M_{y,Ed} + \Delta M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{zz} \frac{M_{z,Ed} + \Delta M_{z,Ed}}{\frac{M_{z,Rk}}{\gamma_{M1}}} \leq 1 \quad (32)$$

jossa	$N_{Ed}$	puristuskuorman mitoitusarvo
	$M_{y,Ed}$	maksimimomentin mitoitusarvo y-suunnassa
	$M_{z,Ed}$	maksimimomentin mitoitusarvo z-suunnassa
	$\Delta M_y$	painopisteakselin siirtymisestä aiheutuva momentti y-suunnassa
	$\Delta M_z$	painopisteakselin siirtymisestä aiheutuva momentti z-suunnassa
	$\chi_y$	taivutusnurjahduksen pienennystekijä y-suunnassa
	$\chi_z$	taivutusnurjahduksen pienennystekijä z-suunnassa
	$\chi_{LT}$	kiepahduksen pienennystekijä

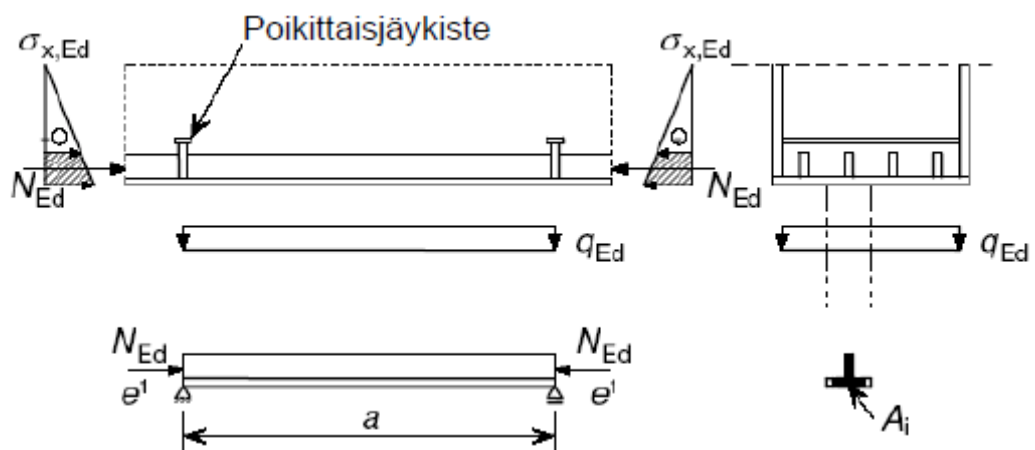
$k_{yy}$ ,  $k_{yz}$ ,  $k_{zy}$  ja  $k_{zz}$  ovat yhteisvaikutustekijöitä, jotka määritetään standardin SFS EN1993-1-1 liitteen A tai B mukaisesti. /11./

Eurokoodin osassa EN 1993-1-1 on laadittu yhteisvaikutustekijät  $k_{yy}$ ,  $k_{yz}$ ,  $k_{zy}$  ja  $k_{zz}$  kahdelle eri vaihtoehdoiselle menetelmälle. Menetelmä 1 on laskennallisesti työläämpi, mutta tarkempi, kun taas menetelmä 2 antaa enemmän varmallalla puolella olevia tuloksia ja on laskennallisesti yksinkertaisempi. /7./

Eurokoodissa on esitetty myös tarvittavat yhteisvaikutuskaavat samanaikaisen taivutusmomentin, normaalivoiman ja leikkausvoiman yhteisvaikutukselle ainoastaan poikki-leikkauksen kestävyuden suhteen. Ohjeita nurjahtavaa tai kiepahtavaa sauvaa koskien ei ole esitetty kyseiselle voimasuureyhdistelmälle. Näiden voimasuureiden yhdistelmä sisältyy kuitenkin edellä esitettyihin kaavoihin 31 ja 32. Näissä yhteisvaikutuskaavoissa

on otettu epäsuorasti huomioon mahdollisten poikittaisten kuormien ja niistä aiheutuvi-  
en leikkausvoimien yhteisvaikutus momenttipinnan muodon perusteella määräytyvien  
ekvivalentin momentin kertoimien avulla. /7./

Suorakulmaiseen säännölliseen verkkoon järjestetty poikittais- tai pitkittäissuunnassa  
jäykistetty levy tai levylohko voidaan mallintaa arinana standardin SFS EN1993-1-7  
mukaan /8/. Arinan kanssa yhdessä toimivan yksittäisen sauvan, sekä myös yhdensuun-  
taisena tason suuntaisten puristusvoimien suunnan kanssa toimivan sauvan poikkileik-  
kauspinta-alaa määrittäessä käytetään tehollisen leveyden kertoimia SFS EN1993-1-5  
mukaisesti. Kuvassa 21 esitetään tehollisen poikkileikkauksen muodostuminen. Arinan  
yksittäisen sauvan varmuus voidaan osoittaa yllä olevien yhteisvaikutuskaavojen (kaava  
31 ja 32) mukaisesti.



Kuva 21. Sauvan tehollisen poikkileikkauksen määritelmä /8/.

## 5 ELEMENTTIMENETELMÄ LOMMAHDUSTARKASTELUSSA

Kuten jo aiemmin todettiin, kimmoteorian mukainen laatan taivutuksen tai tasojännitystilatehtävän ratkaisu on analyyttisessä tai likimääräismuodossa mahdollinen vain yksinkertaisilla reunaehdoilla ja levyn muodolla. Kun levyn muoto muuttuu hankalammaksi, samoin kuin reunaehdotkin, tehtävä voidaan ratkaista vain numeerisesti, esimerkiksi elementtimenetelmällä tai reuna-arvo-elementtimenetelmällä.

Lommahdustehtävän ratkaisuun on elementtimenetelmällä kaksi eri vaihtoehtoa. Ensimmäisessä vaihtoehdossa ratkaistaan  $\sigma_{cr,p}$  (kaava 1) lineaarisena ominaisarvoteknävänä. Ominaisarvoteknävän ratkaisua sovelletaan suhteellisen hoikkuuden  $\bar{\lambda}_p$  (kaava 3) määrittämiseen ja standardin mukaiseen mitoituskestävyyden laskentaan. Toisena vaihtoehtona on epälineaarinen analyysi, jossa otetaan huomioon rakenteen geometriset ja fysikaaliset epätäydellisyydet, jolloin saadaan tuloksena rakenteen maksimikuormitus.

### 5.1 Lineaarinen stabiiliusanalyysi

Linearisessa ominaisarvoteknävässä elementtimalliin ei mallinneta muotovirheitä, eikä jäännösjännityksiä. Elementtimallilla voidaan lineaarisena ajona ratkaista erikseen kimmoisen stabiliteetin kuormakerroin  $\alpha_{cr}$  ja rakenteen myötökerroin  $\alpha_{ult,k}$ , joita tarvitaan yhtälöissä (13) ja (14). Näin saadaan ratkaistua suhteellinen hoikkuus, jonka avulla voidaan määrittää standardin mukaiset pienennyskertoimet.

On huomattava, että ominaisarvoteknävä ei huomioi kuin kuormitukset, jotka vaikuttavat levyn tason suuntaisesti. Tällöin tutkitaan levyn keskipinnassa vaikuttavia primäärijännityksiä, eli kalvojännityksiä, eikä levyn ulkopinnan jännityksiä. /3./

Ensimmäiseksi edellä mainitussa menetelmässä suoritetaan lineaaris-staattinen analyysi, jolla määritetään elementtien aksiaalivoimajakauma tietyllä mielivaltaisella kuormalla.

Tämän jälkeen muodostamalla geometriset jäykkyysmatriisit ja globaalit jäykkyysmatriisit saadaan lommahdusehdoksi /12/

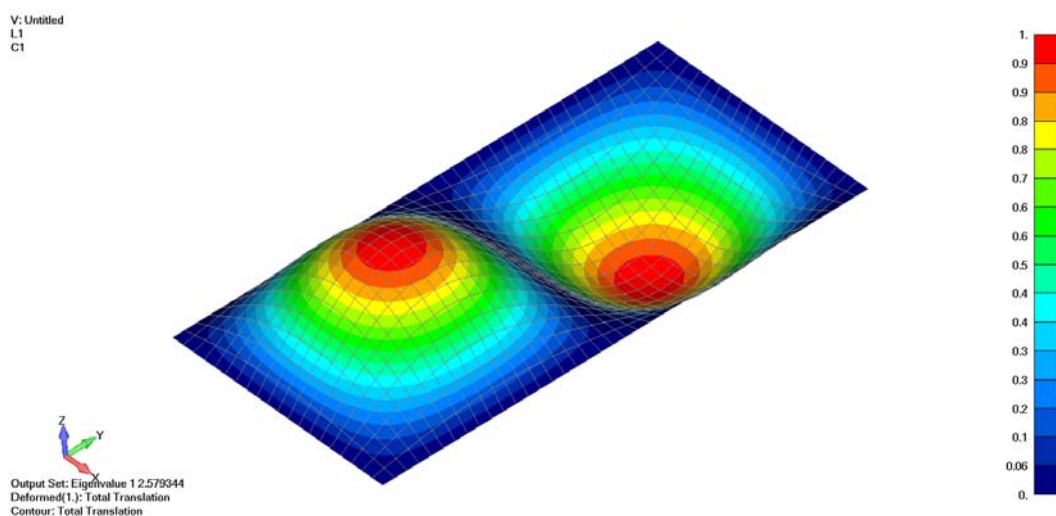
$$[K_t] + \lambda[K_g] = 0 \quad (33)$$

Jossa	$[K_t]$	globaali jäykkyysmatriisi
	$[K_g]$	geometrinen jäykkyysmatriisi
	$\lambda$	kuormituskerroin

Kuormituskerroin  $\lambda$  kuvaa tehtävän lineaarisuutta, eli kuormituksen kasvaessa  $\lambda$  -kertaiseksi, kasvaa myös  $[K_g]$  samassa suhteessa. Yhtälöstä 33 voidaan määrittää alin kriittisen kuormituskertoimen arvo, jolla levy saavuttaa kriittisen lommahduskuorman. /12./

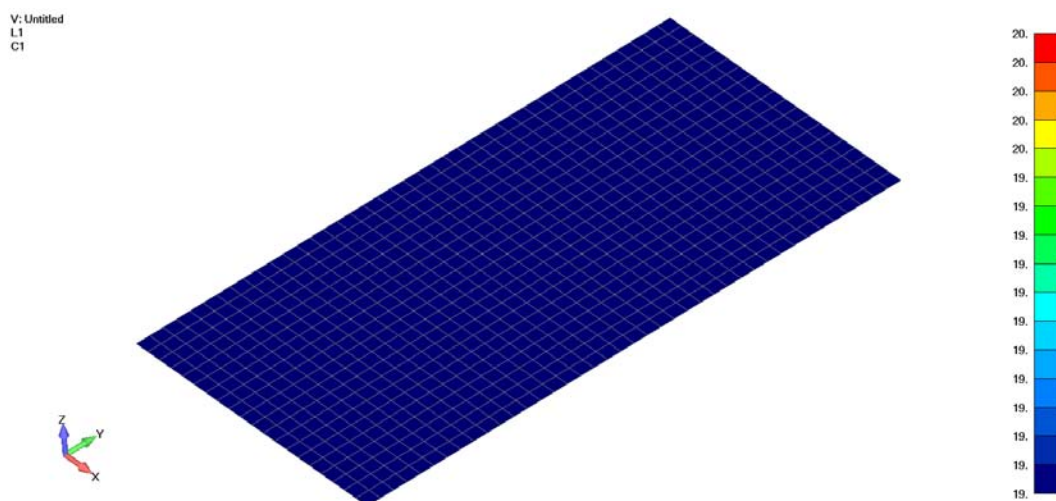
Esimerkkinä ominaisarvotehtävän käytöstä lommahdustarkastelussa tutkitaan jäykistämätöntä levykenttää, jota kuormittaa tasainen puristuskuorma 150 kN levyn lyhyemmällä sivulla. Levy on reunoiltaan nivelellisesti tuettu. Levynpaksuus on 8 mm, levyn kuormitetun sivun leveys on 1000 mm, kuormittamattoman sivun leveys on 2000 mm, sekä levyn materiaalin myötöraja on 235 MPa.

Kuvassa 22 esitetään ominaisarvotehtävän ratkaisuna saatu levyn ensimmäinen lommahdusmuoto, jossa on kaksi puoliaaltoa pituussuunnassa ja yksi puoliaalto poikittais-suunnassa. Kimmoisen stabiliteetin kuormakerroin  $\alpha_{cr}$  saa arvon 2.58.



Kuva 22. Levyn ensimmäinen lommahdusmuoto.

Kuvassa 23 esitetään levyn kalvojäännitysjaakauma, joka saadaan lineaarisen ratkaisun tuloksena. Kalvojäännityksen arvo n.19 MPa, joten rakenteen myötökerroin  $\alpha_{ult,k}$  saa arvon 12.4. Tällöin levyn suhteelliseksi hoikkuudeksi muodostuu n. 2.2.



Kuva 23. Levyn kalvojäännitysjaakauma [MPa]

Liitteessä 1 esitetään levyn lommahduskestävyyden laskenta analyttisesti, sekä lineaarisen ominaisarvotehtävän mukaisesti. Suhteellinen hoikkuus muodostuu molemmilla menetelmillä lähes samanlaiseksi, jolloin lopputuloksena saatu varmuus lommahduksen suhteen määräytyy lähinnä käytetäänkö analyttisessä laskennassa tehollisen leveyden

menetelmää vai pienennetyn jännityksen menetelmää. Tätä menetelmien eroa on esitelty jo aikaisemmin kuvassa 17.

Ominaisarvotehtävän avulla saatu ratkaisu antaa siis hyviä tuloksia, kun kuormitus vaikuttaa levyn tason suuntaisesti. Kun kuormituksena vaikuttaa myös levyn tasoa vastaan kohtisuora kuormitus, joka taivuttaa levyä, ei ominaisarvotehtävän ratkaisu ole enää riittävä. Näiden kahden eri kuormituksen ottamiseksi huomioon lommahdustarkastelussa tarvitaan avuksi epälineaarista ratkaisua elementtimenetelmällä tai aiemmin esiteltyjen Eurokoodin yhteisvaikutuskaavojen soveltamista.

Soveltamalla Eurokoodin yhteisvaikutuskaavoja (kaavat 31 ja 32) voidaan varmistaa rakenteen lommahduskestävyys lineaarisella stabiiliusanalyysillä myös painekuorman vaikuttaessa. Yhteisvaikutuskaavoissa summataan lineaarisesti eri kuormitusten käyttöasteet. Tässä tapauksessa tutkittaessa rakenteen yksittäistä levyosaa kuvaa kaavan ensimmäinen termi levyn tason suuntaisen puristuskuorman aiheuttamaa käyttöastetta. Tämä käyttöaste saadaan ratkaistua edellä esiteltyllä analyysillä. Toisena terminä kaavassa on levyosan momenttikuormituksen käyttöaste. Rakenteen levyosan tapauksessa tutkitaan laatan painekuorman aiheuttamaa momenttia täysplastiseen momenttikapasiteettiin, jolloin sovellettu yhteisvaikutuskaava muodostuu seuraavanlaiseksi:

$$\frac{\sigma_p}{\rho \cdot f_y} + k_{yy} \frac{p}{q_p} \leq 1 \quad (34)$$

$\sigma_p$  on levyn puristusjännitys,  $p$  on levykentässä vaikuttava painekuorma.

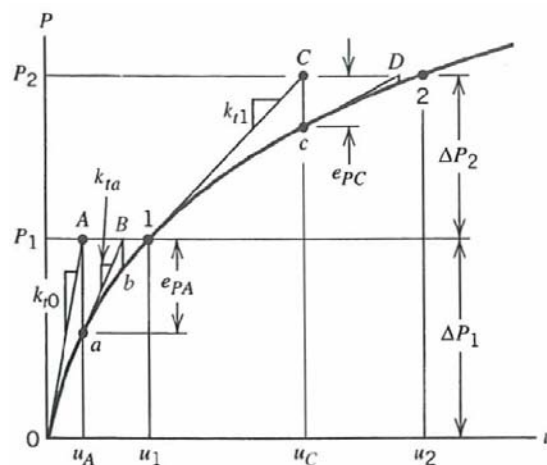
## 5.2 Epälineaarinen ratkaisu

Epälineaarilla FE- analyysillä voidaan ratkaista suoraan sekä geometrisesti että fyysisesti epälineaarinen tehtävä. Ratkaisussa kuormakerrointa kasvatetaan portaittain ja ratkaisu haetaan iteratiivisesti. Iteraatiomenetelmän pitää kyetä löytämään voimamuodonmuutoskäyrän maksimiarvo, jonka avulla saadaan määritettyä rakenteen tai ra-

kenneosan mitoituskkestävyys. Tämän voima-muodonmuutoskäyrän maksimi-arvo ilmaisee stabiiliuden menetyksen puristetuissa osissa. /3./

Epälineaarisen tehtävän ratkaisu on monimutkaisempi, kuin aikaisemmin esitelty lineaarinen ratkaisu. Tehtävän ratkaisu ei onnistu yhdellä ratkaisun askeleella, kuten lineaarisessa menetelmässä, vaan vaaditaan useampia askeleita. Ratkaisua päivitetään joka askeleella, kunnes saavutetaan riittävä tarkkuus voima-muodonmuutos käyrällä. Epälineaarissa ratkaisussa on otettava huomioon, ettei tuloksia voida skaalata, kuten lineaarisessa analyysissä, vaan jokaiselle kuormitustapaukselle täytyy suorittaa oma erillinen analyysinsä. /13./

Esimerkkinä ratkaisumenetelmistä esitetään Newton-Raphson menetelmä, jota käytetään mm. epälineaaristen yhtälöiden ratkaisemisessa. Kuva 24 esittää ratkaisun etenemistä kahden ensimmäisen kuormitusinkrementin aikana.



Kuva 24. Newton-Raphson iterointi /14/.

Ensimmäisessä tasapainoiteraatioissa käytetään tangentiaalijäykkyyttä  $k_{ta}$  ratkaistaessa yhtälöä  $k_{ta}\Delta u = e_{PA}$ . Ratkaistu  $\Delta u$  sijoitetaan  $u_A$ :han, jolloin saadaan ratkaistua piste B. Pisteessä B on taas uusi voimaepätasapaino ja uusi tangentiaalijäykkyys. Kun voimaepätasapaino on riittävän pieni pisteessä 1, kasvatetaan voimaa edelleen arvoon  $P_2$ . Tämän jälkeen suoritetaan jälleen edellä kuvattua iterointia, kunnes saavutetaan piste 2 riittävällä tarkkuudella. Kaikkien iteraatioiden tulokset yhdistämällä voidaan muodostaa approksimaatio todellisesta voima-siirtymäkäyrästä. /13./

Koska edellä esitellyssä menetelmässä tangenciaalinen jäykkyys täytyy päivittää jokaisella siirtymäinkrementillä, alkaa ratkaisuaika kasvaa ja sen seurauksena myös laskennan kustannukset kasvavat. Vaihtoehtoinen menetelmä on modifioitu Newton-Raphson, jossa käytetään samaa tangenciaalista jäykkyyttä useilla eri inkrementteillä. Haittana tässä menetelmässä edelliseen on hitaampi konvergointi, eli tarvitaan enemmän inkrementtejä. Ratkaisumenetelmä on silti huomattavasti nopeampi, koska tangenciaalisen jäykkyyden päivittäminen tapahtuu harvemmin. /15./

Edelliset menetelmät eivät pysty seuramaan voima-siirtymäkäyrää, jonka suunta muuttuu äkillisesti. Tangenciaalijäykkyyden muodostuessa nollassa tai negatiiviseksi Newton-Raphson menetelmän iteratiivinen ratkaisu alkaa divergoida. Tämä ongelma voidaan sivuuttaa esimerkiksi Riks-Wempner menetelmällä, joka perustuu Newton-Raphson menetelmään ja sen modifioituun tapaukseen. Riks-Wempner menetelmällä kyetään löytämään tasapainopolku voima-siirtymäkäyrän kriittisissä pisteissä. /16./

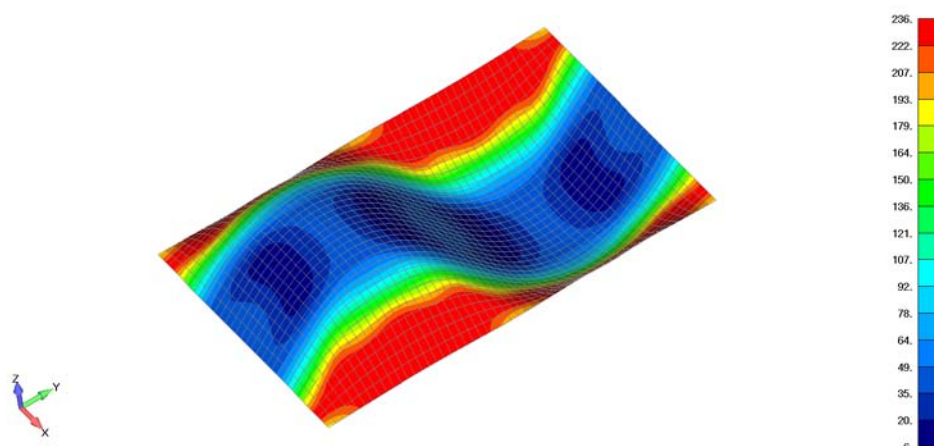
### 5.2.1 Geometrinen epätäydellisyyksien vaikutus

Elementtimallissa tarvittava muotovirheellinen geometria tuotetaan tavallisesti ominaisarvotehtävästä saatuna ratkaisuna, jolloin kriittisten lommahdusmuotojen amplitudit skaalataan sopivalla kertoimella vastaamaan 80 %:a geometrisista valmistustoleransseista. Ekvivalenttien geometrinen epätäydellisyyksien suuruus voidaan määrittää standardin SFS EN 1993-1-5 taulukon C.2 mukaisesti (taulukko 3).

Taulukko 3 Ekvivalentit geometriset epätäydellisyydet /5/.

Epätäydellisyyden tyyppi	Tarkasteltava osa	Muoto	Suuruus
Globaali	Sauva, jonka pituus on $\ell$	Kaareva	Ks. standardin EN 1993-1-1 taulukko 5.1
Globaali	Pituusjäykiste, jonka pituus on $a$	Kaareva	Pienempi arvoista ( $a/400$ , $b/400$ )
Paikallinen	Levykenttä tai osakenttä, jonka lyhyempi jänne on $a$ tai $b$	Lommahdusta vastaava muoto	Pienempi arvoista ( $a/200$ , $b/200$ )
Paikallinen	Jäykiste tai laippa, johon kohdistuu vääntö	Kiertyvästi kaareva	1 / 50

Geometrisen epätäydellisuuden suuruutta tutkitaan yksinkertaisen jäykistämättömän levykentän avulla. Levyä kuormitetaan levyn lyhyemmältä sivulta tasaisesti puristettuna ja kuormaa kasvatetaan portaittain edellä mainituin tavoin. Levyn mittoina on leveys 1000 mm, pituus 1600 mm ja paksuus 8 mm, jolloin levyn suhteellinen hoikkuus on edellisen luvun ominaisarvotekävän mukainen. Levyn hoikkuuden perusteella sillä on ylikriittistä kestävyyttä. Levyn geometrisen epätäydellisyys asetetaan vastaamaan levyn ensimmäistä lommahdusmuotoa. Geometriselle epätäydellisyydelle annetaan eri suuruuksia, jolloin saadaan esille suuruuden vaikutus levyn lommahduskestävyyteen. Levyn materiaalin myötörajana on 235 MPa ja malli sisältää nyt kaikki epälineaarisuudet, eli materiaalin plastisuuden, geometriset epätäydellisyydet ja suurten siirtymien teorian. Levy on reunoiltaan nivelellisesti tuettu. Voima- muodonmuutoskäyrältä saadaan määritettyä levyn suurin puristuskuormitus. Tutkitun levyn ensimmäinen lommahdusmuoto on kuvan 22 kaltainen. Kuvassa 25 esitetään levyn Von-Mises kalvojäännitys jakauma, kun levy on saavuttanut suurimman puristuskuormituksen.

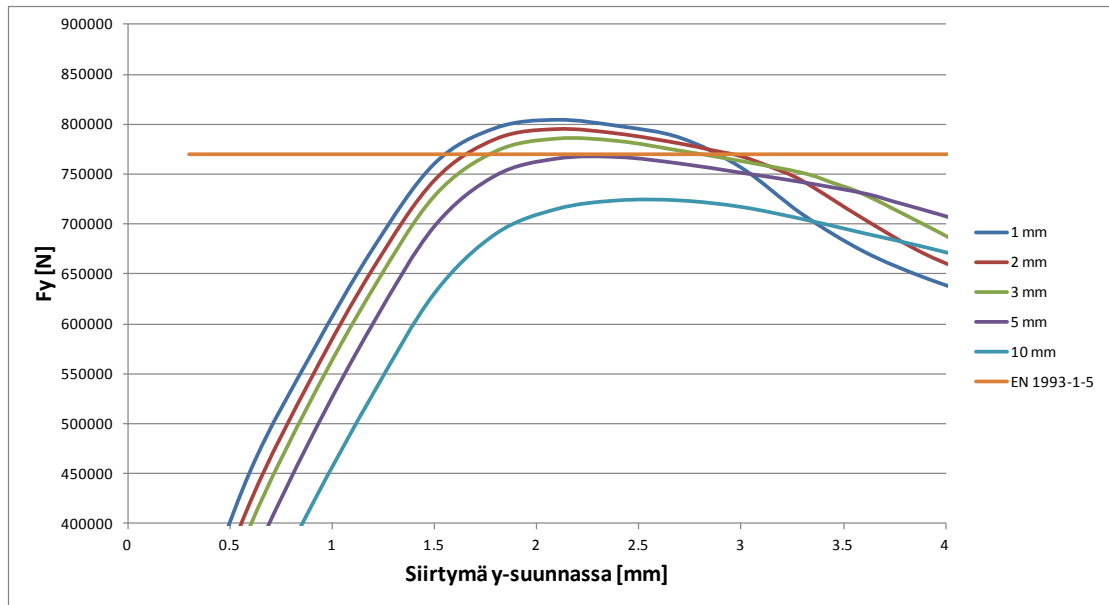


Kuva 25. Levyn Von-Mises kalvojäännitys jakauma [MPa]

Levyn suhteellisesta hoikkuudesta johtuen ylikriittinen kapasiteetti on havaittavissa jännitys jakaumasta. Levyn keskialue on lähes jännityksetön, kun taas levyn reuna-alueet ovat myötäneet lähes täysin.

Kuvassa 26 esitetään erisuuruisten geometristen epätäydellisyyksien vaikutus levyn puristuskapasiteettiin. Kuvaajan pystyakselilla on puristuskuorma ja vaaka-akselilla

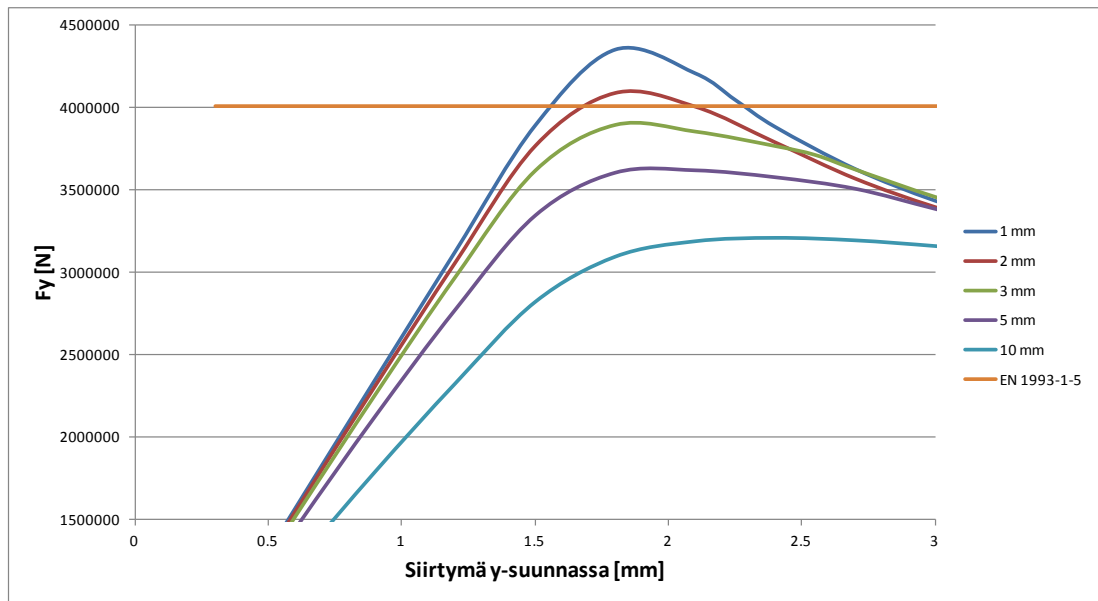
levyn pituussuuntainen siirtymä. Standardin EN1993-1-5 mukainen analyttinen laskenta esitetään liitteessä 2.



Kuva 26. Hoikan levyn puristuskestävyys.

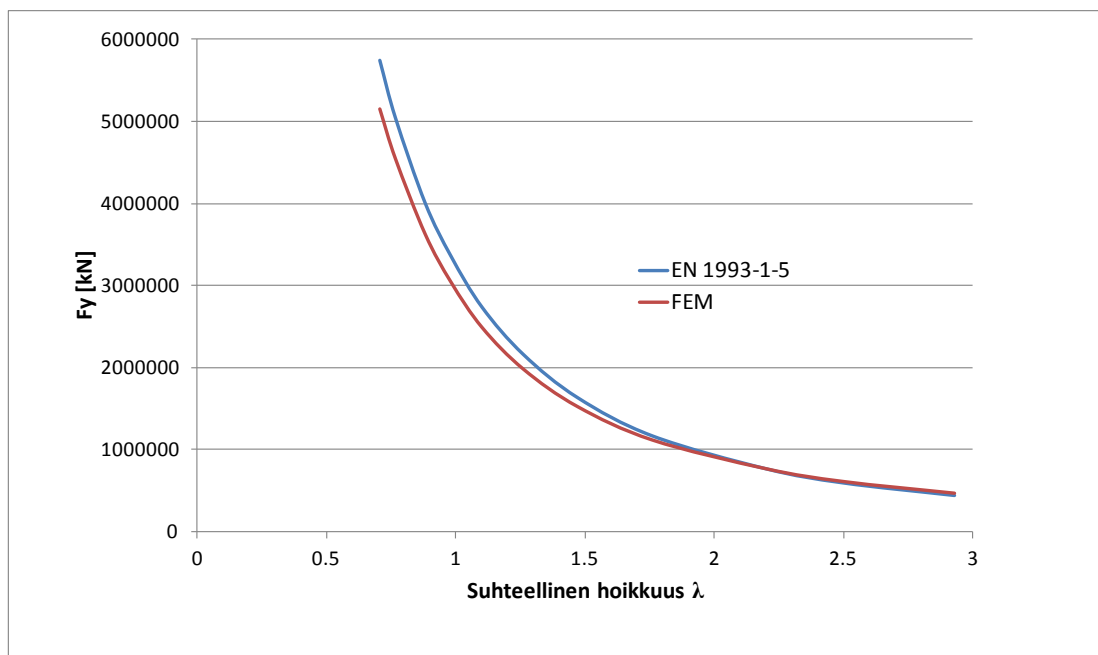
Kuvasta voidaan havaita 5 mm geometrisella epätäydellisyydellä saavutettavan puristuskestävyyden vastaavan melko tarkasti standardin EN1993-1-5 mukaista analyttistä puristuskestävyyden arvoa. Tämä 5 mm geometrinen epätäydellisyys vastaa standardin mukaista epätäydellisyyden arvoa  $b/200$ .

Kasvatettaessa levyn paksuutta 20 mm:iin siirtyy levyn suhteellinen hoikkuus keskihoikkien levyjen alueelle, jolloin levyllä ei ole enää ylikriittistä kapasiteettia, vaan levyssä tapahtuu lommahdus kimmoteorian mukaista kriittistä jännitystä pienemmillä kuormilla. Kuvassa 27 esitetään geometrinen epätäydellisyyksien vaikutus keskihoikallevyille.



Kuva 27. Keskihoikan levyn puristuskestävyys.

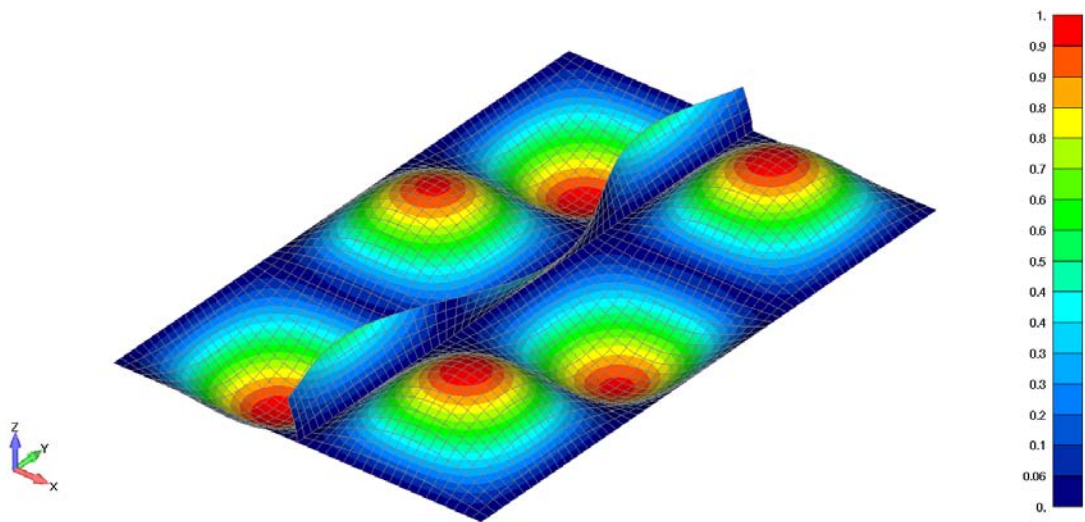
Keskihoikan levyn tapauksessa standardin mukainen geometrinen epätäydellisyys 5 mm antaa n.10 % pienemmän kestävyuden. Levyn geometrisen epätäydellisuuden suuruuden ja kriittisen kuorman vastaavuuteen vaikuttaa siis levyn suhteellinen hoikkuus. Suhteellisen hoikkuuden vaikutusta esitetään kuvassa 28.



Kuva 28. Suhteellisen hoikkuuden vaikutus.

Keskihoikilla levyillä saavutetaan epälineaarilla analyysillä pienempi kapasiteetti kuin analyttisellä laskennalla. Hoikilla levyillä taas epälineaarisen ratkaisun tulos taas vastaa melko tarkasti analyttisen laskennan tulosta. Näiden tulosten perusteella voidaan todeta epälineaarisen ratkaisun antavan varmallalla puolella olevia tuloksia, kun käytetään standardin mukaista geometrinen epätäydellisyyttä.

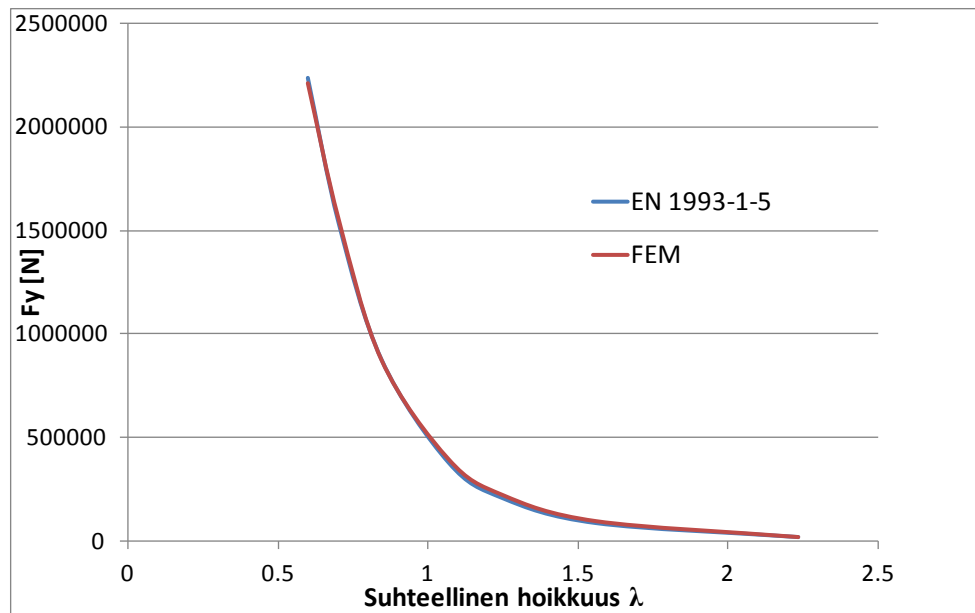
Edellä olevan jäykistämättömän levykentän lisäksi tutkitaan jäykistettyä levykenttää, jossa geometrinen epätäydellisyytenä käytetään standardin mukaista muotovirhettä. Levyn leveys- ja pituusmitat ovat samat kuin edellä, mutta lisäksi levyssä on keskellä yksi pituussuuntainen 100 mm korkea jäykiste. Myös jäykisteelle käytettiin ensimmäisen lommahdusmuodon mukaista epätäydellisyyttä. Pituussuunnassa jäykistetyn levykentän ensimmäinen lommahdusmuoto esitetään kuvassa 29. Myös levyn reunaehdot ja kuormitukset ovat samanlaiset kuin edellä, sekä levyn materiaalin myötöraja on 235 MPa.



Kuva 29. Jäykistetyn levykentän ensimmäinen lommahdusmuoto.

Pituussuuntainen jäykiste jakaa levykentän kahteen osaan pituussuunnassa, jolloin puoli-aaltoja muodostuu pituussuunnassa kolme edellisen kahden sijaan. Levykentän suhteellista hoikkuutta varioitiin muuttamalla levyn ja jäykisteen paksuutta. Kuten edellä, tuloksia verrattiin standardin mukaiseen analyttiseen laskentaan, joka esitetään liitteessä

3. Kuvassa 30 verrataan epälineaarisen analyysin ja analyttisen laskennan tuloksia suhteellisen hoikkeuden vaihdellessa.



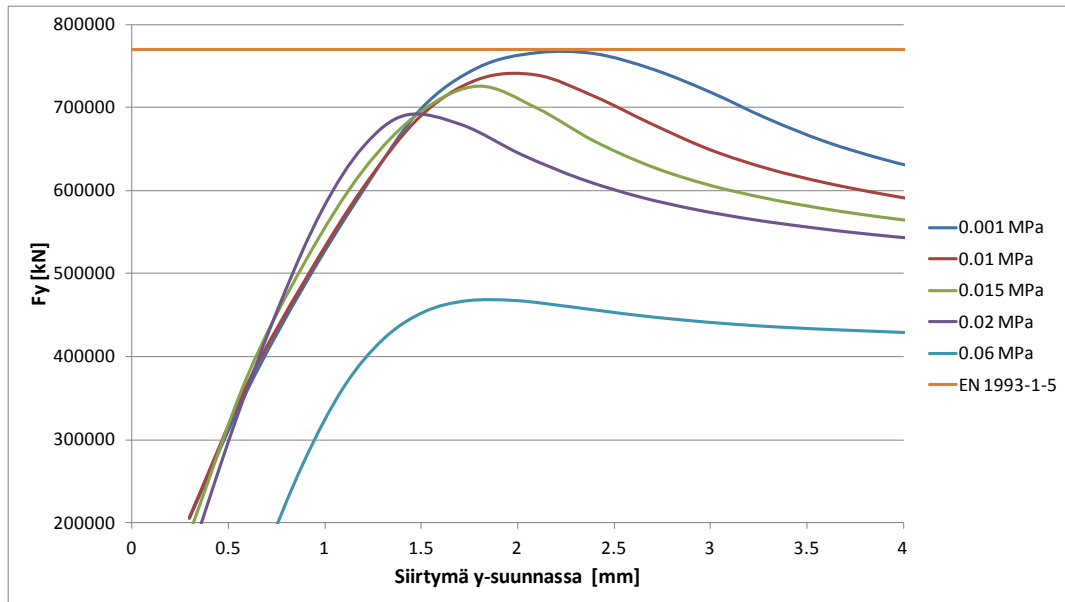
Kuva 30. Jäykistetyin levykentän puristuslujuus.

Molemmilla menetelmillä saadaan lähes sama tulos kuvan 30 mukaisesti. Näiden edellä olevien tulosten perusteella voidaan todeta standardin mukaisen geometrisen epätäydellisyyden ( $\min(b/200; a/200)$ ) käytön soveltuvan hyvin epälineaariseen ratkaisuun sekä jäykistämättömien että jäykistettyjen levykenttien tapauksessa.

### 5.2.2 Painekuorman vaikutus

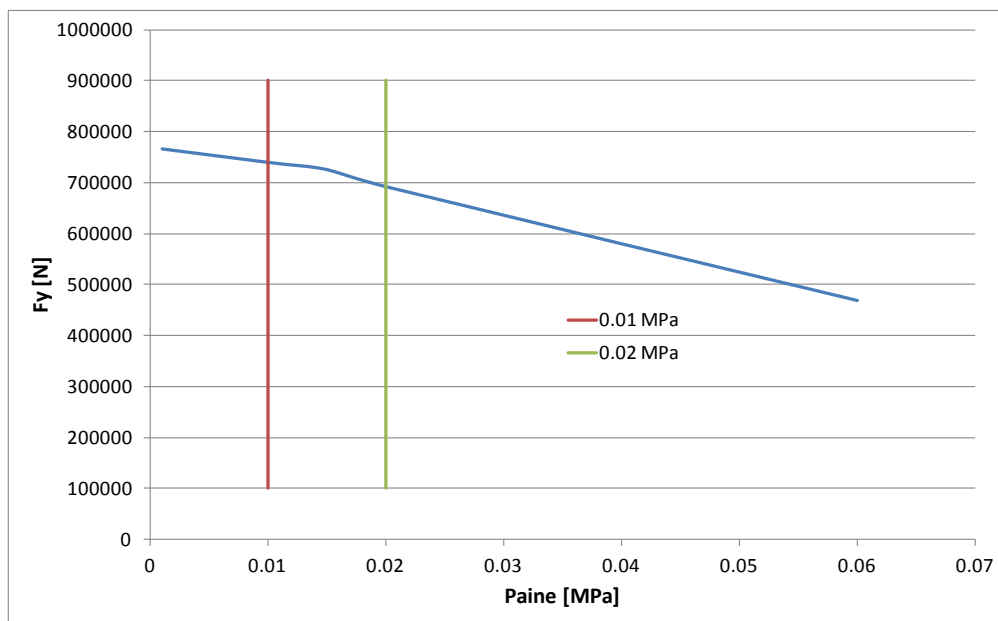
Painekuorma aiheuttaa levyyn taivutusta levyä vastaan kohtisuorassa suunnassa. Koska painekuorma aiheuttaa samansuuntaisia taipumia kuin lommahdusmuodossa syntyvät taipumat, on painekuorma otettava huomioon lommahduskestävyyden laskennassa. Paine kuorman vaikutusta puristuskestävyyteen tutkitaan edellä olevalla jäykistämättömällä levykentällä. Levykenttä sisältää standardin mukaiset geometriset epätäydellisyydet edellä olevan tavoin. Kuvassa 31 esitetään 8 mm paksun levyn puristuskestävyys painekuorman vaihdellessa. Levyä kuormitetaan ensin painekuormalla, jonka jälkeen lisätään

tasainen puristuskuorma. Toisessa vaiheessa vaikuttaa paine ja puristus, jolloin saadaan määritettyä puristuskestävyys näiden kuormien yhteisvaikutuksesta.



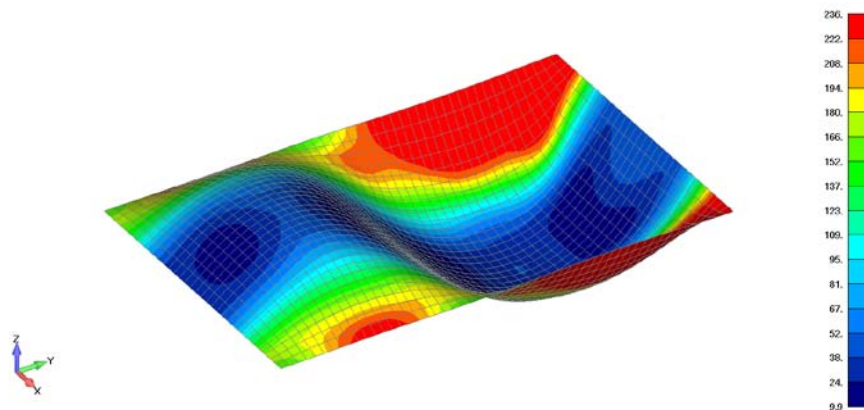
Kuva 31. Paineen vaikutus.

Levyn puristuskestävyys esitetään kuvassa 32 paineen funktiona.



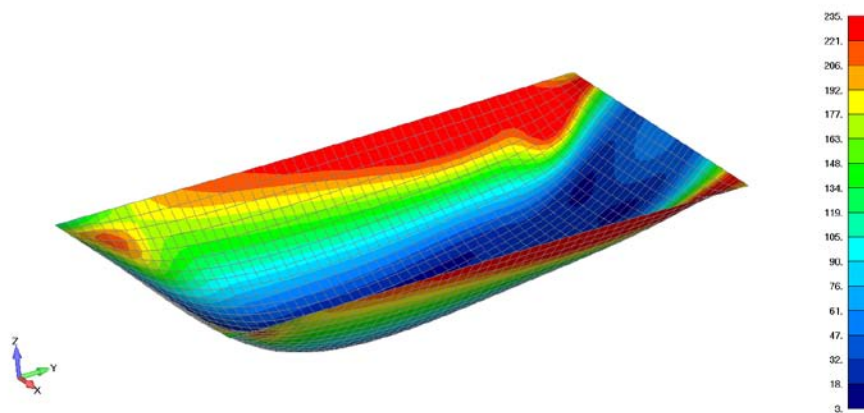
Kuva 32. Puristuskestävyys.

Kyseisen esimerkkilevyn puristuskestävyys laskee lähes lineaarisesti aina paineen arvoon 0,15 MPa asti. Tämän jälkeen tapahtuu pieni muutos, jonka jälkeen kestävyys laskee yhä jyrkemmin, mutta kuitenkin suhteellisen lineaarisesti. Kestävyiden muutosta voidaan selittää seuraavien kuvien avulla. Paineen ollessa 0,01 MPa on levyn lommahduttanut muoto säilyttänyt ensimmäisen lommahdusmuodon mukaisen kahden puoliaallon taipumamuodon (kuva 33).



*Kuva 33.* Levyn lommahdusmuoto ja Von-Mises kalvojäännitys jakauma [MPa].

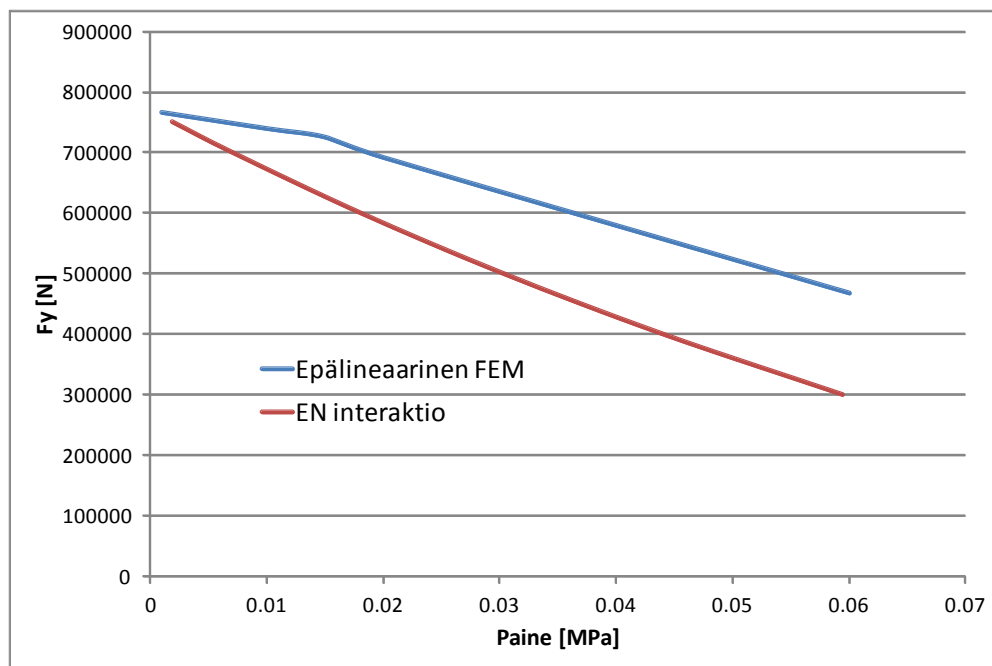
Paineen kasvaessa arvoon 0,02 MPa ei lommahduttanut muoto enää ole taipunut ensimmäisen lommahdusmuodon mukaisesti, vaan lommahdusmuoto on yhden puoliaallon mukainen (kuva 34).



*Kuva 34.* Levyn lommahdusmuoto ja Von-Mises kalvojäännitys jakauma [MPa].

Lisäksi on havaittava, että vaikka painekuorma parantaisi levyn puristuskapasitettia muuttamalla levyn lommahdusmuodon yhteen puoliaaltoon, niin samalla levyn taipuma kasvaa painekuorman kasvaessa, joka taas pienentää levyn puristuskapasiteettiä. Näin ollen levykenttä käyttäytyy samankaltaisesti kuin aiemmassa tapauksessa, jossa tutkittiin geometrisen muotovirheen vaikutusta puristuskapasiteettiin. Muotovirheen, eli tässä tapauksessa alkutaipuman, kasvaessa puristuskapasiteetti heikkenee.

Painekuorman vaikutus voidaan ottaa huomioon myös ilman epälineaarista analyysiä soveltamalla aiemmin esiteltyjä interaktiokaavoja 31 ja 32. Näin menetellen summataan eri kuormitusten aiheuttamat käyttöasteet lineaarisesti, jolloin saadaan kokonaiskäyttöaste. Tämän kokonaiskäyttöasteen avulla varmistetaan, ettei lommahdus pääse syntymään. Edellä kuvatulla tavalla saatua puristuskestävyyttä esimerkkilevyssä esitetään kuvassa 35. Käyttöasteiden laskenta Eurokoodin sovelletulla yhteisvaikutuskaavalla (kaava 34) esitetään liitteessä 4.

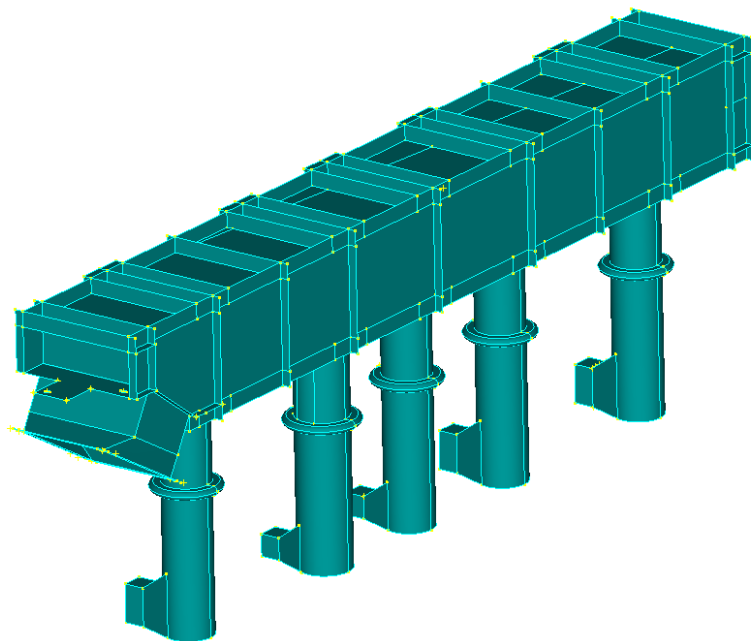


Kuva 35. Puristuskestävyys eri menetelmillä painekuorman vaikuttaessa.

## 6 ILMAKANAVAN LASKENTA

### 6.1 Ilmakanavan rakenne

Analysoitavan ilmakanavan rakenne on esitetty kuvassa 36. Ilmakanava toimii kattilan sekundääri- ilmakanavana, sekä kehyspalkkina. Ilmakanavan suutinputket on sijoitettu kanavan alapuolelle.



Kuva 36. Sekundääri- ilmakanava.

Ilmakanava on tuettu kymmenestä eri pisteestä ja tuentakohdat on sijoitettu suuttimien kohdalle paikkaan, jossa on lähekkäin kolme poikittaisjäykistettä. Tuentapisteet ovat kanavan ylä- ja alareunoilla. Lisäksi kanava on tuettu päistään niveltappi mekanismilla, jolloin kanava toimii niveltuettuna palkkina. Kanavan tuennat myös sallivat rakenteen lämpölaajenemisen sekä pituus- että korkeussuunnassa. Kanavan pituus on 6400 mm, korkeus 600 mm ja leveys 800 mm.

Rakenteen materiaalina on S235JRG2 ja rakenteessa vaikuttaa lämpötila 200 °C. Tämän lämpötilan johdosta materiaalin myötörajaksi saadaan EN 10082-2 /17/ mukaisesti 182 MPa, sekä materiaalin kimmomoduuliksi 195 GPa EN12952-3 /18/ mukaisesti. Sallittu

jännityksen arvo lineaaris-elastisessa tapauksessa on 121 MPa /18/. Jännitykset rakenteessa rajoitetaan niin, ettei nurkkiin pääse syntymään plastisia niveliä. Tämän vuoksi taivutusjännitysten pitää nurkissa jäädä myötörajan alapuolelle. Taipumarajaksi koko rakenteelle asetetaan  $L/300$ .

## 6.2 Kuormitukset

Ilmakanava toimii sekundääri – ilman puhaltamisen lisäksi kehyspalkkina, jolloin tulipesän paineesta aiheutuu kanavaan tasainen viivakuorma, joka taivuttaa kehyspalkkina toimivaa ilmakanavaa. Kanava taipuu tulipesän ylipaineella tulipesästä ulospäin ja alipaineella tulipesää kohti.

Ilmakanavassa vaikuttaa joko ylipaine 9 kPa tai alipaine 3 kPa. Tulipesän paineena laskennassa käytetään 5 kPa. Tulipesän paineesta aiheutuvat kynsivoimat kanavan tuentakohtiin lasketaan jatkuvan palkin avulla ja jakauma otaksutaan seuraavanlaisiksi:

- Kanavan keskellä 14 % kokonaisvoimasta
- Molemmilla puolilla keskellä olevaa tuentaa 22 % kokonaisvoimasta (yhteensä 44 %)
- Reunimmaisissa tuentapisteissä 21 % kokonaisvoimasta
- (yhteensä 42 %)

Kehyspalkkivälinä laskennassa käytetään 3500 mm. Tästä seuraa painepinta-alaksi 3500 mm \* 6400 mm. Tämän painepinta-alan ja tulipesän paineen avulla saadaan kanavaa taivuttavaksi kokonaisvoimaksi 112 kN.

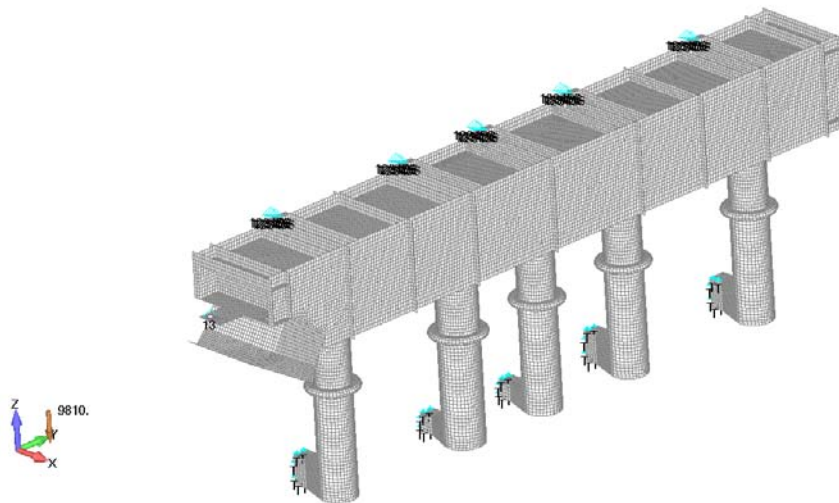
Näistä kuormituksista lasketaan neljä erilaista kuormitustapausta:

- Ylipaineen aiheuttamat kuormitukset
- Alipaineen aiheuttamat kuormitukset
- Lommahdulaskenta ylipaineella, jossa korotettu kynsivoimia 1,5:llä
- Lommahdulaskenta alipaineella, jossa korotettu kynsivoimia 1,5:llä

### 6.3 Rakenteen elementtimalli

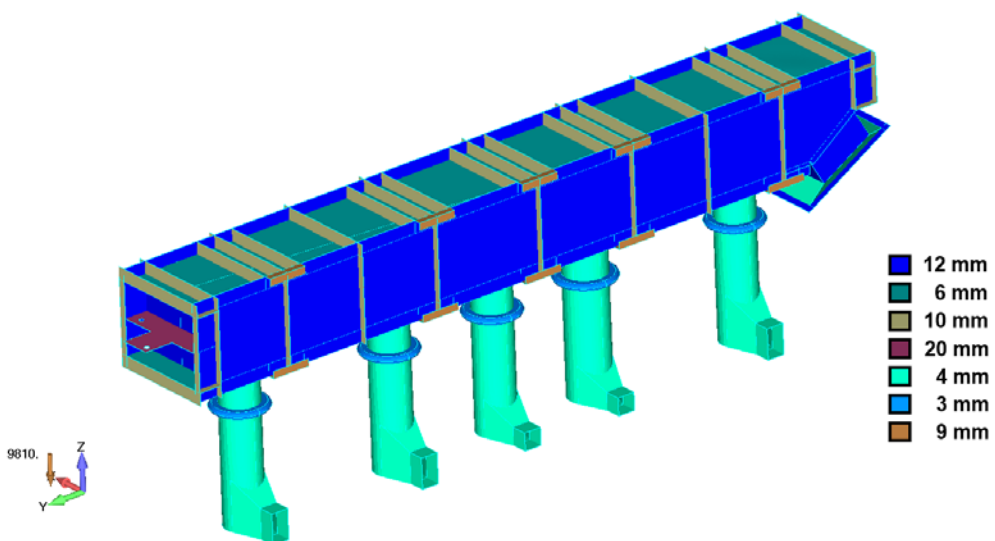
Ilmakanavan levyosat mallinnettiin kuorielementein ja tuentapisteiden kohdat gap-tyyppisillä epälineaarisilla elementeillä, jotka ottavat vastaan ainoastaan puristuskuormaa. Rakenne on tuettu kanavan tuentapisteiden lisäksi ilmasuuttimien alaosista nivelellisesti, sekä ilmakanavan päädyistä sallien rakenteen pituussuuntaisen liikkeen. Rakenteen elementtimalli esitetään kuvassa 37 ja rakenteen levynvahvuudet kuvassa 38. Painekuormat on asetettu elementtikuormina ja kynsivoimat solmuvoimina.

V1  
L5  
C1



Kuva 37. Elementtimalli.

V1  
L5  
C1



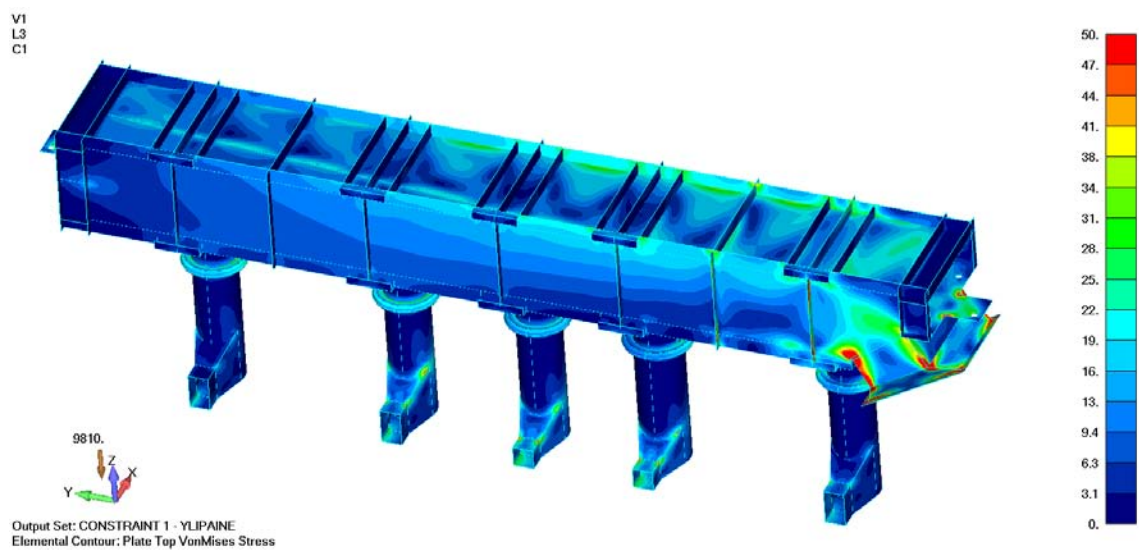
Kuva 38. Levynvahvuudet.

## 6.4 Rakenteen kestävyys

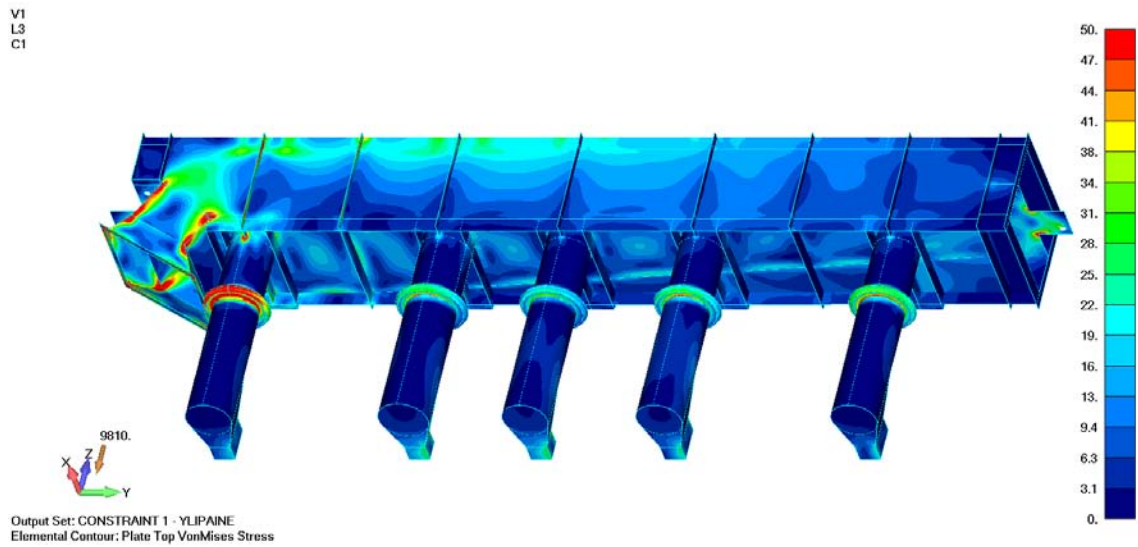
Tuloksina esitetään rakenteen jännitykset ja siirtymät kuormitustapauksissa, jossa vaikuttaa yli- tai alipaine. Lisäksi esitetään lommahdulaskennan tulokset sekä epälineaarisella analyysillä että käyttäen lineaarista stabiiliusanalyysiä ja hyödyntämällä Eurokoodin yhteisvaikutuskaavoja.

### 6.4.1 Ylipaine

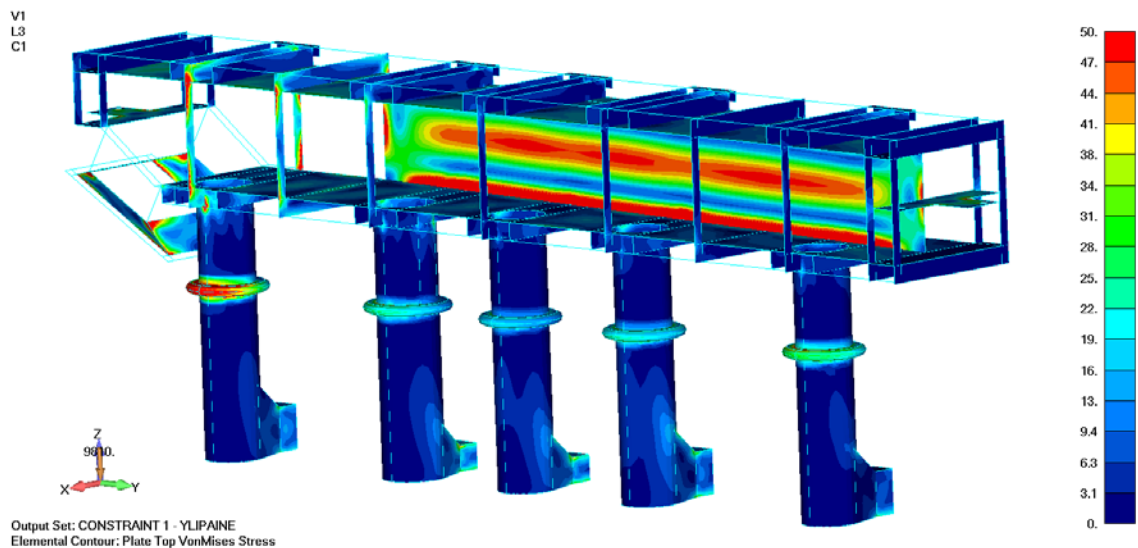
Rakenteen Von-Mises vertailujännitykset ylipaineen vaikuttaessa esitetään kuvissa 39, 40 ja 41. Jännitystaso on n.50 MPa, joten jää selvästi alle sallitun 121 MPa. Varmuutta sallittuihin jännityksiin jää n.  $121/50 = 2.4$ .



Kuva 39. Von-Mises jännitykset. Jännitystaso n.50 MPa.

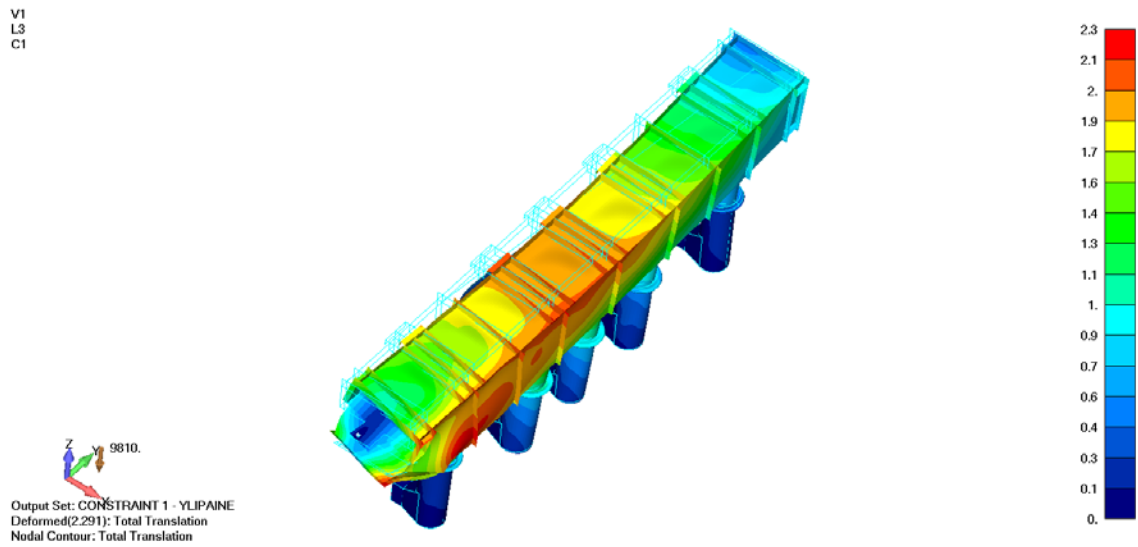


Kuva 40. Von-Mises jännitykset. Jännitystaso n.50 MPa.



Kuva 41. Von-Mises jännitykset. Jännitystaso n.50 MPa.

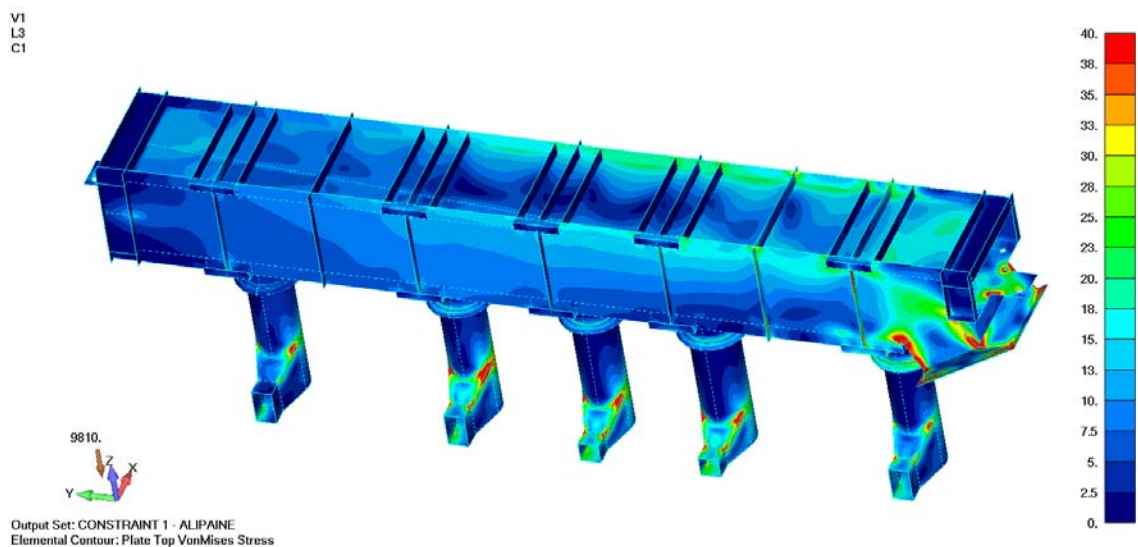
Rakenteen kokonaissiirtymät esitetään kuvassa 42. Kuvasta näkyy, kuinka kynsivoimat työntävät kanavaa tulipesästä ulospäin. Deformaation maksimiarvo rakenteessa on n. 2.3 mm, joten siirtymät jäävät alle sallitun arvon  $6400/300 = 21.3$  mm.



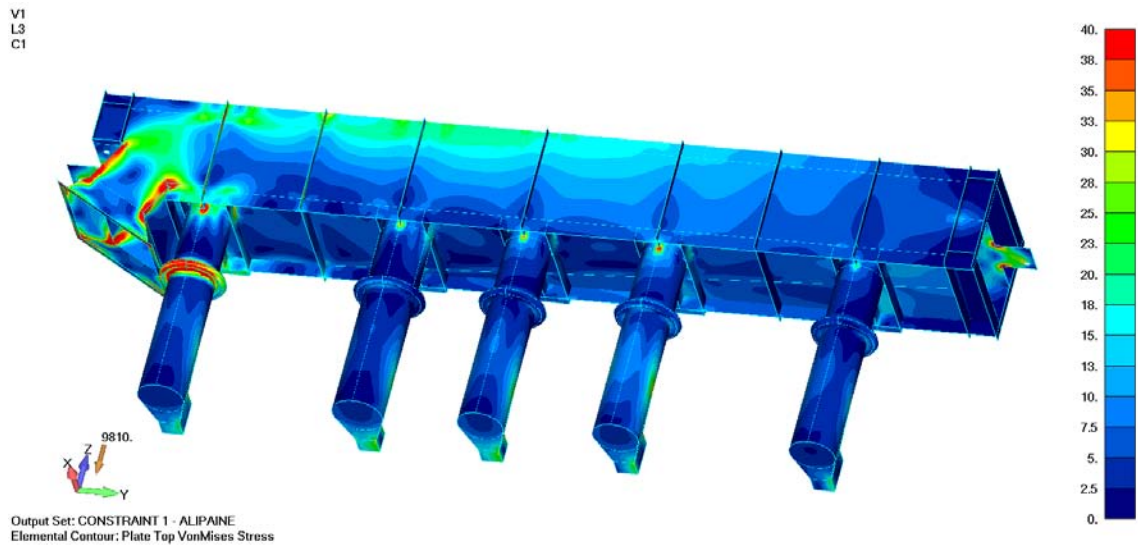
Kuva 42. Kokonaissiirtymät. Maksimiarvo n.2.3 mm. Deformaatio on esitetty 100-kertaisena.

### 6.4.2 Alipaine

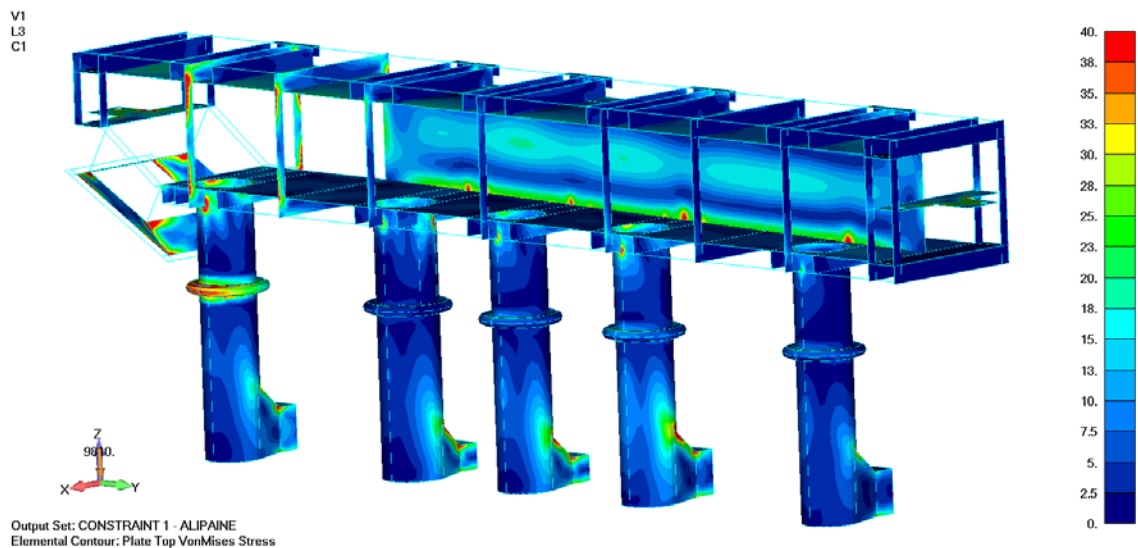
Rakenteen Von-Mises vertailujännitykset alipaineen vaikuttaessa esitetään kuvissa 43, 44 ja 45. Jännitystaso on n.40 MPa, joten selvästi alle sallitun 121 MPa. Varmuutta sallittuihin jännityksiin jää n.  $121/40 = 3.0$ .



Kuva 43. Von-Mises jännitykset. Jännitystaso n.40 MPa.

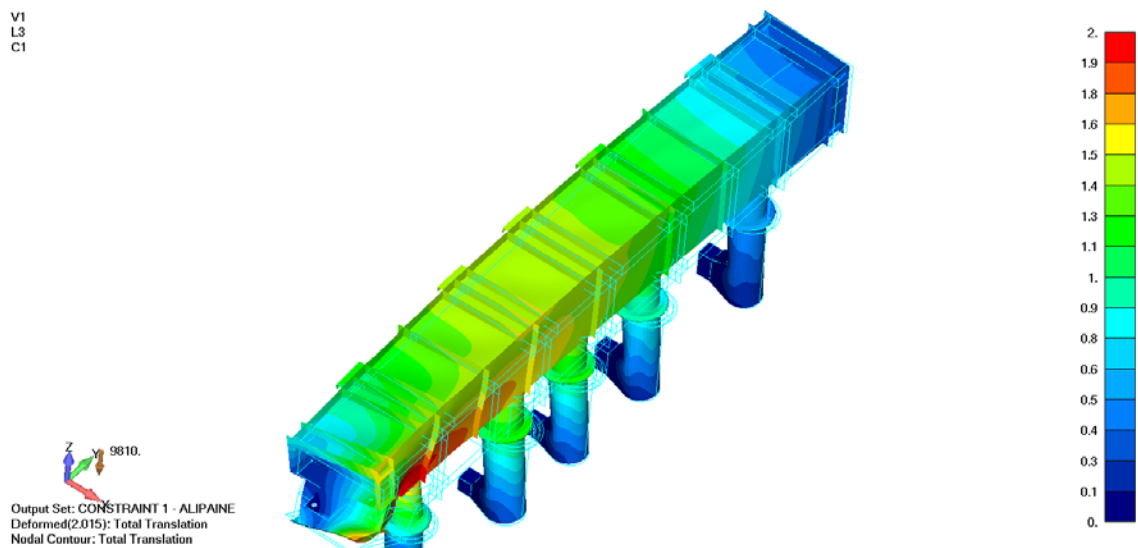


Kuva 44. Von-Mises jännitykset. Jännitystaso n.40 MPa.



Kuva 45. Von-Mises jännitykset. Jännitystaso n.40 MPa.

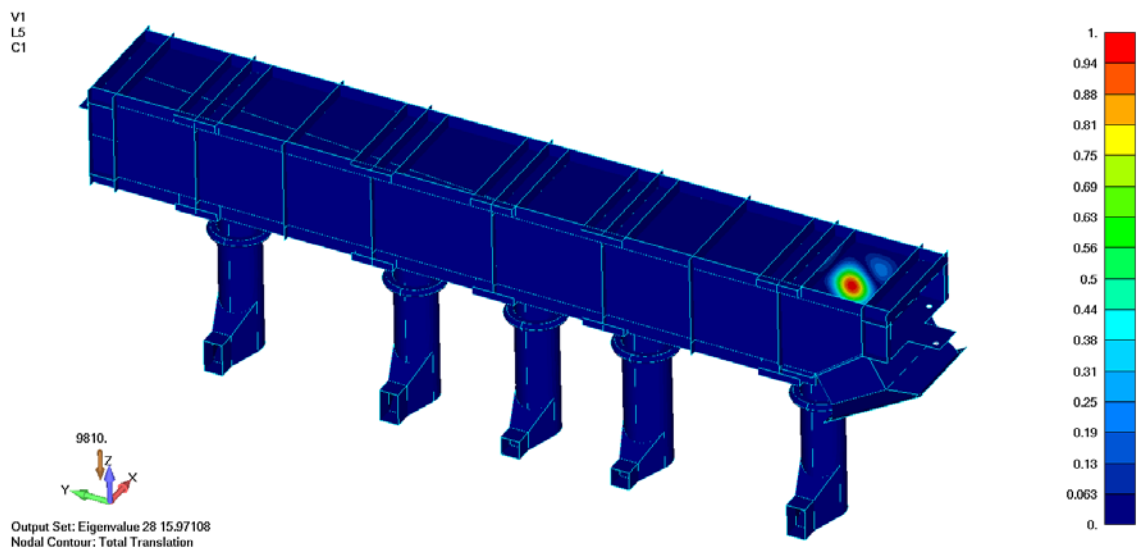
Rakenteen kokonaissiirtymät esitetään kuvassa 46. Kuvasta näkyy, kuinka kynsivoimat vetävät kanavaa tulipesää kohti. Deformaation maksimiarvo rakenteessa on n. 2.0 mm, joten siirtymät jäävät alle sallitun arvon  $6400/300 = 21.3$  mm.



Kuva 46. Kokonaissiirtymät. Maksimiarvo n.2.0 mm. Deformaatio on esitetty 100-kertaisena.

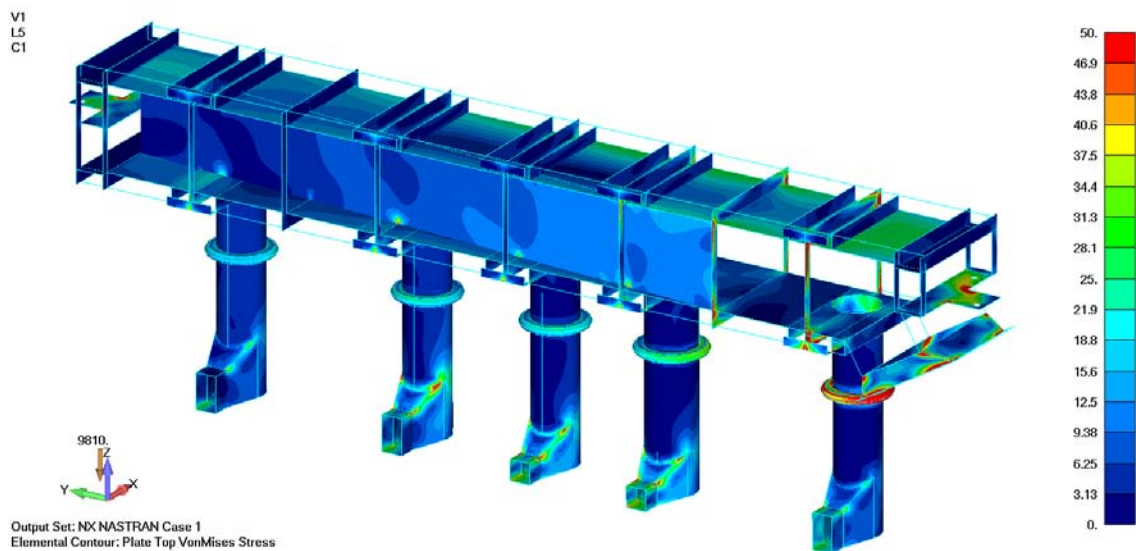
### 6.4.3 Lomahduslaskenta ylipaineella

Ensimmäiseksi tutkitaan rakenteen lomahduskestävyyttä lineaarisella stabiiliusanalyysillä ja hyödyntäen Eurokoodien laskentakaavoja. Rakenteelle suoritetaan lineaarinen stabiiliusanalyysi ja etsitään lomahduksen kannalta kriittisin ominaismuoto, joka esitetään kuvassa 47. Kriittinen ominaismuoto löytyy kanavan uumalevystä.



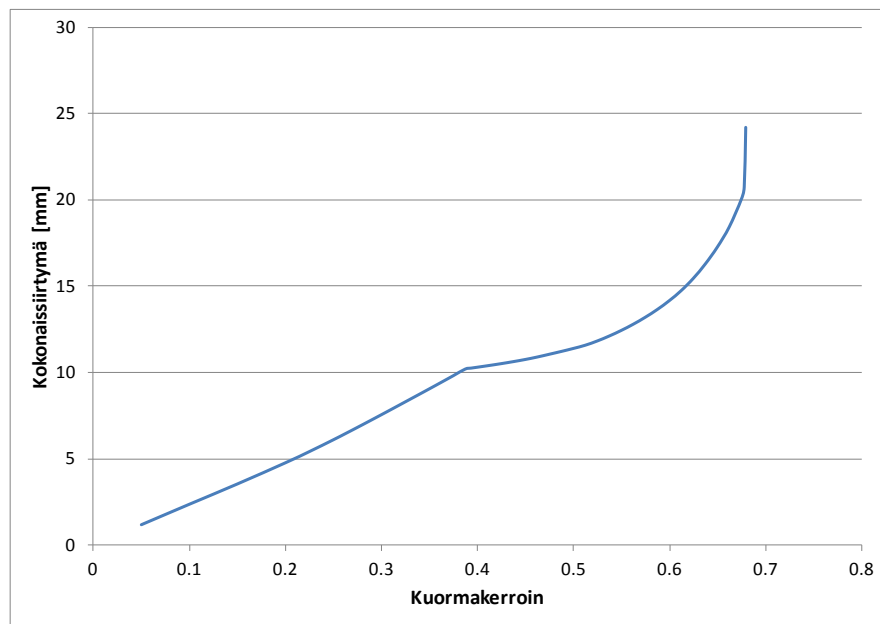
Kuva 47. Rakenteen kriittisin ominaismuoto lomahduksen suhteen.

Samalla lineaarisella ratkaisulla saadaan tulokseksi levykenttien Von-Mises kalvojäännitykset, jotka esitetään kuvassa 48. Kriittisen ominaismuodon omaavasta levykentästä poimitaan tuloksena saadut Von-Mises kalvojäännitykset, joita käytetään tutkittaessa levykentän lommahtamista Eurokoodin mukaisesti. Eurokoodin mukainen laskentaproseduuri esitetään liitteessä 5. Tuloksena saadaan lommahdusvarmuudeksi 5.2 tutkittaessa kanavan päädyssä olevaa levykenttää.



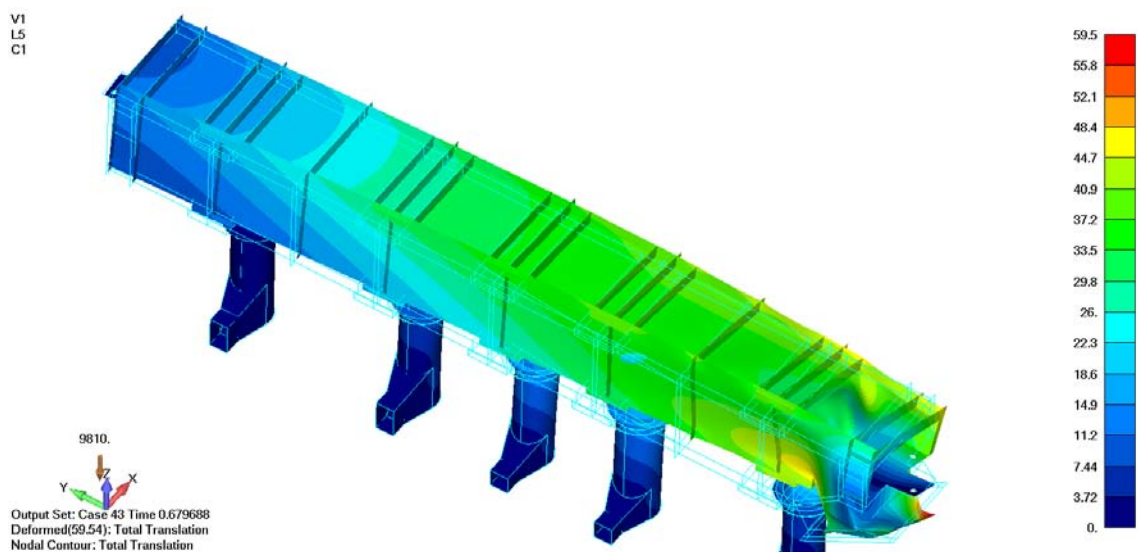
*Kuva 48.* Von-Mises kalvojäännitykset.

Seuraavaksi tutkitaan rakenteen lommahduskestävyyttä epälineaarisella analyysillä. Rakenteeseen on tuotettu ominaismuotoa vastaava geometrinen epätäydellisyys, kuten aiemmin on esitetty tutkittaessa yksittäistä levykenttää. Käytetty ominaismuoto on esitetty kuvassa 47. Kanavaa taivuttavat kynsivoimat annetaan 10- kertaisina, jolloin saadaan tuloksena kuormakerroin, jolla rakenne kestää lommahtamatta. Kuvassa 49 esitetään lommahtaneen levykentän alueella olevan solmun kokonaissiirtymät.



Kuva 49. Kokonaissiirtymä kuormakertoimen funktiona.

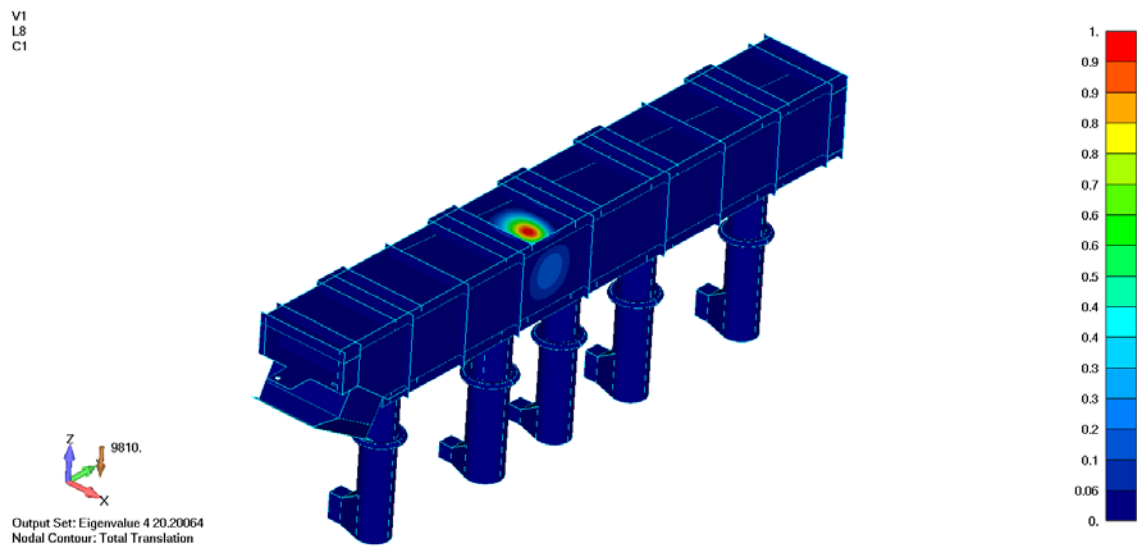
Kuvasta voidaan huomata muutos siirtymän kasvussa kuormakertoimen arvon ollessa n. 0.39, jolloin kanavan päädyssä olevan ilmasuuttimen palkeissa tapahtuu plastisoitumista. Kuormitusta voidaan vielä lisätä aina arvoon 0.67 asti, jolloin rakenne menettää stabiiliutensa. Tätä tilannetta esitetään kuvassa 50, jossa voidaan huomata lommahduksen tapahtuvan kuvassa 47 esitetyn ominaismuodon alueella. Tällöin koko rakenteen lommahdusvarmuudeksi ylipaineen vaikuttaessa saadaan 6.7.



Kuva 50. Kokonaissiirtymät. Deformaatio on esitetty 5- kertaisena.

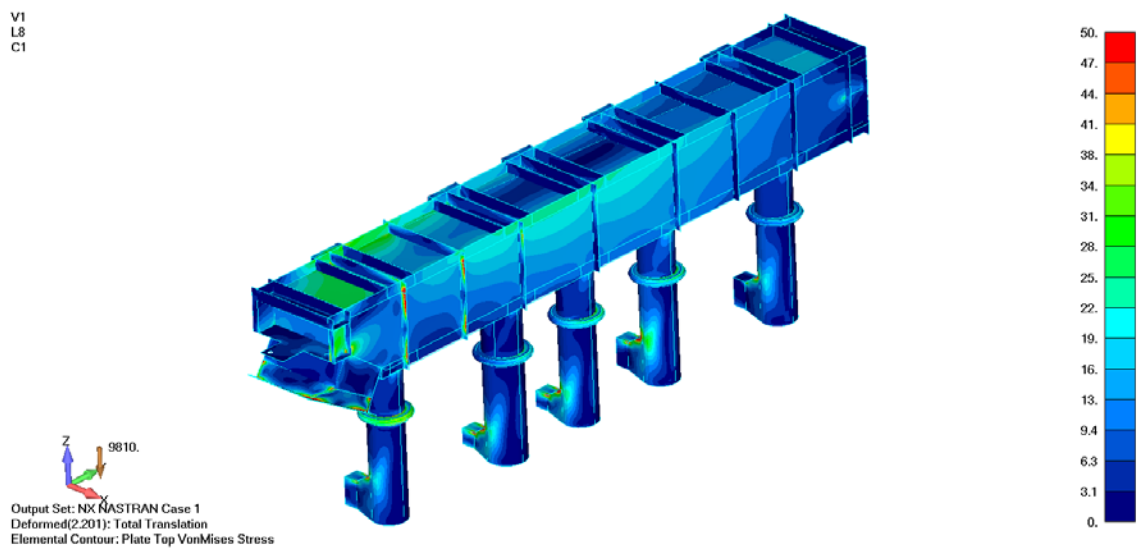
#### 6.4.4 Lommahduslaskenta alipaineella

Ensimmäiseksi tutkitaan rakenteen lommahduskestävyyttä lineaarisella stabiiliusanalyysillä ja hyödyntäen Eurokoodin laskentakaavoja kuten edellä. Rakenteelle suoritetaan lineaarinen stabiiliusanalyysi ja etsitään lommahduksen kannalta kriittisin ominaismuoto, joka esitetään kuvassa 51.



*Kuva 51.* Rakenteen kriittisin ominaismuoto lommahduksen suhteen.

Samalla lineaarisella ratkaisulla saadaan tulokseksi levykenttien Von-Mises kalvojännitykset, jotka esitetään kuvassa 52. Kriittisen ominaismuodon omaavasta levykentästä poimitaan tuloksena saadut Von-Mises kalvojännitykset, joita käytetään tutkittaessa levykentän lommahtamista Eurokoodin mukaisesti. Eurokoodin mukainen laskentaproseduuri esitetään liitteessä 6. Tuloksena saadaan lommahdusvarmuudeksi 6.7.

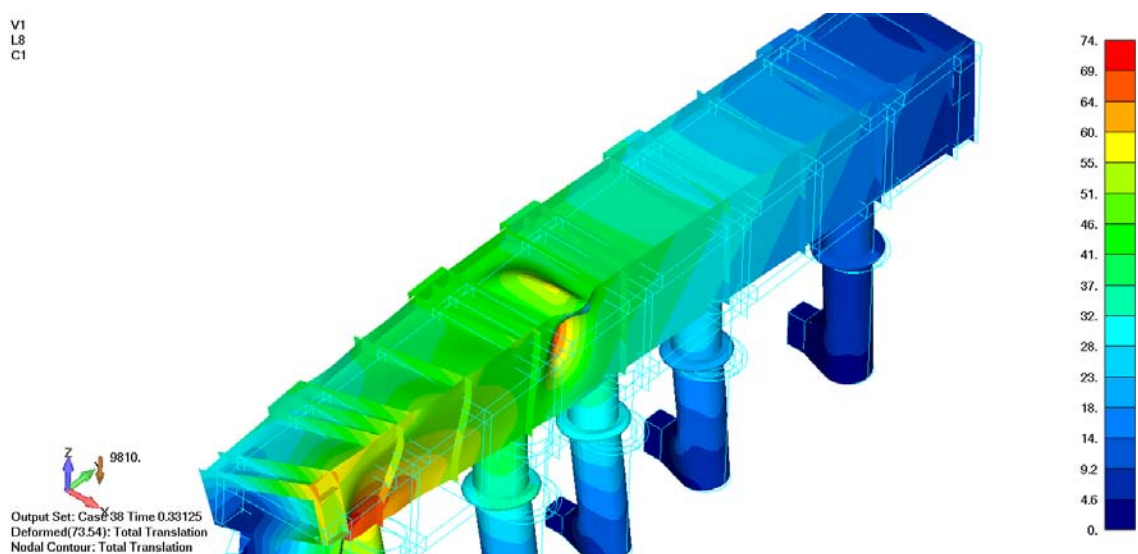


Kuva 52. Von-Mises kalvojännitykset.

Seuraavaksi tutkitaan rakenteen lommahduskestävyyttä epälineaarilla analyysillä.

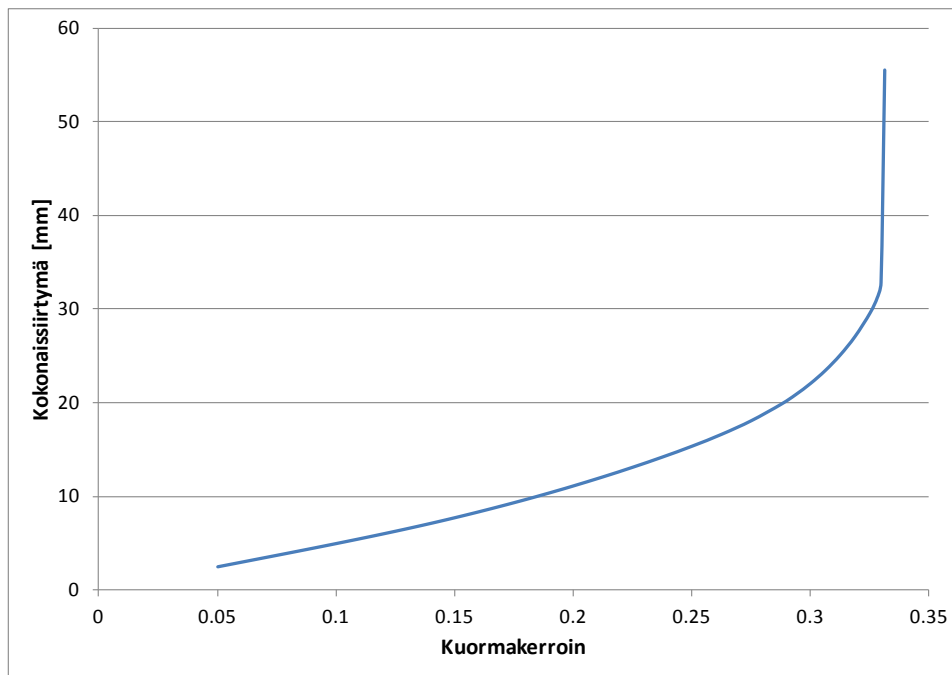
Rakenteeseen on tuotettu ominaismuotoa vastaava geometrinen epätäydellisyys. Käytetty ominaismuoto on esitetty kuvassa 51. Kanavaa taivuttavat kynsivoimat annetaan 20-kertaisina, jolloin saadaan tuloksena kuormakerroin, jolla rakenne kestää lommahtamatta.

Kuvassa 53 esitetään rakenteen deformaatio lommahtaneessa tilassa. Aiemmin esitetty ominaismuodon alue on lommahtanut ja rakenne on menettänyt stabiliteettinsa.



Kuva 53. Kokonaissiirtymät. Deformaatio on esitetty 5- kertaisena.

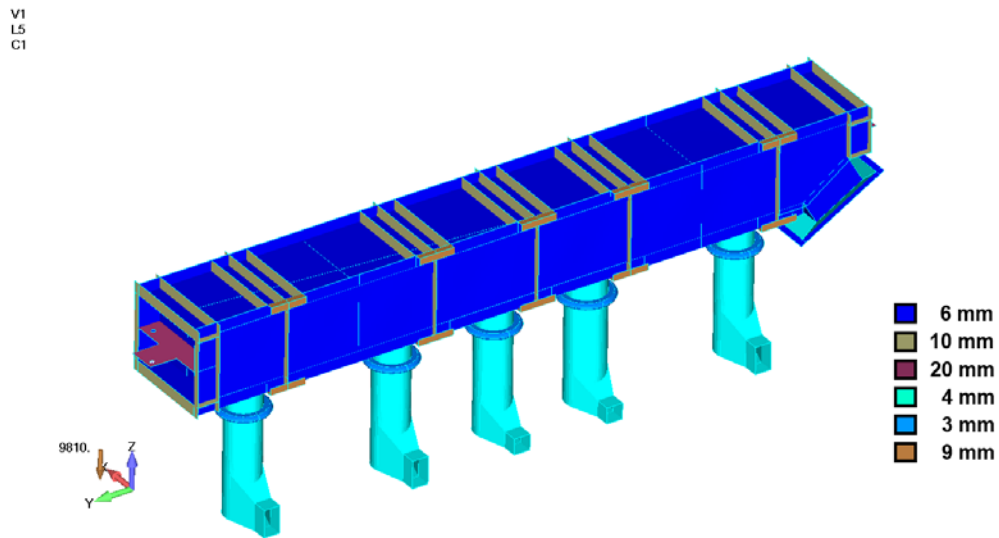
Kuvassa 54 on esitetty lommahtaneelta alueelta poimitun solmun kokonaissiirtymät kuormituksen funktiona. Kuvasta voidaan selvästi havaita stabiliteetin menetys kuormakertoimella 0.33. Tällä kuormakertoimella lommahdusvarmuudeksi saadaan 6.7.



Kuva 54. Kokonaissiirtymä kuormakertoimen funktiona.

## 6.5 Kevennetyn rakenteen kestävyys

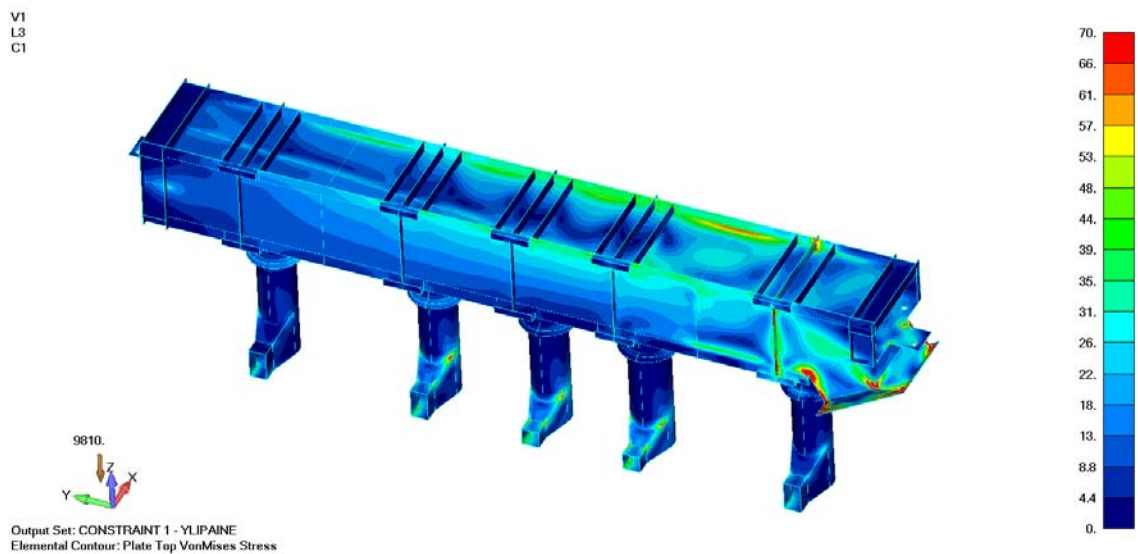
Edellä olevien tulosten perusteella jännitystaso ja lommahdusvarmuus sallivat rakenteen keventämisen. Rakenteen levynpaksuuksia voidaan pienentää ja osa poikittaisjäykisteistä poistaa. Nämä muutokset eivät saa kuitenkaan johtaa jännitystason huomattavaan nousuun tai stabiliteetin liian aikaiseen menettämiseen. Kuten edellä, tuloksina esitetään rakenteen jännitykset ja siirtymät kuormitustapauksissa, jossa vaikuttaa yli- tai alipaine. Lisäksi esitetään lommahduslaskennan tulokset sekä epälineaarilla analyysillä että käyttäen lineaarista stabiiliusanalyysiä. Kevennetyn rakenteen levynvahvuudet esitetään kuvassa 55.



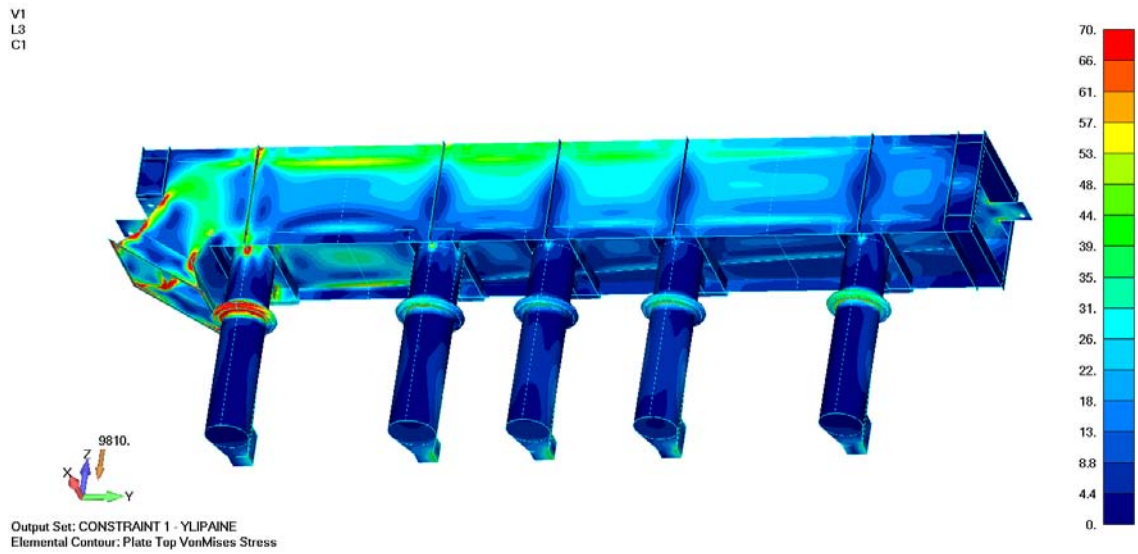
Kuva 55. Von-Mises jännitykset. Jännitystaso n.70 MPa.

### 6.5.1 Ylipaine

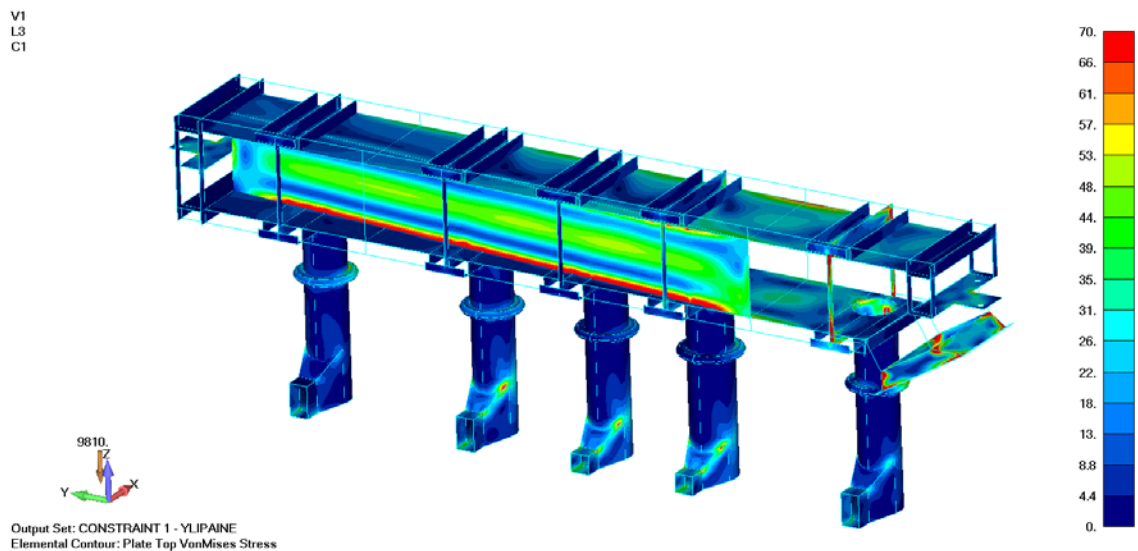
Rakenteen Von-Mises vertailujännitykset ylipaineen vaikuttaessa esitetään kuvissa 56, 57 ja 58. Jännitystaso on n.70 MPa, joten varmuutta sallittuihin jännityksiin jää n.  $121/70 = 1.7$ .



Kuva 56. Von-Mises jännitykset. Jännitystaso n.70 MPa.

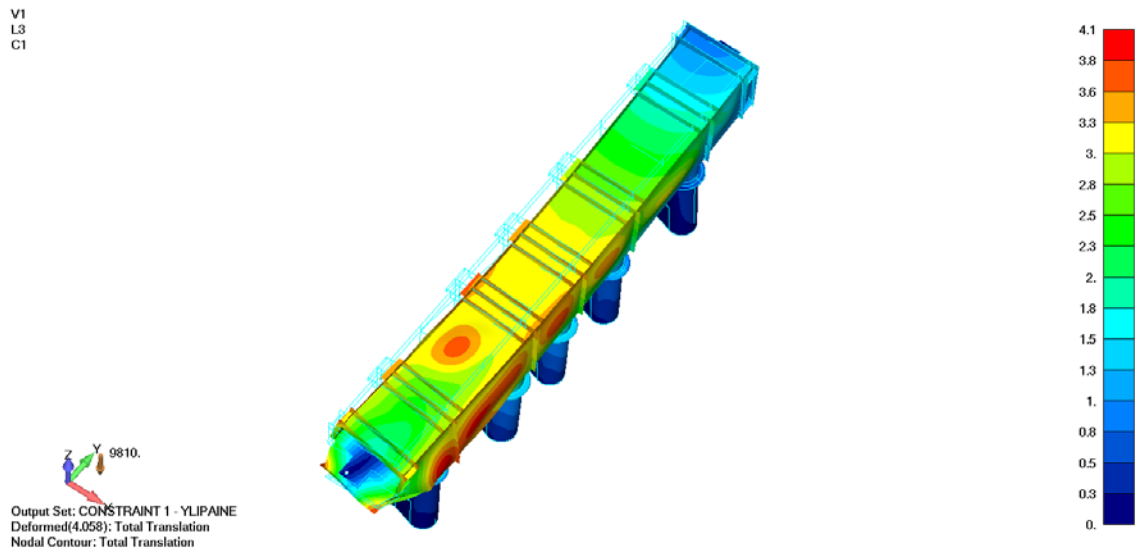


*Kuva 57.* Von-Mises jännitykset. Jännitystaso n.70 MPa.



*Kuva 58.* Von-Mises jännitykset. Jännitystaso n.70 MPa.

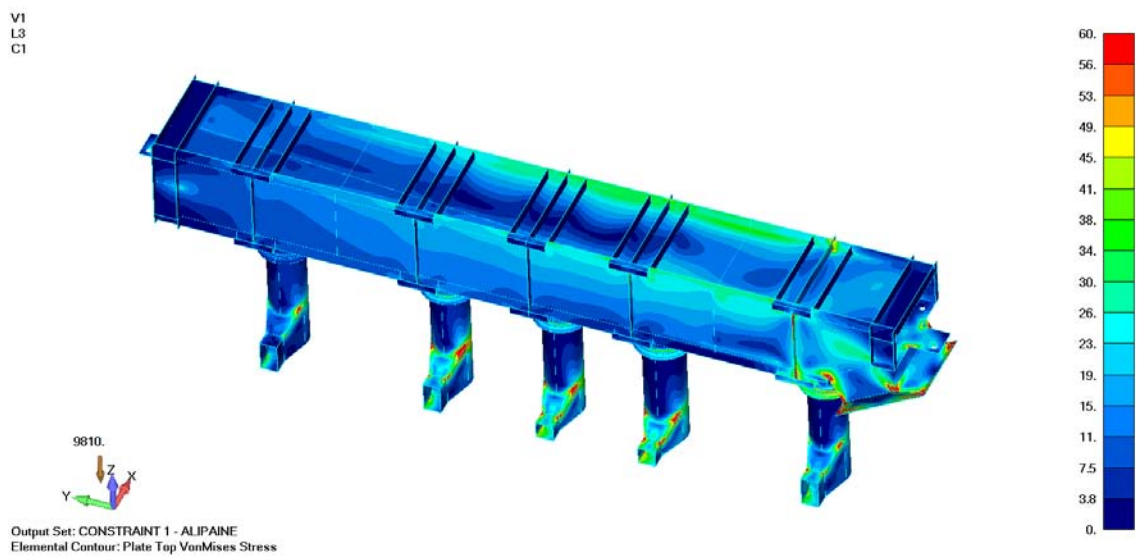
Rakenteen kokonaissiirtymät esitetään kuvassa 59. Deformaation maksimiarvo rakenteessa on n. 4.0 mm, joten siirtymät jäävät alle sallitun arvon  $6400/300 = 21.3$  mm.



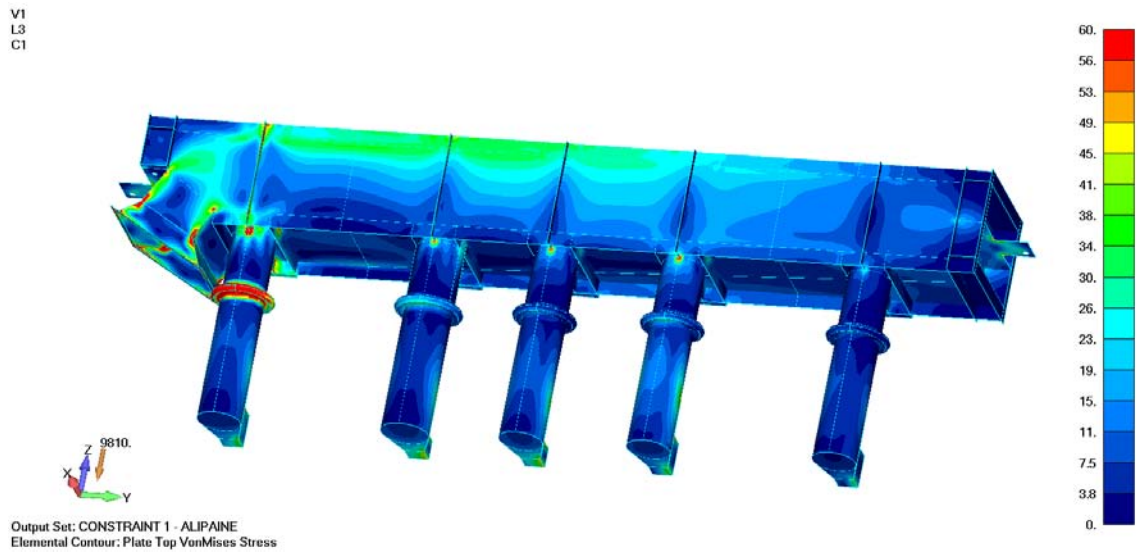
*Kuva 59.* Kokonaissiirtymät. Maksimiarvo n.4.0 mm. Deformaatio on esitetty 50-kertaisena.

### 6.5.2 Alipaine

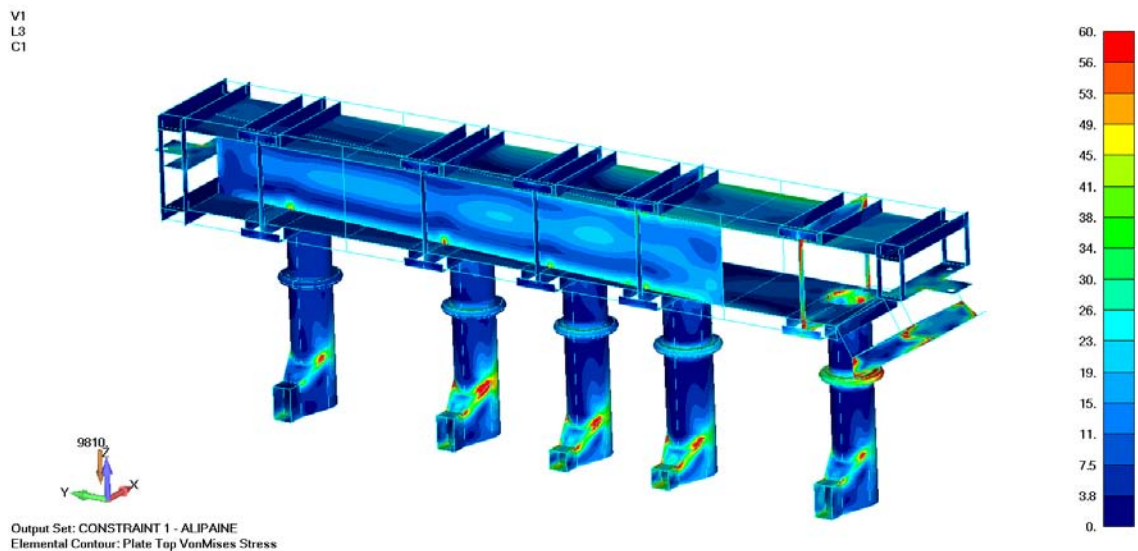
Rakenteen Von-Mises vertailujännitykset alipaineen vaikuttaessa esitetään kuvissa 60, 61 ja 62. Jännitystaso on n.60 MPa. Varmuutta sallittuihin jännityksiin jää n.  $121/60 = 2.0$ .



*Kuva 60.* Von-Mises jännitykset. Jännitystaso n.60 MPa.

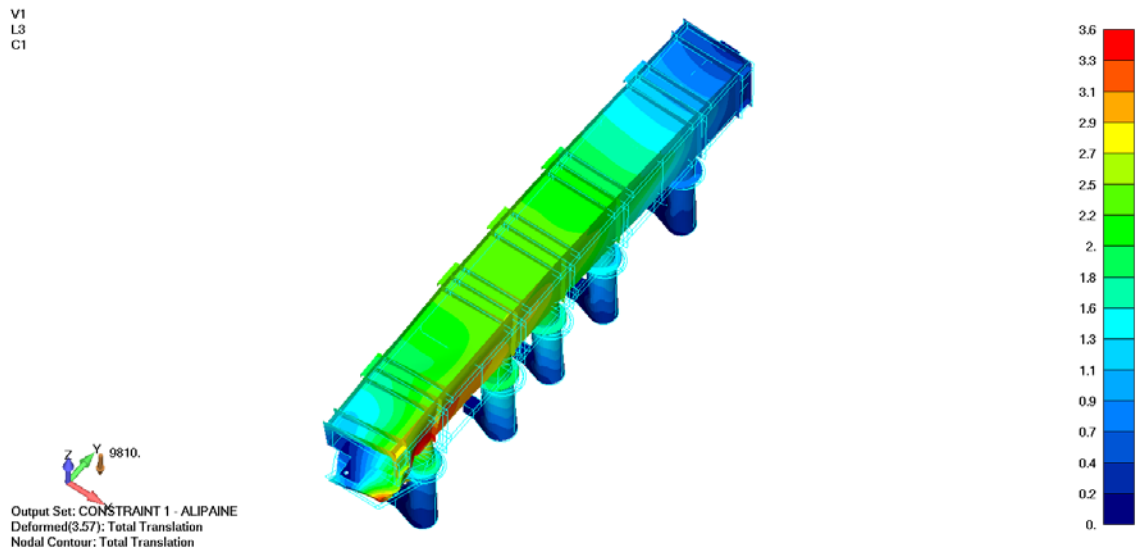


*Kuva 61.* Von-Mises jännitykset. Jännitystaso n.60 MPa.



*Kuva 62.* Von-Mises jännitykset. Jännitystaso n.60 MPa.

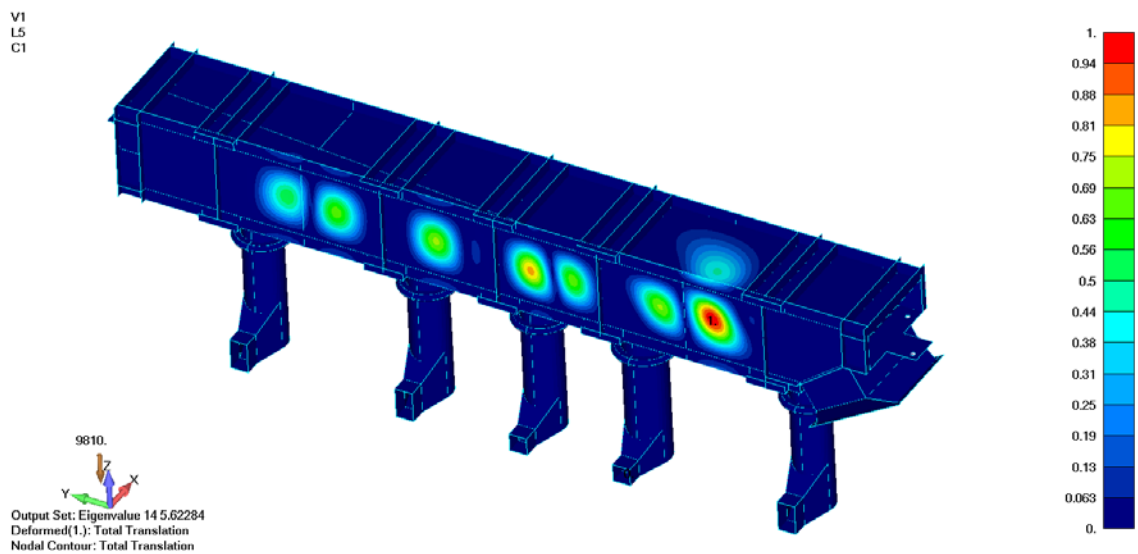
Rakenteen kokonaissiirtymät esitetään kuvassa 63. Deformaation maksimiarvo rakenteessa on n. 3.6 mm, joten siirtymät jäävät alle sallitun arvon  $6400/300 = 21.3$  mm.



*Kuva 63.* Kokonaissiirtymät. Maksimiarvo n.3.6 mm. Deformaatio on esitetty 50-kertaisena.

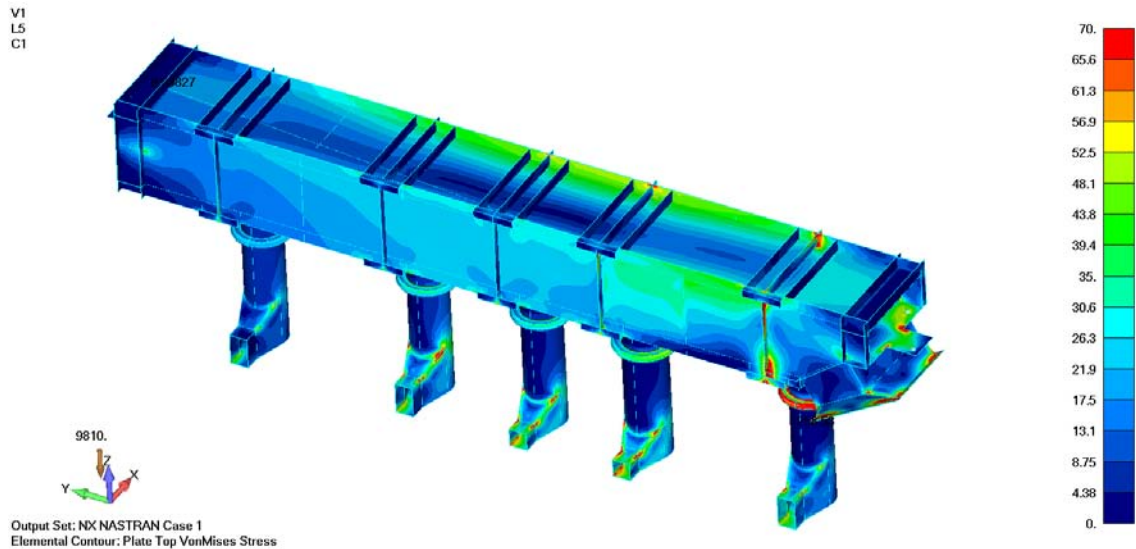
### 6.5.3 Lomahduslaskenta ylipaineella

Lomahduksen kannalta kriittisin ominaismuoto esitetään kuvassa 64. Kriittinen ominaismuoto löytyy kanavan laippalevystä.



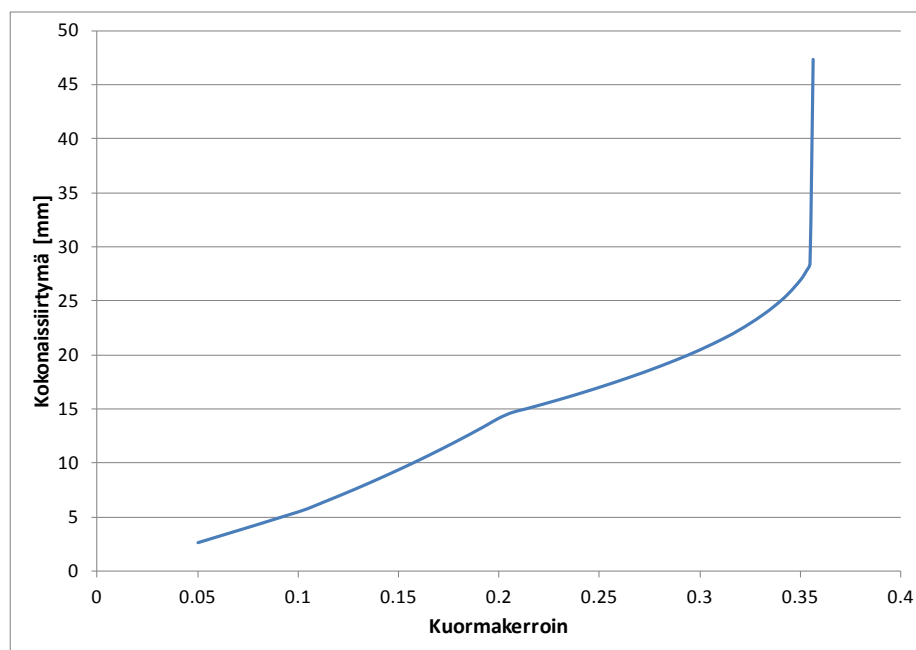
*Kuva 64.* Rakenteen kriittisin ominaismuoto lomahduksen suhteen.

Levykenttien Von-Mises kalvojäännitykset esitetään kuvassa 65. Eurokoodin mukainen lommahdusanalyysi esitetään liitteessä 7. Tuloksena saadaan lommahdusvarmuudeksi 2.8 tutkittaessa kanavan laipan levykenttä.



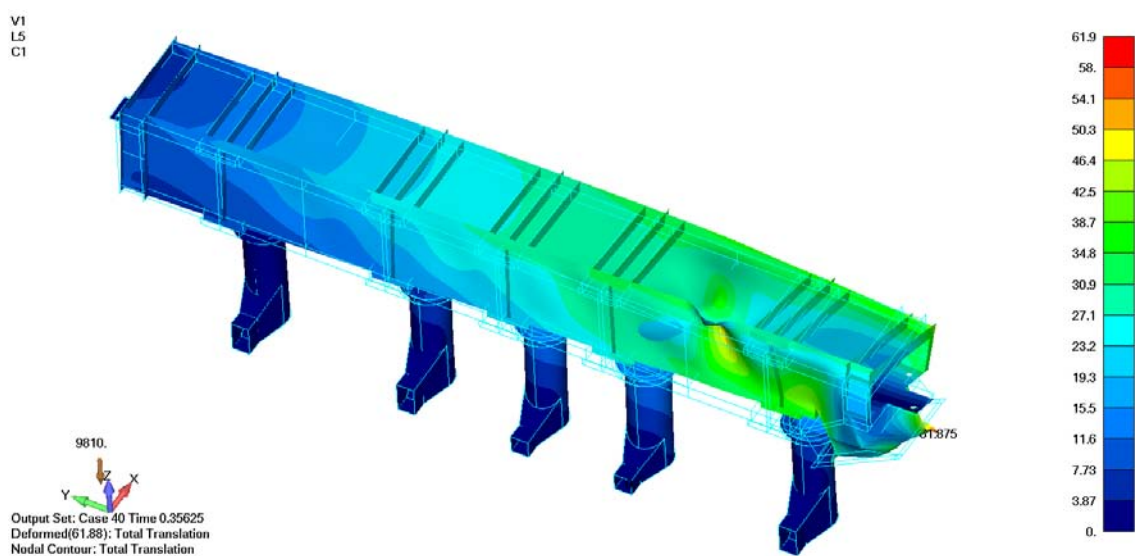
Kuva 65. Von-Mises kalvojäännitykset.

Seuraavaksi tutkitaan rakenteen lommahduskestävyyttä epälineaarilla analyysillä. Kuvassa 66 on esitetty lommahtaneelta alueelta poimitun solmun kokonaissiirtymät kuormituksen funktiona.



Kuva 66. Kokonaissiirtymä kuormakertoimen funktiona.

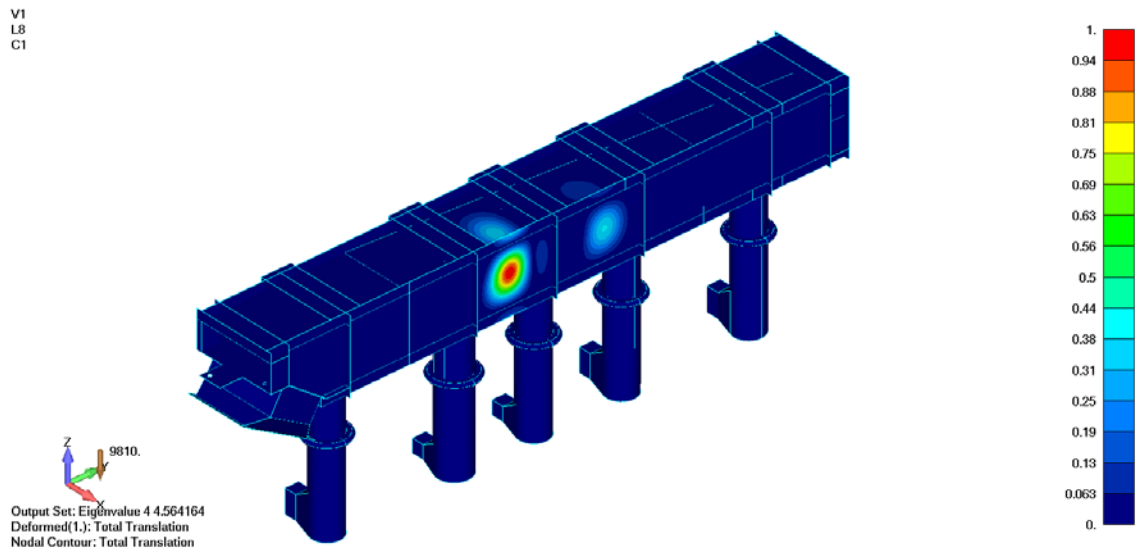
Kuvasta voidaan huomata muutos siirtymän kasvussa kuormakertoimen arvon ollessa n. 0.21, jolloin kanavan päädyssä olevan ilmasuuttimen palkeissa tapahtuu plastisoitumista. Kuormitusta voidaan vielä lisätä aina arvoon 0.35 asti, jolloin rakenne menettää stabiiliutensa. Tätä tilannetta esitetään kuvassa 67, jossa voidaan huomata lommahduksen tapahtuvan kuvassa 64 esitetyn ominaismuodon alueella. Tällöin koko rakenteen lommahdusvarmuudeksi ylipaineen vaikuttaessa saadaan 3.5.



*Kuva 67.* Kokonaissiirtymät. Deformaatio on esitetty 5- kertaisena.

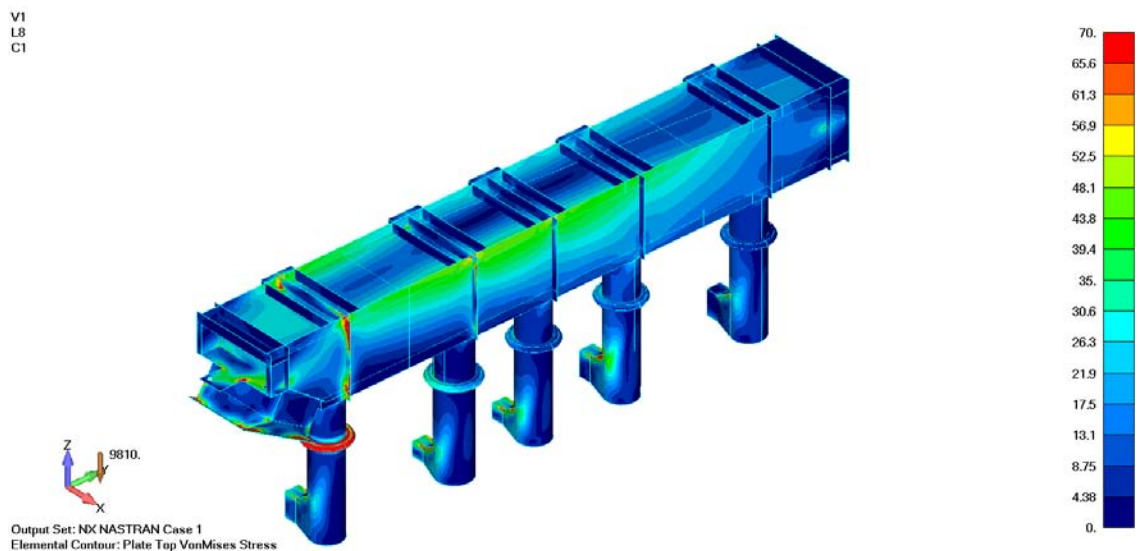
#### 6.5.4 Lommahduslaskenta alipaineella

Lommahduksen kannalta kriittisin ominaismuoto esitetään kuvassa 68. Kriittinen ominaismuoto löytyy kanavan laippalevystä.



*Kuva 68.* Rakenteen kriittisin ominaismuoto lommahduksen suhteen.

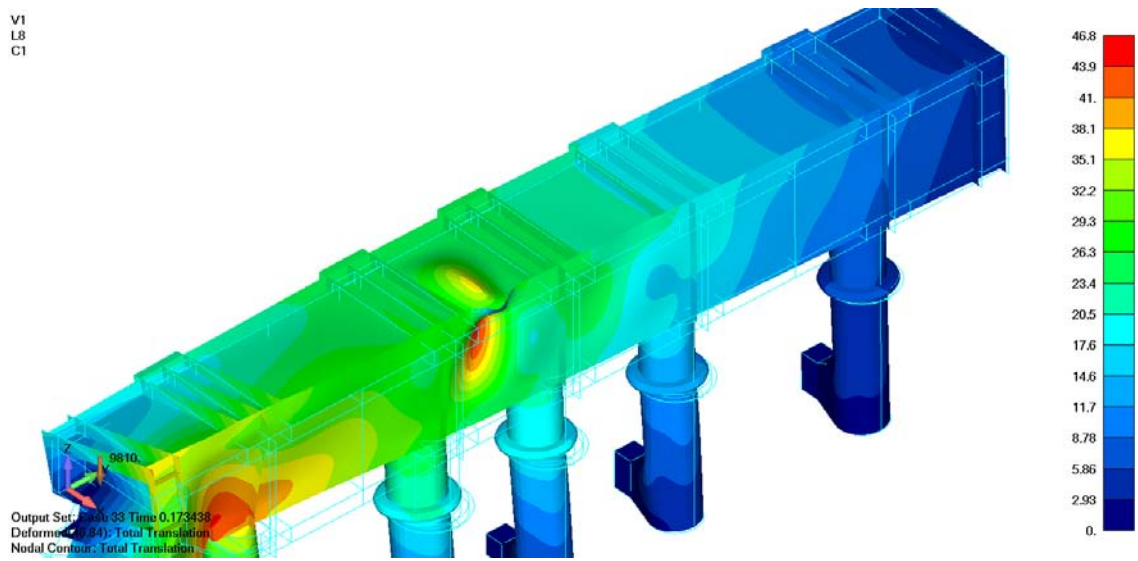
Levykenttien Von-Mises kalvojäännitykset esitetään kuvassa 69. Eurokoodin mukainen lommahdusanalyysi esitetään liitteessä 8. Tuloksena saadaan lommahdusvarmuudeksi 3.1.



*Kuva 69.* Von-Mises kalvojäännitykset.

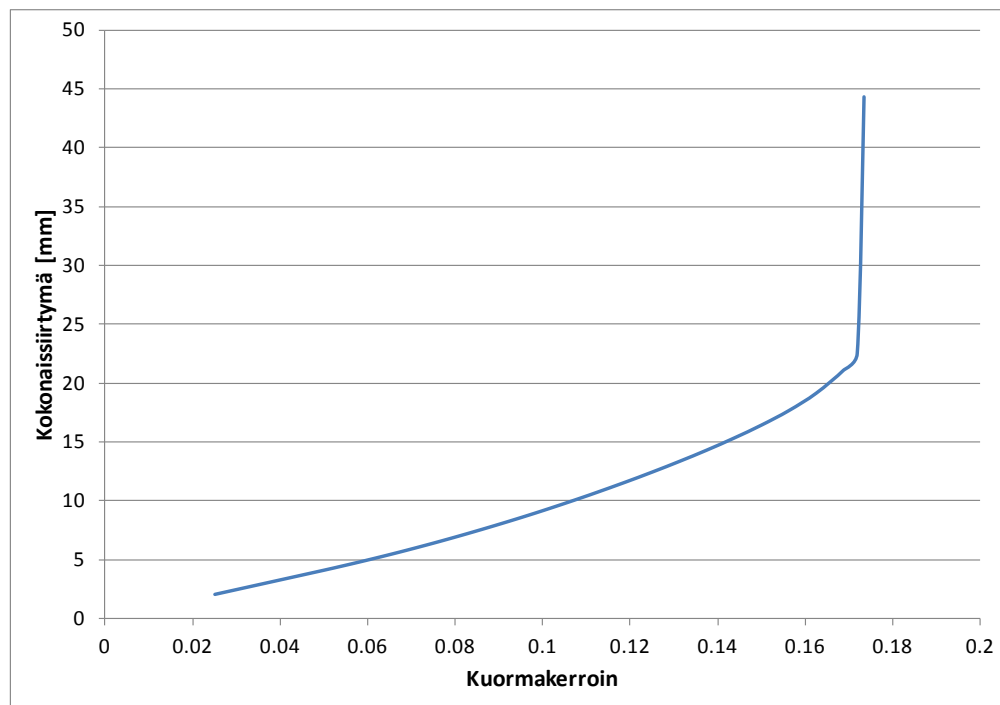
Seuraavaksi tutkitaan rakenteen lommahduskestävyyttä epälineaarilla analyysillä.

Kuvassa 70 esitetään rakenteen deformaatio lommahtaneessa tilassa. Aiemmin esitetty ominaismuodon alue on lommahtanut ja rakenne on menettänyt stabiliteettinsa.



Kuva 70. Kokonaissiirtymät. Deformaatio on esitetty 5- kertaisena.

Kuvassa 71 on esitetty lommahtaneelta alueelta poimitun solmun kokonaissiirtymät kuormituksen funktiona. Kuvasta voidaan selvästi havaita stabiliteetin menetys kuormakertoimella 0.17. Tällä kuormakertoimella lommahdusvarmuudeksi saadaan 3.4.



Kuva 71. Kokonaissiirtymä kuormakertoimen funktiona.

## 7 JOHTOPÄÄTÖKSET

Työssä käsiteltiin lommahduskestävyyden osoittamista kahdella erilaisella elementtimenetelmän ratkaisuvaihtoehdolla. Ratkaisuvaihtoehtoina olevien lineaarisen ominaisarvotehtävän tai epälineaarisen elementtimenetelmän avulla voitiin todeta rakenteen lommahduskestävyys.

Ominaisarvotehtävän avulla saatu ratkaisun havaittiin olevan käyttökelpoinen, kun kuormitus vaikuttaa levyn tason suuntaisesti. Kun kuormituksena vaikuttaa myös levyn tasoa vastaan kohtisuora kuormitus, joka taivuttaa levyä, ei ominaisarvotehtävän ratkaisu ole enää riittävä. Lineaarisen ominaisarvotehtävän ratkaisu vaatii painekuorman vaikuttaessa standardin mukaisen yhteisvaikutuskaavan soveltamista ekvivalenttiin palkkiin.

Epälineaarilla FE- analyysillä voitiin ratkaista suoraan sekä geometrisesti että materiaalisesti epälineaarinen tehtävä. Ratkaisussa kuormakerrointa kasvatettiin portaittain ja ratkaisu haettiin iteratiivisesti. Epälineaarinen ratkaisutapa ottaa huomioon automaattisesti painekuorman vaikutuksen levyn lommahduskestävyyteen.

Keskihoikilla levyillä saavutettiin epälineaarilla analyysillä pienempi kapasiteetti kuin analyttisellä laskennalla. Hoikilla levyillä taas epälineaarisen ratkaisun tulos vastasi melko tarkasti analyttisen laskennan tulosta. Tulosten perusteella voidaan todeta standardin mukaisen geometrisen epätäydellisyyden käytön soveltuvan hyvin epälineaariin ratkaisuun sekä jäykistämättömien että jäykistettyjen levykenttien tapauksessa. Lisäksi havaittiin, että vaikka painekuorma parantaisi levyn puristuskapasitettia muuttamalla levyn lommahdusmuotoa, niin samalla levyn taipuma kasvaa painekuorman kasvaessa, mikä taas pienentää levyn puristuskapasiteettia.

Kokonaisen ilmakehän rakenteen analyysissä voitiin havaita, että lineaarisen ominaisarvotehtävän ratkaisu ja yhteisvaikutuskaavan käyttö verrattuna epälineaarinen analyysin antamiin tuloksiin antoi samansuuntaisia tuloksia kuten aikaisemmin tutkittaessa

pelkästään yksittäistä levykenttää. Tuloksista saatujen käyttöasteiden eroavaisuuksia voidaan selittää mm. pienennetyn jännityksen menetelmän käyttämisellä. Pienennetyn jännityksen menetelmä ei työssä havaitun perusteella hyödynnä ylikriittistä kapasiteettia yhtä tehokkaasti kuin tehollisen leveyden käyttö. Myös standardin mukaisen sovelletun yhteisvaikutuskaavan yhteisvaikutustekijän suuruudella on vaikutusta käyttöasteeseen, kun painekuorma otetaan huomioon laatan momenttikapasiteetissa.

## 8 YHTEENVETO

Työssä tutkittiin yksittäisiä jäykistämättömiä ja jäykistettyjä levykenttiä ja niiden lommahduskestävyyttä Eurokoodi standardin ja elementtimenetelmän avulla. Lisäksi käsiteltiin lommahduksen teoriaa ja levykenttien käyttäytymistä yleisellä tasolla.

Työn tavoitteena oli selvittää kuinka lommahdus tutkitaan Eurokoodin mukaisesti ja elementtimenetelmää hyödyntäen. Työssä tutkittiin kahden eri elementtimenetelmään pohjautuvan ratkaisuvaihtoehdon käyttöä lommahduslaskennassa. Molempien menetelmien käyttö todettiin toimivaksi vaihtoehdoksi lommahduskestävyyden osoittamisessa.

Epälineaarisen elementtimenetelmän avulla tutkittiin standardin mukaisen levyn epätarkkuuksien vaikutusta lommahduskestävyyteen levykentän suhteellisen hoikkuuden vaihdellessa. Eurokoodin mukaisten epätarkkuuksien avulla saatujen tulosten todettiin vastaavan hyvin standardin mukaisiin levykenttien kriittisiin lommahduskuormiin. Hoikilla levyillä kestävyys vastasi Eurokoodin mukaisia kriittisiä kuormia, kun taas keskihoikilla saavutettiin n.10 % pienempi kestävyys.

Painekuorman vaikutusta tutkittiin epälineaarisen elementtimenetelmän avulla. Paineen havaittiin pienentävän lommahduskestävyyttä, mikä on näin ollen otettava huomioon rakenteen stabiiliutta varmistettaessa.

Lisäksi työn tavoitteena oli kehittää laskennan apuvälineeksi menetelmä, jolla voidaan varmistaa lommahduskestävyys painekuorman vaikuttaessa. Työssä kehitettiin Eurokoodin sovellettu yhteisvaikutuskaavan käyttö lineaarisen ominaisarvotehtävän ratkaisun lisänä, joka ottaa huomioon painekuorman vaikutuksen levykentän lommahduksessa. Ratkaisumenetelmä on käytännöllinen ja nopea käyttää verrattuna epälineaarisen elementtimenetelmän hitaampaan ja hankalampaan käyttöön.

Tämän työn tuloksena voidaan todeta, että ilmakehänavia voidaan käyttää jäykistävänä rakenteena varmistamalla niiden riittävä rakenteellinen lujuus, jäykkyys ja stabiilius.

Tässä työssä tutkittu ilmakehän rakenne täytti sille asetetut lujuus ja jäykkyysvaatimukset. Lisäksi rakenteen lommahduskestävyys varmistettiin Eurokoodi standardin mukaisilla menettelyillä kyseessä oleville kuormituksille.

## LÄHDELUETTELO

/1/ Huhtinen, M., Kettunen A., Nurminen P. & Pakkanen, H. Höyrykattilatekniikka. Helsinki: Edita Prima Oy. 2004. ISBN 951-37-3360-2.

/2/ Andritz. Soodakattilakoulutus. Palamisilma-savukaasu. Prosessikoulutus 1.4.2008. 2008.

/3/ Niemi, Erkki. Levyrakenteiden suunnittelu. Helsinki: Teknologiateollisuus ry. 2003. ISBN 951-817-813-5.

/4/ Teräsrakenneyhdistys TRY. Eurooppalainen teräsrakenteiden suunnittelun koulutusohjelma. Verkkodokumentti. <http://www.terasinfo.fi/Esdep/index.html>. Luettu 31.1.2012.

/5/ SFS-EN 1993-1-5. Eurokoodi 3. Teräsrakenteiden suunnittelu. Osa 1-5: Levyrakenteet. Helsinki: Suomen standardisoimisliitto SFS. 2006.

/6/ Ikonen, Kari. Levy-, laatta- ja kuoriteoria. Helsinki: Hakapaino Oy. 1990. ISBN 951-672-111-7.

/7/ Ongelin, P & Valkonen I. Hitsatut profiilit EN 1993-käsikirja. Keuruu: Rautaruukki Oyj. 2010. ISBN 978-952-5010-02-2.

/8/ SFS-EN 1993-1-7. Eurokoodi 3. Teräsrakenteiden suunnittelu. Osa 1-7: Levyrakenteet, joihin kohdistuva kuormitus ei ole levyn tason suuntainen. Helsinki: Suomen standardisoimisliitto SFS. 2007.

/9/ Timoshenko, S. & Woinowsky-Krieger, S. Theory of plates and shells. McGraw-Hill. 1959. ISBN 978-0-07-085820-6.

/10/ Szilard, Rudolph. Theory and analysis of plates. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. 1974. ISBN 0-13-913426-3.

/11/ SFS-EN1993-1-1. Eurokoodi 3. Teräsrakenteiden suunnittelu. Osa 1-1: Yleiset säännöt ja rakennuksia koskevat säännöt. Helsinki: Suomen standardisoimisliitto SFS. 2005.

/12/ Hakala, Matti K. Lujuusopin elementtimenetelmä. Espoo: Otakustantamo. 1986. ISBN 951-671-395-5.

/13/ Cook, Robert D. Finite element modeling for stress analysis. John Wiley & Sons. 1995. ISBN 0-471-10774-3.

/14/ Cook, R.D et al. Concepts and applications of finite element analysis. John Wiley & Sons. 2002. ISBN 0-471-35605-0.

/15/ Richards T. H. & Stanley, P. Stability problems in engineering structures and components. Applied science publishers ltd. 1979. ISBN 0-85334-836-7.

/16/ Reddy, J. N. Theory and analysis of elastic plates and shells. Taylor & Francis Group. 2007. ISBN 0-8493-8415-X.

/17/ SFS-EN 10082-2. Painelaiteteräkset. Levytuotteet. Osa 2: Kuumalujat seostamattomat ja seostetut teräkset. Helsinki: Suomen standardisoimisliitto SFS. 2009.

/18/ SFS-EN 12952-3. Vesiputkikattilat ja niihin liittyvät laitteistot. Osa 3: Paineenalaisten osien suunnittelu ja laskenta. Helsinki: Suomen standardisoimisliitto SFS. 2002.

## LIITTEET

### LIITE 1: Levyn lommahduskestävyys

Materiaali:	$f_y := 235\text{MPa}$
Kimmokerroin:	$E := 210\text{GPa}$
Suppeuserroin:	$\nu := 0.3$
Levyn paksuus:	$t := 8\text{mm}$
Levyn mitat:	$a := 2000\text{mm}$ $b := 1000\text{mm}$
Kalvojännitys:	$\sigma_1 := 18.75\text{MPa}$
Jännityssuhde:	$\psi := 1.0$

#### Ominaisarvotehtävän ratkaisu (FEM)

Kuormakerroin:	$\alpha_{cr} := 2.58$
Suhteellinen hoikkuus:	$\lambda_1 := \sqrt{\frac{f_y}{\frac{\sigma_1}{\alpha_{cr}}}} = 2.204$
Pienennyskerroin:	$\rho_1 := \frac{\lambda_1 - 0.055 \cdot (3 + \psi)}{\lambda_1^2} = 0.408$
Käyttöaste:	$\frac{\sigma_1}{f_y \cdot \rho_1} = 0.195$

#### Analyttinen ratkaisu

Lommahduskerroin:	$k_\sigma := 4.0$
Kriittinen lommahdusjännitys:	$\sigma_{cr,p} := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot t^2}{12 \cdot (1 - \nu^2) \cdot b^2} \cdot k_\sigma = 48.589 \cdot \text{MPa}$
Suhteellinen hoikkuus:	$\lambda_2 := \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr,p}}} = 2.199$
Pienennyskerroin:	$\rho_2 := \frac{\lambda_2 - 0.055 \cdot (3 + \psi)}{\lambda_2^2} = 0.409$
Käyttöaste:	$\frac{\sigma_1}{f_y \cdot \rho_2} = 0.195$

## LIITE 2: Kriittinen lommahduskuorma

Materiaali:	$f_y := 235\text{MPa}$
Kimmo kerroin:	$E := 210\text{GPa}$
Suppeuskerroin:	$\nu := 0.3$
Levyn paksuus:	$t := 8\text{mm}$
Levyn mitat:	$a := 1600\text{mm}$ $b := 1000\text{mm}$
Jännityssuhde:	$\psi := 1.0$

### Analyttinen ratkaisu

Lommahduskerroin:  $k_\sigma := 4.0$

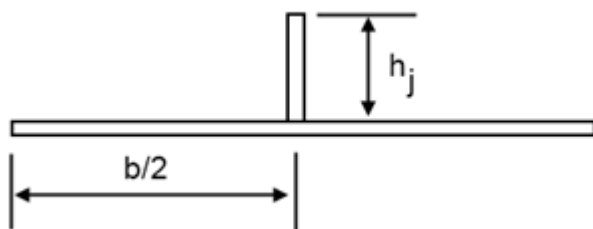
Kriittinen lommahdusjännitys:  $\sigma_{\text{cr.p}} := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot t^2}{12 \cdot (1 - \nu^2) \cdot b^2} \cdot k_\sigma = 48.589 \cdot \text{MPa}$

Suhteellinen hoikkuus:  $\lambda_2 := \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{\text{cr.p}}}} = 2.199$

Pienennyskerroin:  $\rho_2 := \frac{\lambda_2 - 0.055 \cdot (3 + \psi)}{\lambda_2^2} = 0.409$

Kriittinen lommahduskuorma:  $F_{\text{crit}} := f_y \cdot \rho_2 \cdot b \cdot t = 769.338 \cdot \text{kN}$

### LIITE 3: Jäykistetyin levykentän lommahduskestävyys



Materiaali:  $f_y := 235\text{MPa}$

Kimmokerroin:  $E := 210\text{GPa}$

Suppeuserroin:  $\nu := 0.3$

Levyn paksuus:  $t := 8\text{mm}$

Jäykisteen paksuus:  $t_j := 8\text{mm}$

Jäykisteen korkeus:  $h_j := 100\text{mm}$

Levyn mitat:  $a := 1600\text{mm}$   $b := 1000\text{mm}$

Jännityssuhde:  $\psi := 1.0$

#### Analyttinen ratkaisu

Osakenttä:

Lommahduserroin:  $k_\sigma := 4.0$

Kriittinen lommahdusjännitys:  $\sigma_{cr,p} := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot t^2}{12 \cdot (1 - \nu^2) \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2} \cdot k_\sigma = 194.355 \cdot \text{MPa}$

Suhteellinen hoikkuus:  $\lambda_1 := \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr,p}}} = 1.1$

Pienennyskerroin:  $\rho_1 := \frac{\lambda_1 - 0.055 \cdot (3 + \psi)}{\lambda_1^2} = 0.727$

Tehollinen leveys:  $b_c := \frac{b}{2} \cdot \text{if}(\lambda_1 > 0.673, \rho_1, 1) = 363.735 \text{ mm}$

Jäykiste:

Lommahduserroin:  $k_{\sigma 2} := 0.43$

Kriittinen lommahdusjännitys:  $\sigma_{cr,p,j} := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot t^2}{12 \cdot (1 - \nu^2) \cdot h_j^2} \cdot k_{\sigma 2} = 522.33 \cdot \text{MPa}$

Suhteellinen hoikkuus:	$\lambda_j := \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr,p,j}}} = 0.671$
Pienennyskerroin:	$\rho_j := \frac{\lambda_j - 0.188}{\lambda_j^2} = 1.073$
Tehollinen leveys:	$b_{c,j} := h_j \cdot \text{if}(\lambda_j > 0.748, \rho_j, 1) = 100 \text{ mm}$
Kokonaiskenttä:	
Tehollinen pinta-ala:	$A_{c,eff,loc} := b_{c,j} \cdot t_j + b_c \cdot t = 3.71 \times 10^3 \text{ mm}^2$
Bruttopinta-ala:	$A_{kok} := b \cdot t + h_j \cdot t_j = 8.8 \times 10^3 \text{ mm}^2$
	$\beta_{A,c} := \frac{A_{c,eff,loc}}{A_{kok}} = 0.422$
Kriittinen lommahdusjännitys (elementtimallin ratkaisu):	$\sigma_{cr,p,kok} := 198.7 \text{ MPa}$
Kriittinen nurjahdusjännitys (elementtimallin ratkaisu):	$\sigma_{cr,c,kok} := 26.4 \text{ MPa}$
Yhteisvaikutus:	$\xi := \frac{\sigma_{cr,p,kok}}{\sigma_{cr,c,kok}} = 7.527$
Jäykistetyin kokonaiskentän suhteellinen hoikkuus:	$\lambda_p := \sqrt{\frac{\beta_{A,c} \cdot f_y}{\sigma_{cr,p,kok}}} = 0.706$
Pienennyskerroin:	$\rho_2 := \frac{\lambda_p - 0.055 \cdot (3 + \psi)}{\lambda_p^2} = 0.975$
Puristetun alueen tehollinen pinta-ala:	$A_{c,eff} := \rho_2 \cdot A_{c,eff,loc} + \rho_1 \cdot \frac{b}{2} \cdot t = 6.527 \times 10^3 \text{ mm}^2$
Kriittinen lommahduskuorma:	$F_{crit} := f_y \cdot A_{c,eff} = 1.534 \times 10^3 \cdot \text{kN}$

#### LIITE 4: Eurokoodin sovellettu yhteisvaikutuskaava

Materiaali:	$f_y := 235\text{MPa}$
Kimmo kerroin:	$E := 210\text{GPa}$
Suppeuskerroin:	$\nu := 0.3$
Levyn paksuus:	$t := 8\text{mm}$
Levyn mitat:	$a := 1600\text{mm}$ $b := 1000\text{mm}$
Jännityssuhde:	$\psi := 1.0$

#### Analyttinen ratkaisu

Lomahduskerroin:  $k_\sigma := 4.0$

Kriittinen lomahdusjännitys:  $\sigma_{\text{cr.p}} := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot t^2}{12 \cdot (1 - \nu^2) \cdot b^2} \cdot k_\sigma = 48.589 \cdot \text{MPa}$

Suhteellinen hoikkuus:  $\lambda_2 := \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{\text{cr.p}}}} = 2.199$

Pienennyskerroin:  $\rho_2 := \frac{\lambda_2 - 0.055 \cdot (3 + \psi)}{\lambda_2^2} = 0.409$

Kriittinen lomahduskuorma:  $F_{\text{crit}} := f_y \cdot \rho_2 \cdot b \cdot t = 769.338 \cdot \text{kN}$

#### Eurokoodin sovellettu yhteisvaikutuskaava

Puristusjännitys:  $\sigma_p := 75\text{MPa}$

Painekuorma:  $p := 0.018\text{MPa}$

Ekvivalentin vakiomomentin kerroin:  $C_{\text{my}} := 1.0$

Yhteisvaikutustekijä:  $k_{yy} := C_{\text{my}} \cdot \left( 1 + 0.6 \cdot \frac{\sigma_p}{f_y \cdot \rho_2} \right) = 1.468$

Plastisen saranan paikka:  $x := \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{\frac{a}{2}} \cdot \left[ \sqrt{1 + 3 \cdot \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}} - 1 \right] = 608.182 \text{ mm}$

Plastinen momentti  
pituusyksikköä kohti saranassa:

$$M_p := \frac{f_y \cdot t^2}{4} = 3.76 \times 10^3 \text{ N}$$

Kantokuorma:

$$q_p := \frac{4 \cdot M_p}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} \cdot \frac{\frac{a}{2} + \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{x}}{\frac{a}{2} - \frac{1}{3} \cdot x} = 0.122 \text{ MPa}$$

Yhteisvaikutus:

$$\eta := \frac{\sigma_p}{f_y \cdot \rho_2} + k_{yy} \cdot \frac{p}{q_p} = 0.997$$

## LIITE 5: Lommahduslaskenta ylipaineella

Materiaali:	$f_y := 182\text{MPa}$
Kalibrintikertoimia:	$\alpha_p := 0.34$ $\lambda_{p0} := 0.7$
Lewyn paksuus:	$t_2 := 6\text{mm}$
Lewyn mitat:	$b_2 := 500\text{mm}$ $a_2 := 800\text{mm}$
Von-Mises jännitys:	$\sigma_{\text{von},2} := 27\text{MPa}$

### Ominaisarvotehtävän ratkaisu (FEM)

Kuormakerroin:  $\alpha_{\text{cr},2} := 15.97$

Suhteellinen hoikkuus: 
$$\lambda_2 := \sqrt{\frac{\frac{f_y}{\sigma_{\text{von},2}}}{\alpha_{\text{cr},2}}} = 0.65$$

$$\varphi_{p,2} := \frac{1}{2} \cdot [1 + \alpha_p \cdot (\lambda_2 - \lambda_{p0}) + \lambda_2] = 0.816$$

Pienennyskerroin: 
$$\rho_2 := \frac{1}{\varphi_{p,2} + \sqrt{\varphi_{p,2}^2 - \lambda_2}} = 1.058$$

Käyttöaste: 
$$\frac{\sigma_{\text{von},2}}{f_y \cdot 1.0} = 0.148$$

### Eurokoodin sovellettu yhteisvaikutuskaava

Painekuorma:  $p_2 := 0.009\text{MPa}$

Ekvivalentin vakiomomentin kerroin:  $C_{\text{my},2} := 1.0$

Yhteisvaikutustekijä: 
$$k_{\text{yy},2} := C_{\text{my},2} \cdot \left( 1 + 0.6 \cdot \frac{\sigma_{\text{von},2}}{f_y \cdot 1.0} \right) = 1.089$$

Plastisen saranan paikka: 
$$x_2 := \frac{\left(\frac{b_2}{2}\right)^2}{\frac{a_2}{2}} \cdot \left[ \sqrt{1 + 3 \cdot \frac{\left(\frac{a_2}{2}\right)^2}{\left(\frac{b_2}{2}\right)^2}} - 1 \right] = 304.091 \cdot \text{mm}$$

Plastinen momentti  
pituusyksikköä kohti saranassa:

$$M_{p,2} := \frac{f_y \cdot t_2^2}{4} = 1.638 \times 10^3 \text{ N}$$

Kantokuorma:

$$q_{p,2} := \frac{4 \cdot M_{p,2}}{\left(\frac{b_2}{2}\right)^2} \cdot \frac{\frac{a_2}{2} + \frac{\left(\frac{b_2}{2}\right)^2}{x_2}}{\frac{a_2}{2} - \frac{1}{3} \cdot x_2} = 0.213 \cdot \text{MPa}$$

Yhteisvaikutus:

$$\eta_2 := \frac{\sigma_{\text{von},2}}{f_y \cdot 1.0} + k_{yy,2} \cdot \frac{p_2}{q_{p,2}} = 0.194$$

## LIITE 6: Lomahduslaskenta alipaineella

Materiaali:	$f_y := 182\text{MPa}$
Kalibrintikertoimia:	$\alpha_p := 0.34$ $\lambda_{p0} := 0.7$
Lewyn paksuus:	$t := 6\text{mm}$
Lewyn leveys:	$b := 550\text{mm}$ $a := 800\text{mm}$
Von-Mises jännitys:	$\sigma_{\text{von}} := 24\text{MPa}$

### Ominaisarvotehtävän ratkaisu (FEM)

Kuormakerroin:  $\alpha_{\text{cr}} := 20.2$

Suhteellinen hoikkuus: 
$$\lambda_1 := \sqrt{\frac{f_y}{\frac{\sigma_{\text{von}}}{\alpha_{\text{cr}}}}} = 0.613$$

$$\varphi_p := \frac{1}{2} \cdot [1 + \alpha_p \cdot (\lambda_1 - \lambda_{p0}) + \lambda_1] = 0.792$$

Pienennyskerroin: 
$$\rho_1 := \frac{1}{\varphi_p + \sqrt{\varphi_p^2 - \lambda_1}} = 1.1$$

Käyttöaste: 
$$\frac{\sigma_{\text{von}}}{f_y \cdot 1.0} = 0.132$$

### Eurokoodin sovellettu yhteisvaikutuskaava

Painekuorma:  $p := 0.003\text{MPa}$

Ekvivalentin vakiomomentin kerroin:  $C_{\text{my}} := 1.0$

Yhteisvaikutustekijä: 
$$k_{yy} := C_{\text{my}} \cdot \left( 1 + 0.6 \cdot \frac{\sigma_{\text{von}}}{f_y \cdot 1.0} \right) = 1.079$$

Plastisen saranan paikka: 
$$x := \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{\frac{a}{2}} \cdot \left[ \sqrt{1 + 3 \cdot \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}} - 1 \right] = 323.402\text{mm}$$

Plastinen momentti  
pituusyksikköä kohti saranassa:

$$M_p := \frac{f_y \cdot t^2}{4} = 1.638 \times 10^3 \text{ N}$$

Kantokuorma:

$$q_p := \frac{4 \cdot M_p}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} \cdot \frac{\frac{a}{2} + \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{x}}{\frac{a}{2} - \frac{1}{3} \cdot x} = 0.188 \text{ MPa}$$

Yhteisvaikutus:

$$\eta := \frac{\sigma_{\text{von}}}{f_y \cdot 1.0} + k_{yy} \cdot \frac{p}{q_p} = 0.149$$

## LIITE 7: Lommahduslaskenta ylipaineella

Materiaali:	$f_y := 182\text{MPa}$
Kalibrintikertoimia:	$\alpha_p := 0.34$ $\lambda_{p0} := 0.7$
Lewyn paksuus:	$t_2 := 6\text{mm}$
Lewyn mitat:	$b_2 := 600\text{mm}$ $a_2 := 1400\text{mm}$
Von-Mises jännitys:	$\sigma_{\text{von.2}} := 38\text{MPa}$

### Ominaisarvottehtävän ratkaisu (FEM)

Kuormakerroin:  $\alpha_{\text{cr.2}} := 5.61$

Suhteellinen hoikkuus: 
$$\lambda_2 := \sqrt{\frac{f_y}{\frac{\sigma_{\text{von.2}}}{\alpha_{\text{cr.2}}}}} = 0.924$$

$$\varphi_{p.2} := \frac{1}{2} \cdot [1 + \alpha_p \cdot (\lambda_2 - \lambda_{p0}) + \lambda_2] = 1$$

Pienennyskerroin: 
$$\rho_2 := \frac{1}{\varphi_{p.2} + \sqrt{\varphi_{p.2}^2 - \lambda_2}} = 0.784$$

Käyttöaste: 
$$\frac{\sigma_{\text{von.2}}}{f_y \cdot \rho_2} = 0.266$$

### Eurokoodin sovellettu yhteisvaikutuskaava

Painekuorma:  $p_2 := 0.009\text{MPa}$

Ekvivalentin vakiomomentin kerroin:  $C_{\text{my.2}} := 1.0$

Yhteisvaikutustekijä: 
$$k_{yy.2} := C_{\text{my.2}} \cdot \left( 1 + 0.6 \cdot \frac{\sigma_{\text{von.2}}}{f_y \cdot \rho_2} \right) = 1.16$$

Plastisen saranan paikka: 
$$x_2 := \frac{\left(\frac{b_2}{2}\right)^2}{\frac{a_2}{2}} \cdot \left[ \sqrt{1 + 3 \cdot \frac{\left(\frac{a_2}{2}\right)^2}{\left(\frac{b_2}{2}\right)^2}} - 1 \right] = 406.714 \cdot \text{mm}$$

Plastinen momentti  
pituusyksikköä kohti saranassa:

$$M_{p,2} := \frac{f_y \cdot t_2^2}{4} = 1.638 \times 10^3 \text{ N}$$

Kantokuorma:

$$q_{p,2} := \frac{4 \cdot M_{p,2}}{\left(\frac{b_2}{2}\right)^2} \cdot \frac{\frac{a_2}{2} + \frac{\left(\frac{b_2}{2}\right)^2}{x_2}}{\frac{a_2}{2} - \frac{1}{3} \cdot x_2} = 0.119 \cdot \text{MPa}$$

Yhteisvaikutus:

$$\eta_2 := \frac{\sigma_{\text{von},2}}{f_y \cdot \rho_2} + k_{yy,2} \cdot \frac{p_2}{q_{p,2}} = 0.354$$

## LIITE 8: Lomahduslaskenta alipaineella

Materiaali:	$f_y := 182\text{MPa}$
Kalibrintikertoimia:	$\alpha_p := 0.34$ $\lambda_{p0} := 0.7$
Lewyn paksuus:	$t := 6\text{mm}$
Lewyn leveys:	$b := 550\text{mm}$ $a := 800\text{mm}$
Von-Mises jännitys:	$\sigma_{\text{von}} := 40\text{MPa}$

### Ominaisarvotehtävän ratkaisu (FEM)

Kuormakerroin:  $\alpha_{\text{cr}} := 4.56$

Suhteellinen hoikkuus: 
$$\lambda_1 := \sqrt{\frac{f_y}{\frac{\sigma_{\text{von}}}{\alpha_{\text{cr}}}}} = 0.999$$

$$\varphi_p := \frac{1}{2} \cdot [1 + \alpha_p \cdot (\lambda_1 - \lambda_{p0}) + \lambda_1] = 1.05$$

Pienennyskerroin: 
$$\rho_1 := \frac{1}{\varphi_p + \sqrt{\varphi_p^2 - \lambda_1}} = 0.728$$

Käyttöaste: 
$$\frac{\sigma_{\text{von}}}{f_y \cdot \rho_1} = 0.302$$

### Eurokoodin sovellettu yhteisvaikutuskaava

Painekuorma:  $p := 0.003\text{MPa}$

Ekvivalentin vakiomomentin kerroin:  $C_{\text{my}} := 1.0$

Yhteisvaikutustekijä: 
$$k_{yy} := C_{\text{my}} \cdot \left( 1 + 0.6 \cdot \frac{\sigma_{\text{von}}}{f_y \cdot \rho_1} \right) = 1.181$$

Plastisen saranan paikka: 
$$x := \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{\frac{a}{2}} \cdot \left[ \sqrt{1 + 3 \cdot \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}} - 1 \right] = 323.402 \cdot \text{mm}$$

Plastinen momentti  
pituusyksikköä kohti saranassa:

$$M_p := \frac{f_y \cdot t^2}{4} = 1.638 \times 10^3 \text{ N}$$

Kantokuorma:

$$q_p := \frac{4 \cdot M_p}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} \cdot \frac{\frac{a}{2} + \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{x}}{\frac{a}{2} - \frac{1}{3} \cdot x} = 0.188 \cdot \text{MPa}$$

Yhteisvaikutus:

$$\eta := \frac{\sigma_{\text{von}}}{f_y \cdot \rho_1} + k_{yy} \cdot \frac{p}{q_p} = 0.321$$