

LAPPEENRANNAN-LAHDEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

School of Engineering Science

Laskennallisen tekniikan koulutusohjelma

Kandidaatintyö

*Emma Hirvonen*

**Vääntövärihtelyt resonanssitaajuudella**

Ohjaaja: Heikki Haario

## **TIIVISTELMÄ**

Lappeenrannan-Lahden teknillinen yliopisto

School of Engineering Science

Laskennallisen tekniikan koulutusohjelma

Emma Hirvonen

### **Vääntöväärähtelyt resonanssitaajuudella**

Kandidaatintyö

2022

26 sivua, 13 kuvaa, 1 taulukko

Ohjaaja: Heikki Haario

Avainsanat: vääntöväärähtely, ominaistaaajuus, resonanssitaajuus, Fourier-muunnos, venymäliuska

Vääntöväärähtelyllä tarkoitetaan pyörimisakselin suhteen tapahtuvaa edestakaista liikettä. Eri-tyisesti vääntöväärähtelyn ja konerikkojen välillä on havaittu yhteys. Tämän vuoksi olisi tärkeää pystyä tunnistamaan vääntöväärähtely laitteistossa, jotta voitaisiin ennaltaehkäistä yllättäviä tuotannon keskeytyksiä laitteiden rikkoutumisen seurauksena. Tässä kandidaatintyössä tutkitaan voidaanko venymäliuskamittauksista tunnistaa vääntöväärähtelyn lisääntyminen akselissa. Testilaitteiston ominaistaaajuus laskettiin työssä kahdella eri tavalla, Holzerin menetelmällä ja ominaisarvototehtävänä muodostamalla ensin rakenteen massa- ja jäykkyysmatriisit elementtimenetelmän avulla. Venymäliuskamittauksia suoritettiin kolmella eri taajuudella, systeemin resonanssitaajuudella, yhdellä sitä matalammalla sekä yhdellä korkeammalla taajuudella. Mittaussignaaleille suoritettiin Fourier-muunnos taajuuksien tutkimiseksi. Fourier-muunnetuissa signaaleissa havaittiin vääntöväärähtelyn lisääntymistä resonanssitaajuudella.

# Sisällys

<b>1 JOHDANTO</b>	<b>4</b>
1.1 Tutkimusongelma, tavoitteet ja rajaus . . . . .	4
1.2 Tutkimusjärjestelyt . . . . .	5
<b>2 KIRJALLISUUSKATSAUS</b>	<b>7</b>
2.1 Vääntöväärähtely . . . . .	7
2.2 Vääntöväärähtelyn mittaaminen venymäliuska-antureilla . . . . .	8
2.3 Vääntöväärähtelyn ominaistajuuden laskenta . . . . .	10
2.3.1 Holzerin menetelmä . . . . .	11
2.3.2 Elementtimenetelmä . . . . .	13
2.3.3 Ominaisarvotehtävä . . . . .	15
2.4 Fourier-muunnos . . . . .	15
<b>3 AINEISTO JA OHJELMISTOT</b>	<b>17</b>
<b>4 TULOKSET</b>	<b>18</b>
4.1 Lasketut ominaistajuudet . . . . .	18
4.2 Fourier-muunnetut signaalit . . . . .	19
<b>5 KESKUSTELU</b>	<b>22</b>
<b>6 YHTEENVETO</b>	<b>24</b>
<b>Lähteet</b>	<b>26</b>
<b>Kuvat</b>	<b>27</b>

# 1 JOHDANTO

Erilaiset värähtelyt voivat aiheuttaa monenlaisia negatiivisia vaikutuksia koneissa ja laitteissa. Värähtelyt voivat aiheuttaa esimerkiksi rakenteiden väsymistä, osittaisia vaurioita tai rikkoa laitteen. Värähtelyn negatiivisten vaikutusten ennaltaehkäisyn vuoksi teollisuudessa ollaan yhä kiinnostuneempia tunnistamaan erilaiset värähtelyt ja niiden vaikutukset laitteistoon. [1]

Värähtelyt voidaan jakaa värähtelyn suunnan mukaan pitkittäissuuntaiseen värähtelyyn, taiputusvärähtelyyn ja vääntövärähtelyyn. Pyörivissä koneissa näistä yleisin on vääntövärähtely. Vääntövärähtelyllä tarkoitetaan pyörimisakselin suhteen tapahtuvaa edestakaista liikettä. Vääntövärähtelyä synnyttää useimmiten moottorin epätasainen käynti. Epätasaisesta käynnistä johtuen akseliin kohdistuva vääntömomentti ei pysy tasaisena, mikä aiheuttaa vääntövärähtelyä akseliin. [2]

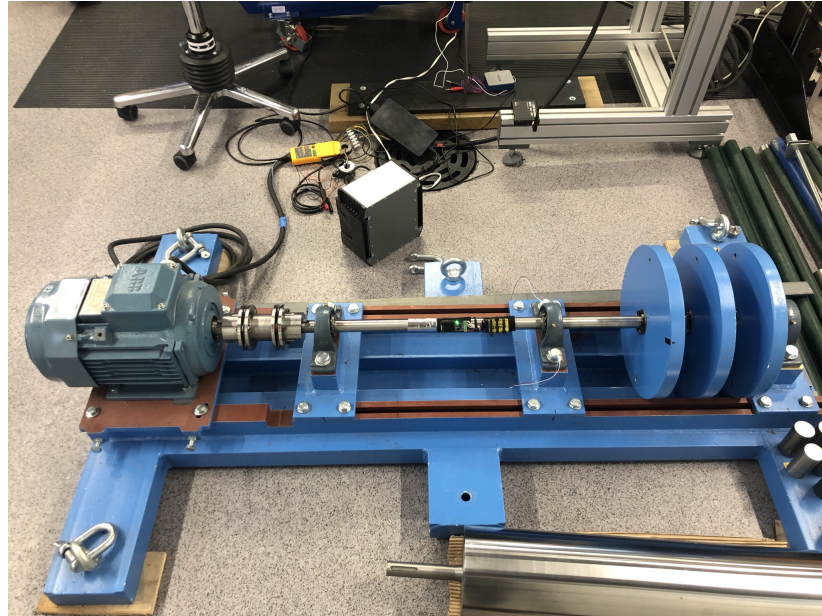
Erityisesti vääntövärähtelyn ja konerikkojen välillä on havaittu yhteys, minkä vuoksi tässä työssä keskitytään vääntövärähtelyn tunnistamiseen. Pyörivissä koneissa vääntövärähtelyä ilmenee kaikilla pyörimistaajuuksilla. Värähtelyn aiheuttamat suurimmat riskit liittyvät systeemin ominaistajuudella tapahtuvaan värähtelyyn, sillä ominaistajuudella vääntövärähtelyn aiheuttama rasitus kasvaa erityisen suureksi. Silloin värähtelyn aiheuttama jännityshuippu voi kasvaa niin suureksi, että se johtaa jopa akselin katkeamiseen. Tästä johtuen erityisen tärkeää olisi tunnistaa systeemin ominaistajuus. Systeemin vääntövärähtelyn ominaistajuuden löytämiseksi on olemassa useita erilaisia laskennallisia menetelmiä. Vääntövärähtelyä voidaan myös mitata esimerkiksi venymäliuskojen avulla. [2, 3]

## 1.1 Tutkimusongelma, tavoitteet ja rajaus

Tässä kandidaatintyössä on tavoitteena selvittää systeemin vääntövärähtelyn ominaistajuus laskemalla ja tutkia, lisääntyykö vääntövärähtely resonanssitaajuuksilla. Tavoitteena on tarkastella, voidaanko vääntövärähtelyn käytöksen muutoksia tunnistaa venymäliuskoilla mitatusta signaalista ja erityisesti tarkastella, esiintyykö akselissa resonanssitaajuuksilla enemmän haitallisia vääntövärähtelyjä. Tunnistamalla vääntövärähtelyn ominaistajuudet tai vääntövärähtelyn muutokset, voitaisiin ennaltaehkäistä värähtelyn aiheuttamat haitat. Työ on rajattu värähtelyn ominaistajuuden selvittämiseen ja mitattujen signaalien tutkimiseen.

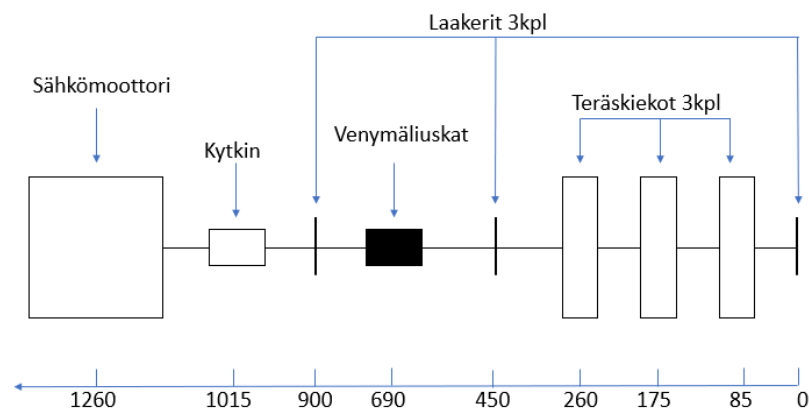
## 1.2 Tutkimusjärjestelyt

Tutkimuksessa käytetään testipenkkiä, jolla on mallinnettu paperikoneen telan toimintaa. Kuvassa 1 nähdään työssä käytettävä mittaustilasto.



**Kuva 1.** Mittaustilasto värähtelyjen tutkimiseen

Testipenkki koostuu sähkömoottorista ja siihen yhdistetystä akselista. Akselin toisessa päässä massoina toimivat kolme pyörivää kiekkoa. Akselin puolivälissä ovat venymäliuskat, joilla mitataan vääntöä akselissa. Akseli ja kiekot on valmistettu isotrooppisesta teräksestä. Testipenkin sähkömoottorilla on kaksi napaparia ja testipenkki on tuettu laakereilla kolmesta pisteestä. Kuva 2 havainnollistaa mittaustilaston rakennetta ja mittoja.



**Kuva 2.** Testilaitteisto ja mitat. Kuva ei ole mittakaavassa.

Tutkimuksessa käytetään testipenkin akselista venymäliuskoilla mitattua dataa. Ve-

nymäliuskat aseteltiin niin, että ne mittasivat akselista vain vääntöä. Mittauksia suoritettiin kolmella eri sähkömoottorin taajuudella: 23.0 Hz, 24.2 Hz ja 26.0 Hz. Näistä keskimäinen vastaa testipenkin ominaistaajuutta. Taajuuksien löytämiseksi mitatusta datasta signaaleille suoritetaan diskreetti Fourier-muunnos.

## 2 KIRJALLISUUSKATSAUS

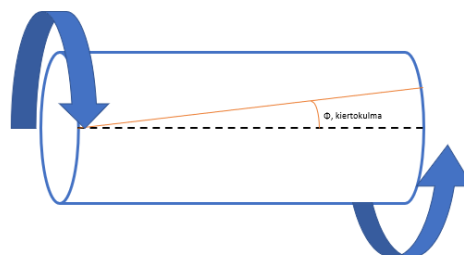
Värähtelyllä tarkoitetaan koneen tai sen rakenteen edestakaista liikettä tasapainoaseman ympärillä. Pyörivien koneiden värähtely voidaan jakaa kolmeen eri tyyppiin: kieppumiseen, perustuksen värähtelyyn ja vääntövärähtelyyn. Koneeseen tai sen osaan kohdistuva voima pakottaa koneen värähtelemään, ja koneen värähtelyä kutsutaan sen vuoksi pakotetuksi värähtelyksi. Värähtelyä kutsutaan vapaaksi värähtelyksi, jos värähtelijään ei vaikuta ollenkaan ulkoisia voimia. Tästä johtuen ajan kuluessa vapaa värähtely vaimenee itsestään pois, kun mikään ulkoinen voima ei ylläpidä värähtelyä. [1]

Kaikissa pyörivissä koneissa ilmenee mekaanista värähtelyä. Täydellisesti tasapainoisessa koneessa värähtelyä ei tapahtuisi lainkaan. Pyörivän, täydellisesti tasapainossa olevan koneen valmistaminen on kuitenkin mahdotonta, sillä pelkästään täysin tasapainoisten eli kokonaan värähtelemättömien yksittäisten osien valmistaminen on käytännössä mahdotonta. Värähtely ei siten automaattisesti tarkoita vikaa laitteistossa, vaan se on osa normaalia koneen toimintaa. [4]

Värähtely tulisi kuitenkin pyrkiä minimoimaan, koska se voi aiheuttaa mekaanisissa järjestelmissä esimerkiksi materiaalin väsymistä, käynnin muutoksia ja energiahäviöitä [1]. Koneen värähtelyssä tapahtuva muutos voi myös kertoa koneen vioittumisesta tai huonosta ajomallista. Laitteiden tai osien vaurioitumisen estämiseksi olisikin tärkeää pystyä myös tunnistamaan, milloin värähtely alkaa muuttumaan. [4]

### 2.1 Vääntövärähtely

Vääntövärähtelyllä tarkoitetaan akselin liikettä pyörimisakselin suhteen, joten vääntövärähtelyä esiintyy pyörivissä koneissa [5]. Kuvassa 3 on havainnollistettu vääntövärähtelyiden suunta.



**Kuva 3.** Vääntövärähtelyiden suunta. [3]

Vääntövärähtelyn aiheuttaa epätasainen vääntömomentti akselin suhteen, eli akseliin kohdistuva voima on suuruudeltaan vaihtelevaa. Akseliin kohdistuva epätasainen vääntömomentti johtuu useimmiten moottorin epätasaisesta vääntömomentista. Vääntövärähtely koostuu akselin massakeskittymien ja akselia pyörittävän moottorin osien värähtelyistä. Kaikki massat värähtelevät samalla taajuudella, mutta niiden amplitudit ja kulmanopeuden suunnat eroavat toisistaan. [2]

Vääntövärähtely voi aiheuttaa akselin resonoinnin. Akselin resonoinnilla tarkoitetaan sitä, että värähtelijä aiheuttaa toisen värähtelijän värähtelyn siirtymisen omalle ominaistajuudelleen. Näin voi tapahtua, jos värähtelyn aiheuttama vääntömomentti, akseliin kohdistuva voima, on värähtelyn ominaistajuuden kerrannainen. Ominaistajuudella tarkoitetaan värähtelijän vapaan värähtelyn taajuutta. Laitte värähtelee omalla ominaistajuudellaan silloin, kun siihen ei vaikuta ylimääräisiä voimia. Ominaistajuuden kerrannainen on jokin ominaistajuuden monikerta. Akselin resonanssikohtissa värähtelyn amplitudi akselin suhteen voi kasvaa niin suureksi, että se voi aiheuttaa jopa akselin katkeamisen. [5]

## 2.2 Vääntövärähtelyn mittaaminen venymäliuska-antureilla

Venymäliuska-anturilla tarkoitetaan ohuesta kalvosta valmistettua sähkövastusta, jota käytetään mittaamaan rakenteen muodon muuttumista, kuten venymistä tai supistumista. Mittauksia varten venymäliuska-anturi liimataan mitattavan rakenteen pinnalle. Tavallisen venymäliuska-anturin rakenne on havainnollistettu kuvassa 4. [6]



**Kuva 4.** Venymäliuska-anturin rakenne [6]

Venymäliuska-anturin toiminta perustuu siihen, että rakenteen muodon muuttuessa se venyttää tai supistaa venymäliuskan rakennetta. Riippuen kuormituksen suunnasta venymäliuska-antureiden metallijohtimet joko ohenevat tai paksunevat, mikä aiheuttaa johtimen poikkipinnan muutoksen. Johtimen poikkipinnan muutos aiheuttaa sähkövastuksen resistanssin muutokseen kaavan 1 mukaisesti. [7]



$$R = \frac{\rho L}{A}, \quad (1)$$

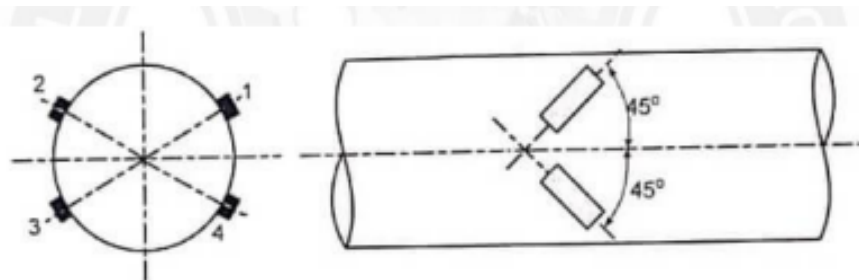
Missä  $\rho$  on resistiivisyys,  $L$  on johtimen pituus ja  $A$  on poikkipinta-ala.

Venymäliuska-anturissa rakenteen muodonmuutoksen aiheuttama resistanssin muutos on yleensä hyvin pieni, minkä vuoksi venymäliuska mittaauksissa hyödynnetään usein Wheatstonen siltakytkentää. Wheatstonen siltakytkennässä on rinnan kaksi sähkövastuspiiriä, joiden resistanssit normaalitilassa ovat samat, kytkennän tarkoitus on voida mitata piirien jännite-eroa. Venymä mittaauksissa osa siltakytkennän sähkövastuksista korvataan venymäliuskoilla. Korvattavien vastuksien määrä riippuu halutusta mittausherkkyydestä sekä siitä, minkä suuntaisia rakenteen muutoksia halutaan mitata. [6]

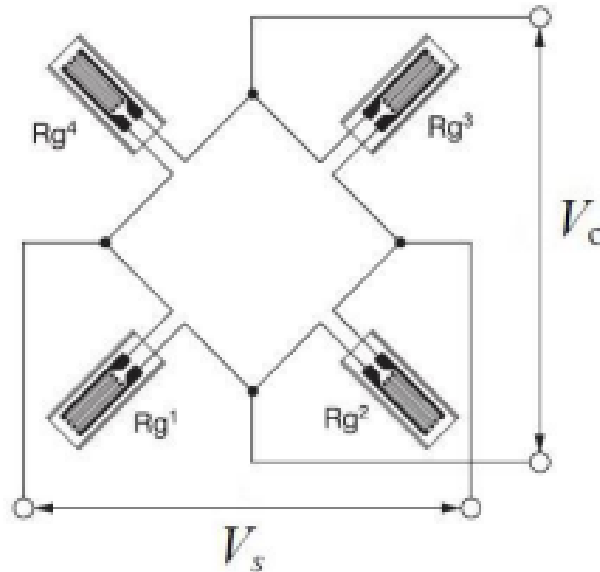
Yksi tapa mitata värähtelyä akselissa on käyttää niin kutsuttua täyssiltaa eli korvata kaikki neljä vastusta Wheatstonen sillassa venymäliuskoilla. Täyssillassa venymäliuskojen välinen kulma on aina  $90^\circ$ . Wheatstonen täyssilta kytkentä on esitetty kuvassa 6. Vääntöä mitatesa venymäliuskat tulee asettaa  $45^\circ$  kulmassa akselin pituussuuntaan nähden. Tällaisella kytkennällä saadaan eliminoitua mittaustuloksista pois taivutuksen, aksiaalisen suunnan sekä lämpötilan vaikutukset, jolloin saadaan mitattua pelkkää vääntöä. Kytkentää on havainnollistettu kuvassa 5. Sillasta ulos tuleva jännite  $U_{out}$  voidaan laskea kaavalla 2

$$U_{out} = \frac{GF}{4}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4)U_{in}, \quad (2)$$

Missä  $GF$  on liuska kerroin,  $U_{in}$  on sillalle syötettävä jännite ja  $(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4)$  on siltakerroin. Liuska kerroin riippuu valitusta venymäliuskatyypistä ja siltakerroin käytetystä kytkentätyypistä. [6, 7]



**Kuva 5.** Väännön mittaaminen akselista venymäliuskoilla. [8]



Kuva 6. Wheastonen siltakytkentä [9]

### 2.3 Vääntövärihtelyn ominaistajuuden laskenta

Vääntövärihtelyä yhden vapausasteen systeemissä voidaan kuvata liikeyhtälöllä

$$J \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + c\varphi = 0, \quad (3)$$

missä  $J$  on kappaleen polaarinen hitausmomentti,  $\varphi$  on kiertokulma ja  $c$  on vääntöjousivakio. Yhtälön 3 yleinen ratkaisu on muotoa

$$\varphi = C \sin(\omega t + \gamma), \quad (4)$$

missä  $C$  ja  $\gamma$  ovat mielivaltaisia vakioita ja  $\omega$  on ominaiskulmanopeus. Derivoimalla yhtälö 4 kahdesti ja sijoittamalla saadun toisen derivaatan yhtälöön 3 saadaan yhtälö

$$-J\omega^2\varphi + c\varphi = 0, \quad (5)$$

mistä voidaan ratkaista  $\omega$  ja näin saadaan ominaiskulmanopeudelle kaava

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{J}}. \quad (6)$$

Värihtelyn ominaistajuus  $f$  puolestaan voidaan laskea ominaiskulmanopeuden avulla kaavalla

$$f = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (7)$$

Moottorin pyöriä osia mallinnetaan umpinaisena sylinterinä, jonka massakeskipisteen oletetaan olevan pyörimisakselilla. Massoina toimivien kiekkojen massakeskipisteet sijaitsevat myös pyörimisakselilla, jolloin ympyrälevyjen ja umpinaisen sylinterin tapauksessa niiden hitausmomentit voidaan laskea kaavalla

$$J = \frac{1}{2}mr^2, \quad (8)$$

missä  $m$  on kappaleen massa ja  $r$  kiekon tai sylinterin säde. Vääntöjousivakio  $c$  lasketaan kaavalla

$$c = \frac{GI_p}{l}, \quad (9)$$

missä  $G$  on materiaalin liukukerroin,  $l$  vääntöjousen pituus ja  $I_p$  poikkileikkauksen polaari-nen hitausmomentti. Pyöreän poikkileikkauksen, kuten akselin kohdalla polaarinen hitausmomentti, voidaan laskea kaavalla:

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}, \quad (10)$$

missä  $d$  on akselin halkaisija. [2]

### 2.3.1 Holzerin menetelmä

Yksi tapa laskea systeemin ominaistajuus on, käyttää Holzerin menetelmää. Se on iteratiivinen juurenhaku menetelmä yhtälöryhmälle. Holzerin menetelmällä voidaan ratkaista monimassajärjestelmän ominaistajuus. Monimassajärjestelmällä tarkoitetaan järjestelmää, missä on  $n$  kappaletta pyöriä massoja. Yhtä pyöriä massaa  $J_k$  kuvaa differentiaaliyhtälö

$$J_k \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t^2} + c_{k-1}(\varphi_k - \varphi_{k-1}) + c_k(\varphi_k - \varphi_{k+1}) = 0, \quad (11)$$

jossa  $\varphi$  on kiertokulma. Kun kaikille  $n$ :lle massalle kirjoitetaan kaavan 11 mukainen yhtälö, niistä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} J_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + c_1(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \\ J_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} + c_1(\varphi_2 - \varphi_1) + c_2(\varphi_2 - \varphi_3) = 0 \\ \dots \\ J_{n-1} \frac{\partial^2 \varphi_{n-1}}{\partial t^2} + c_{n-1}(\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}) + c_{n-1}(\varphi_{n-1} - \varphi_n) = 0 \\ J_n \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t^2} + c_{n-1}(\varphi_n - \varphi_{n-1}) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Koska massat värähtelevät samalla taajuudella, on yhtälöryhmän yleinen ratkaisu muotoa

$$\varphi_k = A_k \sin \omega t, \quad (13)$$

jossa  $A$  on amplitudi. Derivoimalla yhtälö kahdesti ja sijoittamalla saatu toinen derivaatta yhtälöryhmään 12 saadaan yhtälöryhmä, josta voidaan ratkaista tuntemattomat amplitudit. Yhtälöryhmä muodossa, jossa amplitudit on ratkaistu

$$\begin{cases} A_1 = A_1 \\ A_2 = A_1 - \frac{J_1\omega^2 A_1}{c_1} = 0 & = A_1 - \frac{M_1}{c_1} \\ A_3 = A_2 - \frac{J_1\omega^2 A_1 + J_2\omega^2 A_2}{c_2} = 0 & = A_2 - \frac{M_1 + M_2}{c_1} \\ \vdots \\ A_n = A_{n-1} - \frac{J_1\omega^2 A_1 + J_2\omega^2 A_2 + \dots + J_{n-1}\omega^2 A_{n-1}}{c_{n-1}} = 0 & = A_{n-1} - \frac{\sum_{k=1}^{n-1} M_k}{c_1} \end{cases}, \quad (14)$$

missä  $M_n$  on yksittäinen momentti. Yksittäiset momentit lasketaan kaavalla

$$M_n = J_n \omega^2 A_n. \quad (15)$$

Holzerin menetelmä perustuu yhtälöryhmään 14 ja yhtälöön 13. Laskenta aloitetaan asettamalla vapaan pään ensimmäisen massan amplitudin arvoksi 1 radiaani, sekä valitsemalla  $\omega$ :lle jokin alkuarvaus. Alkuarvaus kannattaa valita laskemalla jokin likiarvo ominaiskulmataajuudelle, jotta alkuarvaus saadaan mahdollisimman lähelle oikeaa  $\omega$ :n arvoa. Aluksi lasketaan kaikkien massojen amplitudien arvot yhtälöryhmän 14 mukaisesti, minkä jälkeen lasketaan kaikkien momenttien summa. Jos saatu momenttisarja on 0, on valittu  $\omega$ :n arvo oikea ja mitä kauempana nolasta saatu arvo on, sitä kauempana oikeasta  $\omega$ :n arvosta ollaan. Negatiivisilla momenttisarjan arvoilla alkuarvausta pienennetään ja positiivisilla kasvetaan. [2]

Holzerin menetelmän laskenta suoritetaan usein taulukkomuodossa, taulukko 1. Tällöin lasketaan ensin tarvittavat vakiot, kuten hitausmomentit  $J$  ja vääntöjousivakiot  $c$ , minkä jälkeen edetään taulukossa vasemmalta oikealle ja ylhäältä alas.

Massan nro	$J_k$	$J_k\omega^2$	$A_k$	$J_k\omega^2 A_k$	$\sum_{k=1}^{k=k} J_k\omega^2 A_k$	$c_k$	$\frac{\sum_{k=1}^{k=k} J_k\omega^2 A_k}{c_k}$
1	$J_1$	$J_1\omega^2$	$A_1$	$J_1\omega^2 A_1$	$J_1\omega^2 A_1$	$c_1$	$\frac{J_1\omega^2 A_1}{c_1}$
2	$J_2$	$J_2\omega^2$	$A_2$	$J_2\omega^2 A_2$	$J_1\omega^2 + J_2\omega^2 A_2$	$c_2$	$\frac{J_1\omega^2 + J_2\omega^2 A_2}{c_2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$J_{n-1}$	$J_{n-1}\omega^2$	$A_{n-1}$	$J_{n-1}\omega^2 A_{n-1}$	$\sum_{k=1}^{k=n-1} J_k\omega^2 A_k$	$c_{n-1}$	$\frac{\sum_{k=1}^{k=n-1} J_k\omega^2 A_k}{c_{n-1}}$
$n$	$J_n$	$J_n\omega^2$	$A_n$	$J_n\omega^2 A_n$	$\sum_{k=1}^{k=n} J_k\omega^2 A_k$		

**Taulukko 1.** Holzerin menetelmä taulukkomuodossa

Holzerin menetelmällä saatu ominaistajuus vastaa sähkömoottorista mitattua ominaistajuutta. Sähkömoottorin ominaistajuus on riippuvainen sille syötettävän vaihtosähkön taajuudesta sekä napaparien määrästä. Tämä täytyy huomioida laskennassa, jotta saadaan rakenteen ominaistajuus. Oikosulkumoottorin pyörimisnopeus  $n_s$  voidaan laskea kaavalla

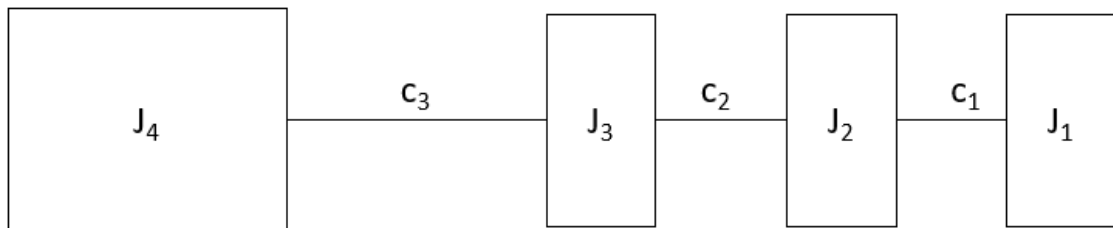
$$n_s = \frac{2 * 60 * f_n}{\text{napaluku}}, \quad (16)$$

missä  $f_n$  on sähköverkon taajuus. Vastaava pyörimistaajuus hertzeinä saadaan kaavalla

$$n_f = \frac{f_n}{p}, \quad (17)$$

missä  $p$  on napaparien lukumäärä. [10]

Työn testipenkissä on neljä pyörivää massaa eli kyseessä on 4-massajärjestelmä. Massoina toimivat moottorin pyörivät osat, ja akseliin kiinnitetyt kolme metall kiekkoa. Työn mitausjärjestelyt 4-massajärjestelmänä on esitetty kuvassa 7.



**Kuva 7.** 4-massajärjestelmä.  $J_1$ - $J_3$  kuvaavat kiekkojen hitausmomenteja ja  $J_4$  moottorin hitausmomenttia. Akselin vääntöjousivakiota kuvaavat  $c_1$ - $c_3$ .

### 2.3.2 Elementtimenetelmä

Elementtimenetelmällä tarkoitetaan menetelmää, jossa tarkasteltava rakenne jaetaan osiin eli elementteihin rakenteen lujuuden tarkastelua varten. Elementtimenetelmän avulla voidaan muodostaa usean vapausasteen systeemille massa- ja jäykkyysmatriisit, joiden avulla voidaan laskea systeemin ominaistajuudet. [11].

Jäykkyysmatriisi  $K$  yksinkertaiselle 2-vapausasteen sauvaelementille [11].

$$[K] = c \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Massamatriisi  $M$  2-vapausasteen sauvaelementille puolestaan

$$[M] = \frac{\rho I_p l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

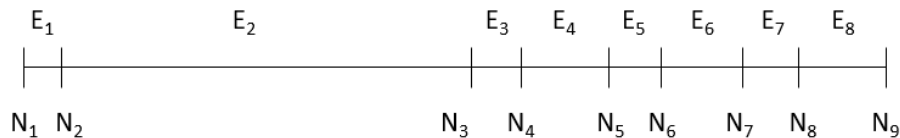
missä  $\rho$  on elementin materiaalin tiheys ja  $l$  on elementin pituus. [11].

Globaalit, eli koko rakennetta kuvaavat jäykkyys- ja massamatriisit, saadaan muodostamalla ensin vastaavat matriisit kaikille yksittäisille elementeille. Tämän jälkeen lasketaan elementtien matriisien summa siten, että yksittäiset jäykkyys- ja massakertoimet sijoittuvat globaalien vapausasteiden mukaisesti oikeille paikoilleen. Olettaen, että ennen matriisien yhteenlaskemista yksittäisten elementtien matriisit on laajennettu globaalin massa- tai jäykkyysmatriisiin kokoisiksi, globaalit massa- ja jäykkyysmatriisit voidaan laskea seuraavasti:

$$[K] = \sum_{i=1}^n [K_i], \quad (20)$$

missä  $[K]$  on globaali jäykkyysmatriisi,  $[K_i]$  on yksittäisen elementin laajennettu jäykkyysmatriisi ja  $n$  on elementtien määrä. [11]

Työn testipenkki jaetaan globaalien jäykkyys- ja massamatriisien muodostamista varten kahdeksaan elementtiin, jolloin systeemillä on yhdeksän vapausastetta. Testipenkissä moottorin päässä on kuitenkin jäykkäkytkentä, milloin moottorin vapausaste voidaan poistaa laskennassa. Tällöin jäljelle jää kahdeksan vapausastetta. Testipenkki jaettuna 8-elementtiin on esitetty kuvassa 8.



**Kuva 8.** 8-elementtimenetelmä. Elementti  $E_1$  kuvaa moottoria, elementit  $E_3, E_5$  ja  $E_7$  kuvaavat kiekkoja ja  $E_2, E_4, E_6$  ja  $E_8$  kuvaavat akselin osia.

### 2.3.3 Ominaisarvotehtävä

Jäykkyys- ja massamatriisien muodostamisen jälkeen systeemin ominaistajuudet voidaan ratkaista ominaisarvotehtävänä. Systeemin liikeyhtälö  $n$  vapausasteen värähtelijälle matriisi- muodossa on

$$[M]\ddot{x} + [K]x = 0, \quad (21)$$

missä  $x$  on paikkavektori ajan suhteen ja  $\ddot{x}$  on kiihtyvyyksvektori. Yhtälön yleinen ratkaisu on

$$x(t) = X \cos(\omega t - \gamma), \quad (22)$$

missä  $X$  on vektori, joka sisältää värähtelyn amplitudit ja  $\gamma$  vaihekulma. Derivoimalla yhtälö 22 kahdesti ja sijoittamalla saatu kiihtyvyyksvektori  $\ddot{x}$  sekä paikkavektori  $x$  liikeyhtälöön 21 saadaan

$$-\omega^2 [M]X \cos(\omega t - \gamma) + [K]X \cos(\omega t - \gamma) = 0, \quad (23)$$

koska  $\cos(\omega t - \gamma) \neq 0$  voidaan yhtälö 23 kirjoittaa muodossa

$$[K]X = \omega^2 [M]X. \quad (24)$$

Ominaisarvot saadaan ratkaisemalla karakteristisen determinantin juuret

$$|[K] - \omega^2 [M]| = 0. \quad (25)$$

Sijoittamalla saadut ominaisarvot vuoronperään yhtälöön

$$[K]\phi_i = \omega_i^2 [M]\phi_i, \quad (26)$$

saadaan ratkaistua ominaismuotovektorit  $\{\phi\}_i$ . Ominaisarvo tehtävän ratkaisu voidaan näin ollen esittää yleisessä muodossa

$$[K][\phi] = [M][\phi][\omega^2], \quad (27)$$

missä  $[\phi]$  on ominaismuodot sisältävä matriisi ja  $[\omega^2]$  on matriisi, joka sisältää ominaisarvot eli ominaiskulmanopeudet. Ominaiskulmataajuudet saadaan ominaiskulmanopeuksin avulla kaavalla 7. Ratkaisuna saadaan yhtä monta alinta ominaistajuutta ja ominaismuotoa kuin vapausasteita on globaaleissa jäykkyys- ja massamatriiseissa. [11–13]

## 2.4 Fourier-muunnos

Fourier-muunnos on paljon käytetty menetelmä signaalianalyysin parissa. Fourier-muunnoksella voidaan muuntaa jaksollinen jatkuva signaali aikatasosta taajuustasoon siten, että aikatasossa mitatusta signaalista saadaan esiin signaalin sisältämät taajuudet. [14]

Fourier-muunnos määritellään seuraavasti

$$F(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt \quad (28)$$

Mittaamalla saadaan analoginen signaali, joka muunnetaan A/D- muuntimella digitaaliseen muotoon, missä mittauspisteiden välinen aika on yleisesti vakio. Tällaiselle datalle ei voida käyttää Fourier-muunnosta vaan tulee käyttää diskreettiä Fourier-muunnosta. Diskreetti Fourier-muunnos määritellään seuraavasti

$$X(\mu) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-\left(\frac{2i\pi}{N}\right)n\mu} \quad (29)$$

missä  $N$  on mittauspisteiden määrä.

Diskreetti Fourier-muunnos on sellaisenaan suhteellisen hidas laskea. Sen aikakompleksisuus on neliöllinen eli luokkaa  $n^2$ , missä  $n$  on laskettavien pisteiden määrä. Diskreetistä Fourier-muunnoksesta on kehitetty nopea Fourier-muunnos algoritmi, jonka kompleksisuus on logaritminen eli se on huomattavasti perinteistä muunnosta nopeampi.



### 3 AINEISTO JA OHJELMISTOT

Työn testipenkin ominaistaajuudeksi mitattiin SensorConnect ohjelmalla 12.1 Hz. Testipenkin moottorilla on kaksi napaparia, joten kaavan 17 mukaan testipenkin ominaistaajuutta vastaava moottorin pyörimistaajuus on 24.2 Hz.

Venymäliuska mittaukset toteutettiin mittaamalla vääntöväärhtelyä kolmella eri moottorin pyörimistaajuudella. Taajuudet säädettiin taajuusmuuntajalla halutuiksi ja luettiin taajuusmuuntajan näytöstä taajuuksien olevan juuri halutut. Mittaukset suoritettiin 23.0 Hz, 24.2 Hz ja 26.0 Hz taajuuksilla. Mittauksia suoritettiin näin ollen sekä systeemin ominaistaajuudella, että ominaistaajuutta pienemmällä sekä suuremmalla taajuudella, jotta voitaisiin verrata testipenkin käyttäytymistä ominaistaajuudella muihin pyörimistaajuuksiin. Lisäksi mitattiin pelkästään ympäristön aiheuttamaa kohinaa niin, että mittauslaitteisto ei ollut päällä. Näin voidaan arvioida, mitkä taajuuspiikit aiheutuvat laitteistosta itsestään ja mitkä ovat ympäristön aiheuttamaa häiriötä.

Mittaukset toteutettiin mittaamalla aluksi pelkkää ympäristön kohinaa. Tämän jälkeen aloitettiin kiihdyttämällä laitteisto 23.0 Hz pyörimistaajuudelle, mistä edelleen kiihdytettiin 24.2 Hz taajuudelle ja lopuksi 26.0 Hz taajuuteen. Tästä palattiin porrastetusti 24.2 Hz kautta 23.0 Hz taajuuteen. Mittaustulokset tallennettiin CSV-tiedostoiksi mittaustulosten käsittelyä varten.

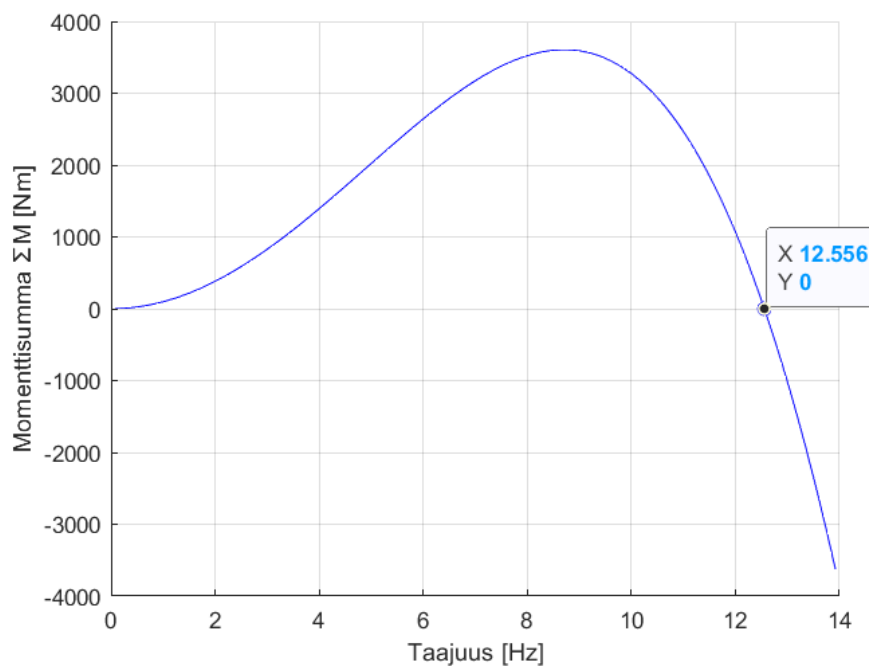
Saatujen mittaustulosten käsittelyyn käytettiin MATLAB R2021b laskentaohjelmistoa. Saatujen signaalien muuntamiseksi aikatasosta taajuustasoon hyödynnettiin MATLABin fft funktiota, joka suorittaa signaaleille nopean Fourier-muunnoksen. Mittaustuloksissa ilmeni paljon ympäristön aiheuttamaa kohinaa. Tästä johtuen saatuja signaaleja suodatettiin niin, että niistä poistettiin ympäristön kohinan aiheuttamat taajuuspiikit pois.

## 4 TULOKSET

### 4.1 Lasketut ominaistaajuudet

Systeemin ominaistaajuus ratkaistiin laskennallisesti kahdella eri tavalla: Holzerin menetelmällä ja ominaisarvotehtävän ratkaisuna. Elementtimenetelmän avulla muodostettiin testilaitteistosta jäykkyys- ja massamatriisit, minkä jälkeen ratkaistiin ominaisarvotehtävä. Ominaistaajuudeksi ominaisarvotehtävän ratkaisuna saatiin 12.48 Hz.

Holzerin menetelmästä tehtiin MATLAB funktio, millä etsittiin testipenkin ominaistaajuus. Holzerin menetelmällä saadut tulokset on esitetty kuvassa 9. Kohta, jossa momenttisuuma on nolla, eli kokeiltu ominaistaajuus on oikea, on merkitty kuvaan pisteellä. Holzerin menetelmällä ominaistaajuudeksi saatiin 12.56 Hz.



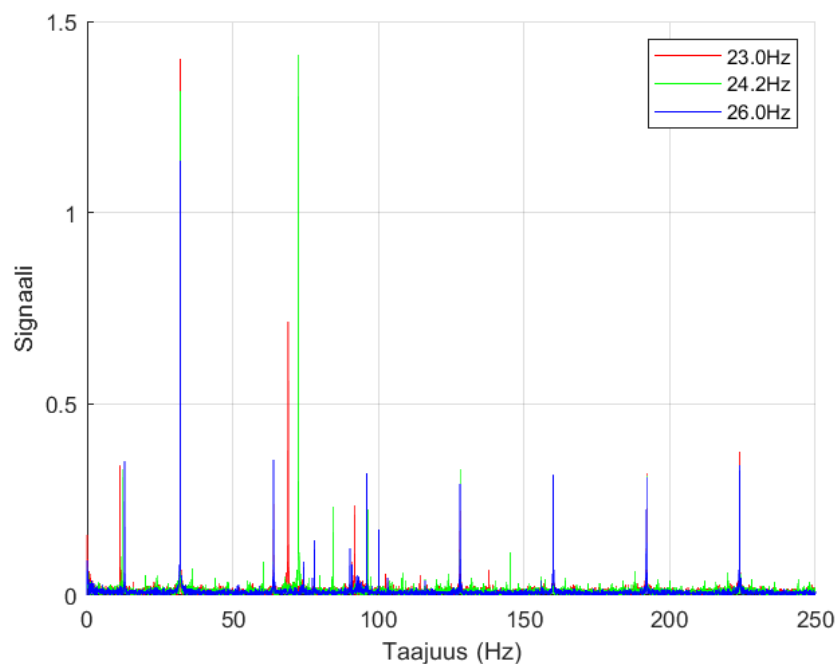
**Kuva 9.** Holzerin menetelmä: resonanssitaajuus

Eri menetelmillä saadut tulokset ovat suhteellisen lähellä toisiaan, sillä niiden tulosten suhteellinen ero on noin 0.59%. Verrattuna SensorConnect ohjelmalla mitattuun tulokseen, laskennallisilla menetelmillä saaduissa tuloksissa on enemmän virhettä. Holzerin menetelmän suhteellinen virhe mitattuun on noin 3.63% ja ominaisarvotehtävän suhteellinen virhe on 3.05%. Menetelmät eivät näin ollen antaneet suhteessa SensorConnectilla mitattuun tarkkaa vastausta, mutta toisiinsa verrattuna eivät eroa merkittävästi.

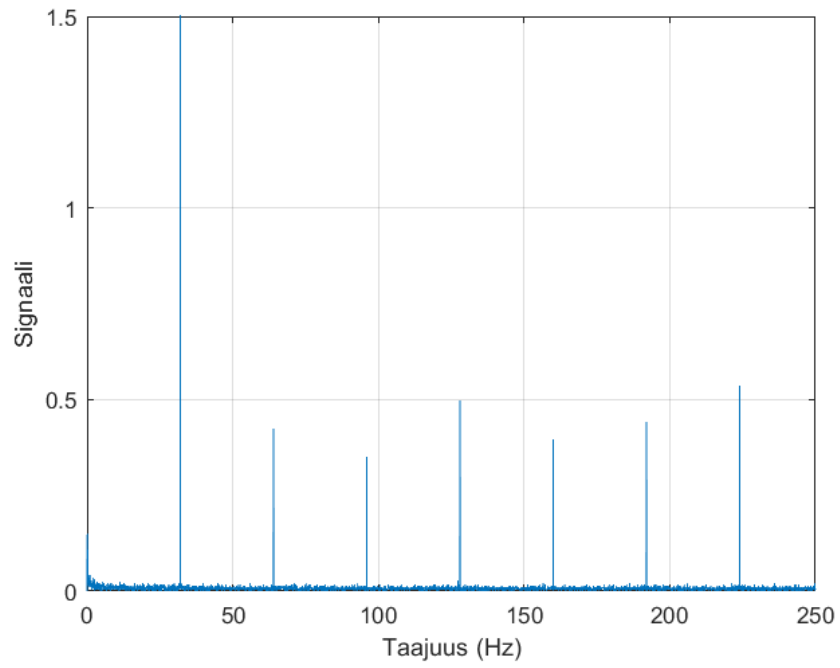
## 4.2 Fourier-muunnetut signaalit

Signaalin sisältämien taajuuksien tarkastelua varten signaaleille tehtiin Fourier-muunnos. Muunnos suoritettiin erikseen kaikille mittaustaajuuksille ja lisäksi pelkän kohinan sisältävälle signaalille. Kaikkien mitattujen taajuuksien alkuperäiset suodattamattomat Fourier-muunnetut signaalit on esitetty kuvassa 10. Kuvassa 11 on pelkän kohinan aiheuttamat värähtelytaajuudet. Kuvista 10 ja 11 nähdään, että pohjakohina aiheuttaa itsessään paljon taajuuspiikkejä Fourier-muunnettuihin signaaleihin. Jotta voitaisiin keskittyä vain testipenkin toiminnan aiheuttamiin värähtelytaajuuksiin, on kuvista 12 ja 13 suodatettu kuvassa 11 näkyvät taajuuspiikit.

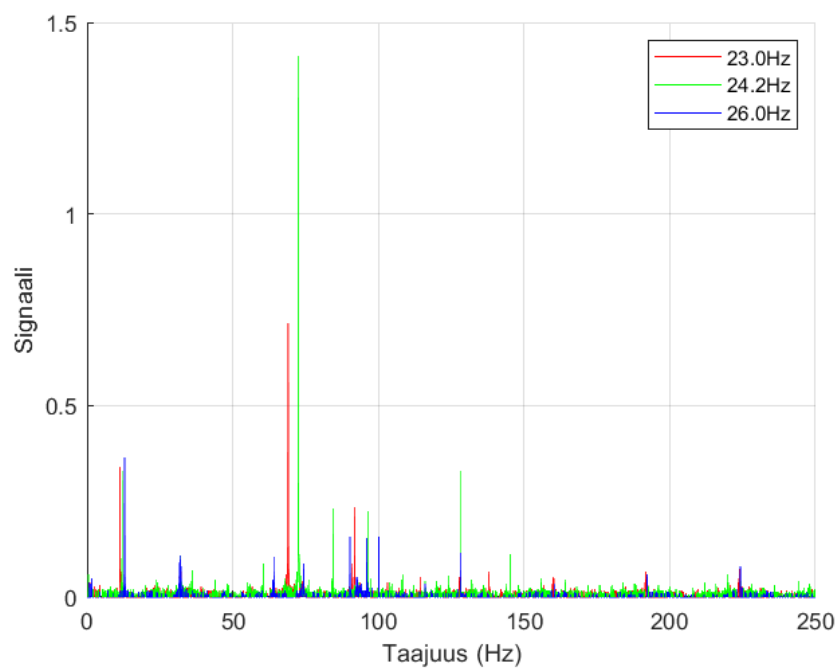
Fourier-muunnettujen signaalien kuvista 10-13 voidaan selkeästi nähdä kaikilla mittaustaajuuksilla systeemin ominaistaajuuden piikki 12 Hz kohdalla. Kaikilla muilla taajuuksilla paitsi 26.0 Hz on selkeästi piikki myös ominaistaajuuden ensimmäisen kerrannaisen noin 70 Hz kohdalla. Resonanssitaajuudella ominaistaajuuden kerrannainen on huomattavasti korkeampi kuin muilla mittaustaajuuksilla. Resonanssitaajuudella Fourier-muunnetussa signaalissa myös 128 Hz piikki on huomattavasti korkeampi kuin muilla taajuuksilla. Lisäksi kuvasta 12 voidaan huomata resonanssitaajuudella ilmenevän myös joitakin muita taajuuksia, mitä muilla taajuuksilla ei esiinny. Tällaisia ovat ainakin taajuudet 84 Hz ja 145 Hz, joita ei näytä ilmenevän muilla kuin resonanssitaajuudella.



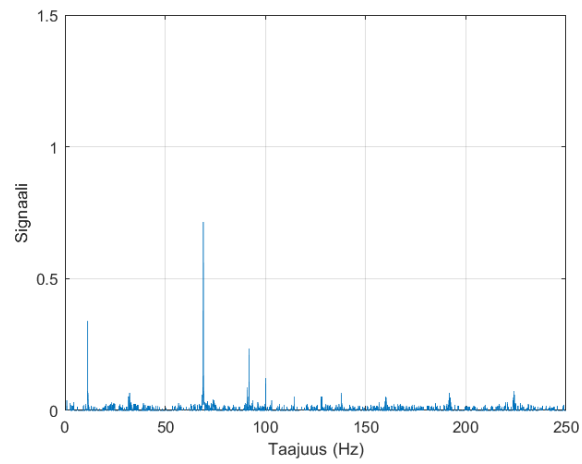
**Kuva 10.** Fourier-muunnetut signaalit.



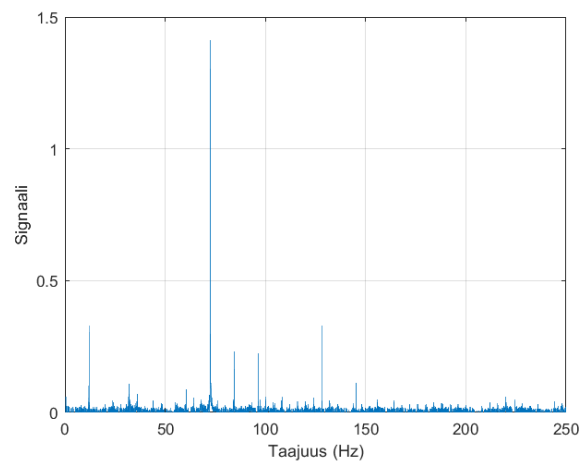
**Kuva 11.** Fourier-muunnettu kohinasignaali.



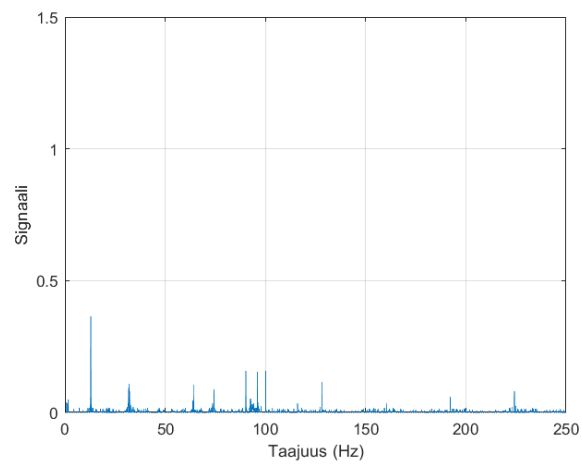
**Kuva 12.** Suodatetut Fourier-muunnetyt signaalit.



(a) Suodatettu Fourier-muunnettu 23Hz signaali



(b) Suodatettu Fourier-muunnettu 24.2Hz signaali



(c) Suodatettu Fourier-muunnettu 26Hz signaali

**Kuva 13.** Yksittäiset signaalit suodatettuina

## 5 KESKUSTELU

Molemmat laskennalliset menetelmät antoivat testipenkille hieman todellista suuremman ominaistaajuuden. Tulosten perusteella ominaisarvottehtävällä päästiin hieman lähemmäksi oikeaa ominaistaajuutta. Vaikka ominaisarvottehtävän virheen suuruus on vain noin 3%, voi se käytännön sovelluksissa olla merkittävä. Menetelmien antamaa virhettä suhteessa mitattuun voivat selittää mittausvirheet akselia ja laitteistoa mitattaessa, vaajaavaiset tiedot laitteistosta selä yksinkertaistukset laskennassa. Laskennassa on yksinkertaistamisen vuoksi jätetty huomioimatta rakenteen vaimennuskyky, mikä todennäköisesti lisää virhettä molemmissa menetelmissä. Tarkempien laskennallisten tulosten saamiseksi olisi lisäksi ollut hyvä suorittaa kuvassa 2 esitellyt laitteiston mittaukset kahdesti mittausvirheiden minimoimiseksi. Lisäksi Holzerin menetelmässä moottorin tietojen epätarkkuus ja puuttelisuus voi suurentaa virhettä. Moottorin pyörivien osien massasta, mitoista ja muodoista ei ollut käytössä tarkkoja tietoja ja niiden kohdalla on käytetty arvioita. Laskelmissa tehdään lisäksi oletus, että moottorin massakeskipiste sijaitsee moottorin puolivälissä pyörimisakselilla, mikä ei välttämättä vastaa todellisuutta. Tarkemmilla mittauksilla ja lähtötiedoilla oltaisiin voitu päästä laskemallakin lähemmäs SensorConnectilla mitattua todellista ominaistaajuutta.

Fourier-muunnetuista signaaleista ominaistaajuus voidaan tunnistaa kaikkien eri mittaustaajuuksien kuvaajista. Fourier-muunnetuissa signaaleissa löydettiin resonanssitaajuudella joi-takin taajuuspiikkejä joita ei esinny muilla mittaustaajuuksilla. Lisäksi resonanssitaajuudella ominaistaajuuden ensimmäisen kerrannaisen taajuuspiikki on huomattavasti korkeampi kuin muiden taajuuksien vastaava taajuuspiikki. Vaikuttaisi siis siltä, että resonanssitaajuudella toiminnan kannalta epäedullinen vääntöväärähtely lisääntyy akselissa. Toisaalta vertailtaessa 23.0 Hz ja 26.0 Hz Fourier-muunnettuja signaaleja näyttäisi siltä, että 23.0 Hz taajuudella akselissa tapahtuisi enemmän epäedullista värähtelyä.

Tulosten perusteella vaikuttaa siltä, että vääntöväärähtely akselissa lisääntyy resonanssitaajuudella ja tämä voitaisiin todeta myös venymäliuska mittausten avulla. Vääntöväärähtelyn lisääntymisen voidaan myös olettaa lisäävän rasitusta akselissa, mikä puolestaan voi joh-taa materiaalin väsymiseen ja lisätä akselin rikkoutumisen vaaraa. Tulosten perusteella venymäliuskamittauksissa värähtelyjä esiintyy enemmän juuri resonanssitaajuudella verrattuna muihin mittaustaajuuksiin. On kuitenkin vaikea arvioida, kuinka paljon värähtely resonanssitaajuudella lisääntyy sekä kuinka paljon värähtelyn lisääntyminen rasittaa akselia. Saatu-jen tulosten varmistamiseksi olisi hyvä suorittaa vielä useampia mittauksia eri taajuuksilla ja tutkia niiden antamia tuloksia.

Jatkotutkimuksissa voitaisiin myös tutkia, aiheuttaako laitteen vioittuminen muutoksia värähtelyssä ja voitaisiinko laitteen rikkoutuminen näin ollen ennakoida värähtelyssä tapah-

tuneesta muutoksesta. Värähtelyn muutoksien tunnistamiseen voitaisiin hyödyntää tekoälyä, joka seuraisi värähtelyn muutoksia. Se voisi näin ollen tunnistaa hetket, milloin värähtelyssä tapahtuu muutos ja ennakoida siten mahdolliset konerikot. Tekoälyn kouluttaminen tunnistamaan värähtelyn muutoksia olisi todennäköisesti järkevää monestakin syystä. Hyvin toteutettu tekoäly ratkaisu kykenee käsittelemään suuren määrän dataa ja todennäköisesti pystyisi tunnistamaan varmemmin pienet muutokset värähtelyssä kuin ihminen.

## 6 YHTEENVETO

Tämän kandidaatintyön tavoitteena oli selvittää testipenkin vääntöväärähtelyn ominaistaajuus ja tutkia, lisääntykö vääntöväärähtely akselissa moottorin pyörimistaajuuden ollessa sama kuin systeemin ominaistaajuus. Laskennallisilla menetelmillä ei saatu ratkaistua täysin oikeaa ominaistaajuutta testipenkille. Laskennallisten tulosten virhe selittyy osittain mittausvirheillä laitteiston mitoissa sekä yksinkertaistuksilla, joita laskennassa on tehty. Fourier-muunnetuista signaaleista voitiin kuitenkin kaikilla taajuuksilla löytää väärähtelyn ominaistaajuus. Lisäksi Fourier-muunnetuissa signaaleissa havaittiin vääntöväärähtelyn lisääntyvän resonanssitaajuudella. Jatkotutkimuksissa tulisi suorittaa useampia mittauksia, jotta voitaisiin vahvistaa ylimääräisten taajuuksien esiintyvän nimeenomaan resonanssitaajuudella.



## Lähteet

1. Salmi, H. Värähtelyt, niiden toteaminen ja vaimentaminen sähkökäytöllä. *Insinööriyö*. Viitattu 14.2.2022, Saatavilla: [https://www.theseus.fi/bitstream/handle/10024/124932/Heikki\\_Salmi.pdf;jsessionid=9BA5E5CD4BC0E4B3FC2B89B02A6B1972?sequence=1](https://www.theseus.fi/bitstream/handle/10024/124932/Heikki_Salmi.pdf;jsessionid=9BA5E5CD4BC0E4B3FC2B89B02A6B1972?sequence=1) (toukokuu 2017).
2. Pitkänen, J. *Polttorimoottoritekniikan perusteet, Moottorin kampiliike, vääntömomentti, pyörimisnopeuden tasaisuus ja vääntövärähtely* Toinen painos (Teknillinen korkeakoulu, Helsinki university of technology, -, 1999).
3. Holm, J. Comparison of methods to measure torsional vibration. *Bachelor's thesis*. Viitattu 3.11.2022, Saatavilla: [https://www.theseus.fi/bitstream/handle/10024/104035/Holm\\_Jonas.pdf;jsessionid=C9DED166508A648E61B182E7DA1FE7FF?sequence=1](https://www.theseus.fi/bitstream/handle/10024/104035/Holm_Jonas.pdf;jsessionid=C9DED166508A648E61B182E7DA1FE7FF?sequence=1) (2014).
4. Vuokila, O. Kunnonvalvonnan värähtelymittaukset. *Kandidaatityö*. Viitattu 14.2.2022, Saatavilla: <http://jultika.oulu.fi/files/nbnfioulu-201711253179.pdf> (marraskuu 2017).
5. Mäkinen, E. Moottorin kampikoneiston dynamiikka. *Diplomityö*. Viitattu 17.1.2022, Saatavilla: <https://trepo.tuni.fi/bitstream/handle/123456789/20916/makinen.pdf?sequence=7&isAllowed=y> (lokakuu 2011).
6. Hänninen, m. VENYMÄMITTAUS RAUTATIEVAIHTEEN DIAGNOSOINTIMENETELMÄNÄ. *Diplomityö*. Viitattu 3.12.2022, Saatavilla: [https://lutpub.lut.fi/bitstream/handle/10024/164789/diplomityo\\_hanninen\\_mika.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://lutpub.lut.fi/bitstream/handle/10024/164789/diplomityo_hanninen_mika.pdf?sequence=1&isAllowed=y) (syyskuu 2012).
7. Pöllänen, I. Keskustelut yrityksen edustajan kanssa. *Diplomityö* (2022).
8. TECHNOLOGY, R. C. O. E. Torque Measurement Using strain gauges. Viitattu 19.12.2022, Saatavilla: (2021).

9. Reponen, E. Puutavarakouran staattinen lujoustarkastel. *Opinnäytetyö*. Viitattu 19.12.2022, Saatavilla: 19. [https://www.theseus.fi/bitstream/handle/10024/97853/Reponen\\_Erkki.pdf?sequence=1](https://www.theseus.fi/bitstream/handle/10024/97853/Reponen_Erkki.pdf?sequence=1) (2015).
10. ABB. Tekninen opas nro 7, Sähkökäytön mitoitus. -. Viitattu 22.11.2022, Saatavilla: [https://library.e.abb.com/public/b11dafe92973be93c1256d2800415027/Tekninen\\_opasnro7.pdf](https://library.e.abb.com/public/b11dafe92973be93c1256d2800415027/Tekninen_opasnro7.pdf).
11. K., H. M. *Lujuusopin elementti menetelmä* Kolmas painos (Otakustantamo, -, 1980).
12. Hakulinen, H. Vauriontunnistus ja vasteiden estimointi värähtelymittausten ja simulointimallin avulla. *Insinööri*. Viitattu 7.12.2022, Saatavilla: [https://www.theseus.fi/bitstream/handle/10024/129360/Hakulinen\\_Henri.pdf?sequence=3](https://www.theseus.fi/bitstream/handle/10024/129360/Hakulinen_Henri.pdf?sequence=3) (2017).
13. Heikkinen, J. KOKEELLISEN MOODIANALYYSIN JÄLKIKÄSITTELY OMINAISMUOTOJEN VISUAALISEKSI TARKASTELEMISEKSI. *Diplomityö*. Viitattu 7.12.2022, Saatavilla: <https://lutpub.lut.fi/bitstream/handle/10024/63055/nbnfi-fe201006142020.pdf;jsessionid=6CD338D041ACFEE0D1B24D1CD4EFA4DC?sequence=3> (2010).
14. Lassfolk, K. Fourier-muunnos ja spektrianalyysikuvaajien tulkinta musiikintutkimuksessa, osa 1. -. Viitattu 17.11.2022, Saatavilla: 57. [https://helda.helsinki.fi/bitstream/handle/10138/231785/MS\\_1\\_13\\_Lassfolk.pdf?sequence=1](https://helda.helsinki.fi/bitstream/handle/10138/231785/MS_1_13_Lassfolk.pdf?sequence=1) (2013).

# Kuvat

1	Mittauslaitteisto. . . . .	5
2	Mittauslaitteistoa havainnollistava piirros . . . . .	5
3	Vääntövärähtely . . . . .	7
4	Venymäliuska-anturin rakenne . . . . .	8
5	Väännön mittaus venymäliuskoilla . . . . .	9
6	Wheastonen täyssiltakytkentä . . . . .	10
7	4-massajärjestelmä. . . . .	13
8	Elementtimenetelmä . . . . .	14
9	Holzerin menetelmän tulokset . . . . .	18
10	Fourier-muunnut signaalit . . . . .	19
11	Kohina Fourier-muunnos . . . . .	20
12	Suodatetut Fourier-muunnetut signaalit . . . . .	20
13	Yksittäiset signaalit suodatettuina . . . . .	21